Ánfora
ISSN: 0121-6538
anfora@autonoma.edu.co
Universidad Autónoma de Manizales
Colombia

Toro Carvajal, Luis Alberto

MODELO COMPUTACIONALREPRESENTACIONAL DE LA MATEMÁTICA (MCRMAT)

Ánfora, vol. 17, núm. 28, julio-diciembre, 2010, pp. 151-178
Universidad Autónoma de Manizales
Caldas, Colombia

MODELO COMPUTACIONAL-REPRESENTACIONAL DE LA MATEMÁTICA (MCRMAT)

COMPUTACIONAL-REPRESENTANTIONAL MODEL OF MATHEMATICS (CRMMATH)[1]

Luis Alberto Toro Carvajal[2]

Palabras clave: computación, cognición, MCRM, MCRMAT, enseñanza de la matemática, representaciones.

Keywords: computation, cognition, CRMM, CRMMATH, mathematics, mathematics teaching, representation

RESUMEN

Este artículo presenta lo que el autor denomina modelo computacional-representacional de la matemática (MCRMAT), su importancia teórica para la educación matemática y su relación con el uso de tecnologías informáticas en la enseñanza de tal ciencia. A tal efecto, y desde el punto de vista de la ciencia cognitiva, se hace un estudio de lo que son las representaciones, lo mismo que se explica el modelo computacional-representacional de la mente (MCRM).

ABSTRACT

This paper presents the so-called computational representational model of mathematics (MCRMATH), its theoretical importance for mathematics education and its relation with the use of technology tools in mathematics teaching. To do this, from a cognitive point of view, we conduct a research study of representations and we explain the computational-representational model of mind (CRMM).

1. Traducción: Carlos Arturo Muñoz T. Centro de Traducción de Idiomas de la UAM

2. Ingeniero Químico (Universidad Nacional), Magíster en Ciencias Matemáticas (Universidad del Valle), Doctor of Philosophy Mathematics (Lacrosse University). Profesor Asociado Universidad Autónoma de Manizales (UAM), Profesor Catedrático Asociado Universidad Nacional de Colombia (Sede Manizales).

Publicaciones recientes:
1. Una Introducción a Matlab para estudiantes de Ciencias e Ingenierías. (2009). Universidad Autónoma de Manizales (UAM). Gráficas Tizán Ltda.-Manizales.
2. Lecturas en Métodos Numéricos para Ingenieros Químicos con Aplicaciones en Matlab. (2009). Universidad Nacional de Colombia -Sede Manizales. Gráficas Tizán Ltda.-Manizales.
Email: luisalbertotoro@hotmail.com

Recibido: febrero 15 de 2010
Aprobado: abril 20 de 2010

Introducción

La computadora procesa información. El lector familiarizado con el uso de las computadoras, sabe que los programas computacionales se caracterizan mediante *datos* y *algoritmos.* Los datos pueden ser numéricos y/o alfanuméricos, es decir combinación de letras del alfabeto y números. Un algoritmo es un procedimiento que indica la serie de pasos y decisiones que deben tomarse para la solución de un problema. Un algoritmo opera sobre varias clases de estructuras. En los primeros años de formación en la escuela, se aprenden algoritmos para realizar las cuatro operaciones básicas de la aritmética: suma, resta, multiplicación y división, que luego son generalizadas, mediante el álgebra, para expresiones algebraicas en los estudios de bachillerato.

La mente procesa información. En el *modelo computacional representacional de la mente, MCRM,* se adopta la hipótesis según la cual en la mente existen representaciones mentales análogas a estructuras de datos y procesos computacionales semejantes a los algoritmos que usan las computadoras: *representaciones mentales más procesos computacionales producen el pensamiento*.

La analogía entre la mente y la computadora ha sido guía importante en los estudios sobre el funcionamiento de la mente. En tales estudios, se presentó un punto de inflexión cuando se introdujo otro elemento importante: el *cerebro.* Desde el conexionismo se propusieron ideas novedosas sobre la representación y los procesos computacionales, basadas en las neuronas y sus conexiones como modelos de estructuras de datos, y del estímulo de las células nerviosas y la diseminación de la actividad neuronal como modelos de algoritmos.

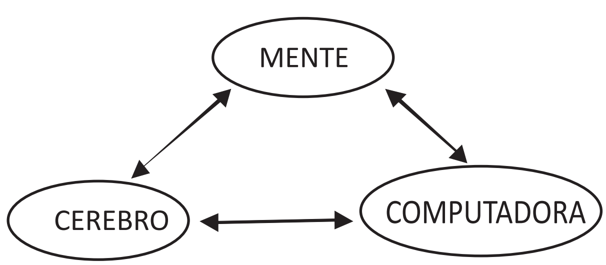

Figura 1. Relación mente, cerebro y computadora

Así, el MCRM derivó hacia una compleja analogía tripartita que vincula la mente, el cerebro y la computadora, como se aprecia en la Figura 1. Los tres componentes por separado, cerebro, mente y computadora, le sirven a los investigadores de la mente para sugerir nuevas ideas referidas a los otros dos elementos. Existen diversos modelos computacionales de la mente, debido a que las distintas clases de computadoras y de lenguajes de programación producen modelos distintos de cómo podría funcionar la mente. Las computadoras convencionales tienen procesadores en serie, es decir, realizan tareas computacionales una a la vez, pero existen computadoras que, lo mismo que el cerebro, procesan la información en paralelo, siendo capaces de realizar varias tareas computacionales a la vez. El MCRM no supone que la mente y la computadora procesan de igual forma la correspondiente información. Es simplemente una analogía.

Aunque lo discutido hasta aquí basta para los propósitos expositivos del artículo, es necesario decir que el MCRM podría ser incorrecto debido a que no explica satisfactoriamente algunas cuestiones fundamentales referentes a la mente. Existen al menos siete puntos importantes que actúan como objeciones fundamentales al MCRM (Thagard, 2006):

1. *El cerebro.* El MCRM no tiene en cuenta cómo el cerebro realiza las operaciones del pensamiento.
2. *Las emociones.* El MCRM no incluye el papel de las emociones en el pensamiento.
3. *La conciencia.* El MCRM no se ocupa de la importancia de la conciencia en el pensamiento.
4. *El cuerpo.* El MCRM se desatiende del aporte del cuerpo al pensamiento y a la acción.
5. *El mundo.* El MCRM no considera la influencia del entorno en el pensamiento.
6. *Los sistemas dinámicos.* La mente no es un sistema computacional sino dinámico.
7. *La sociedad.* El MCRM no tiene en cuenta el hecho de que el pensamiento humano es social por naturaleza.

A pesar de las objeciones precedentes, el MCRM es el mejor a nivel teórico y experimental entre todos los enfoques del estudio de la mente que se han desarrollado hasta el presente (Friedenberg & Silverman, 2006), y gran parte de su éxito se debe al hecho de que emplea una poderosa analogía del campo de la computación.

Las representaciones

2.1 Introducción.

Como se mencionó con anterioridad, las representaciones son fundamentales para el MCRM. Pero, qué es una *representación?* Una representación es un símbolo o conjunto de símbolos que puede ser interpretado por la mente o por una computadora, y de cuya interpretación emerge un significado. Antes de listar las características de una representación, es de utilidad describir brevemente cuatro categorías de representación. Un *concepto* hace referencia a una sola entidad o grupo de entidades. Las palabras simples son buenos ejemplos de conceptos. La palabra "gato" hace referencia a un tipo específico de animal cuadrúpedo. Las *proposiciones* son enunciados acerca del mundo y pueden se ilustradas con sentencias. La sentencia "mi gato es de color blanco" es una proposición que está hecha de conceptos. Las *reglas* son otra forma de representación que puede especificar las relaciones entre proposiciones. Por ejemplo, la regla "si conduzco un automóvil, debo usar cinturón de seguridad", hace la segunda proposición dependiente de la primera. También existen representaciones *análogas.* Una analogía nos ayuda a realizar comparaciones entre dos situaciones semejantes.

Las representaciones poseen cuatro características fundamentales (Hartshorne, Weiss & Burks, 1931-1958). Primera, "el portador de la representación" tal como un ser humano o una computadora, debe comprender la representación. Segunda, una representación debe tener un contenido- significando ello que representa uno o más objetos. La cosa o las cosas del mundo externo a que hace referencia la representación se denominan *referentes.* Tercera, una representación también debe estar "puesta a tierra". Esto es, debe existir algún medio mediante el cual la representación y su referente estén relacionados. Cuarta, una representación debe ser interpretable por algún intérprete, bien sea por el portador de la representación o por alguien más.

El hecho de que una representación haga referencia a alguna cosa, significa que ella es *simbólica.* Todos estamos familiarizados con símbolos. Conocemos por ejemplo que el símbolo “$” es usado para representar dinero. El símbolo por si mismo no es el dinero real, pero en vez es un substituto que se refiere su referente, el cual es el dinero real. En el caso de la representación mental, decimos que existe alguna entidad simbólica “en la mente” que representa el dinero real. Las representaciones mentales pueden significar diferentes tipos de cosas y no están limitadas a ideas conceptuales simples como “dinero”. La investigación sugiere que existen representaciones mentales complejas como las reglas, por ejemplo, conocer como se maneja un carro, y las analogías, las cuales pueden habilitarnos para resolver cierto tipo de problemas o notar similaridades.

Las representaciones mentales humanas, especialmente las lingüísticas, son denominadas *semánticas;* lo que es lo mismo decir que tienen significado. Exactamente qué constituye el significado y cómo una representación viene a ser significante, son temas de debate. De acuerdo a un punto de vista, el significado de la representación se deriva de la relación entre la representación y lo que ella representa. El término que describe tal relación es *intencionalidad.* La intencionalidad significa “dirigido hacia un objeto”. Los estados y eventos mentales son intencionales. Ellos se refieren a una cosa o cosas del mundo. Si Ud. piensa en su hermano, entonces el pensamiento acerca de su hermano está dirigido hacia él, y no hacia su hermana, una nube o a algún otro objeto.

Se considera que la intencionalidad tiene al menos dos propiedades. La primera es *isomorfismo,* o similaridad de estructura entre la representación y su referente. Esta similaridad significa que uno puede proyectar diferentes aspectos de una representación sobre su referente. Las imágenes visuales análogas, discutidas posteriormente, son buenos ejemplos de esta propiedad. Esto es porque se cree que ellas preservan las características espaciales del referente. Una imagen visual de un barco crucero, por ejemplo, podría tener una extensión horizontal más grande que la vertical, ya que tales barcos son mas largos que altos. El investigador Stephen Kosslyn ha mostrado que toma más tiempo explorar una imagen visual a través de una dimensión donde las distancias entre puntos en un objeto son más grandes y relativamente menos tiempo a través de una dimensión donde tales distancias son más cortas. La sección sobre imágenes visuales contiene más sobre métodos y resultados de este experimento y otros que demuestran las características isomórficas de imágenes.

Una segunda característica de la intencionalidad tiene que ver con la relación entre entradas y salidas al mundo. Una representación intencional debe ser causada por su referente o por cosas relacionadas con él. Consecuentemente, la activación (i.e., pensando en ella) debe causar comportamientos o acciones que están relacionadas con el referente. Por ejemplo, si su amiga María le habló a Ud. acerca de un crucero que tomó por el Caribe el último diciembre, una imagen de un barco crucero probablemente viene a su mente. Esto podría causar que Ud. le pregunte a ella si la comida abordo fue buena. La mención de María del crucero fue el estímulo de entrada que activó la representación interna de un barco en su mente. Una vez que la imagen fue activada, ella causó el comportamiento de preguntar acerca de la comida. Esta relación entre entradas y salidas es conocida como una *relación causal apropiada.*

2.2 Representaciones digitales.

En una *representación digital*, algunas veces también conocida como representación simbólica, la información está codificada en un conjunto discreto de valores. Por ejemplo, un reloj digital representa el tiempo en forma discreta. Existen diferentes ventajas de las representaciones digitales. Ellas especifican valores exactamente. Los símbolos empleados en las representaciones digitales, tales como números, pueden ser operados en conjuntos más generales de procesos que las estructuras análogas. En matemáticas, un amplio rango de operaciones tales suma, división y elevar al cuadrado pueden ser aplicados a las representaciones digitales numéricas. Los resultados de tales operaciones son nuevos números que pueden ser transformados mediante operaciones adicionales.

El lenguaje puede servir como un ejemplo de una representación mental digital y de hecho los conceptos pueden verse como el sistema de representación simbólica humana más comúnmente usado. Los elementos básicos del lenguaje escrito son la letras, que son símbolos discretos que se combinan de acuerdo a un conjunto de reglas. Las combinaciones o palabras tienen significado y son combinadas en unidades de más alto orden, las sentencias, que también tienen contenido semántico. Las reglas mediante las cuales las palabras son combinadas y transformadas en lenguaje se denomina *sintaxis*. La sintaxis constituye el conjunto de operaciones permisible sobre las palabras.

2.3 Representaciones análogas.

Las representaciones *análogas*, en contraste con las discretas, codifican la información en forma continua. La información en un sistema análogo puede teóricamente tomar cualquier valor no limitado por la *resolución*. La resolución se refiere a la cantidad de detalle contenida en una representación análoga. Las representaciones con alta resolución tienen correspondientemente más información. Un reloj análogo representa el tiempo a través del movimiento de sus manecillas. Las posiciones de las manecillas sobre el dial indica el tiempo. Además de habilidad para representar gran cantidad de valores, las representaciones análogas tienen la ventaja de proveer soluciones simples y directas a cierto tipo de problemas. Las representaciones análogas tienen un alto margen de error computacional y debido al menor número de operaciones que pueden realizarse con ellas, tienen limitado uso en resolución de problemas.

Las imágenes visuales son el mejor ejemplo de representaciones mentales análogas. Los investigadores en sicología cognitiva han conducido experimentos que sugieren fuertemente que representamos información visual en forma análoga. Las imágenes capturan muchas de las mismas propiedades que sus referentes, tales como distancias entre conjuntos de puntos correspondientes. Los tipos de transformaciones que pueden realizarse con imágenes son del mismo tipo de los cambios que soportan los objetos en el mundo externo observable. Tales transformaciones incluyen rotaciones, translaciones y reflexiones.

2.4 La hipótesis de la codificación dual.

El uso de representaciones simbólicas/digitales y de imágenes, se denomina colectivamente como la *hipótesis de codificación dual*. Muchas ideas pueden ser representadas en cualquiera de las dos formas, que son intercambiables. Lo anterior es cierto para conceptos concretos y específicos tales como "gato", para el cual formamos una imagen visual o una representación verbal. Sin embargo existen conceptos para los cuales un código simbólico es más apropiado. Tómese la idea de "justicia". Esta es una idea abstracta, y aunque podríamos asociarle una imagen tal como "el edificio de la corte de justicia", esta sería ambigua, pues no existiría una única imagen de identificación. La evidencia que soporta la teoría de la codificación dual proviene de estudios en los cuales un mejor recuerdo es demostrado para palabras que representan conceptos concretos cuando se compara con palabras que representan conceptos abstractos (Paivio, 1971). La razón para esto, según Paivio, es que dos códigos son mejores que uno. Suponer que en un experimento sobre memoria se le presenta a un sujeto la palabra "gato" y forma dos códigos para recordarla. Si el sujeto ha olvidado el último código, el sujeto aún podría recordar el otro. En este caso, la imagen del "gato" podría venir a la mente aún si su representación simbólica de la palabra se haya debilitado.

2.5 Representaciones proposicionales.

Las proposiciones son la tercera de la mayores categorías de representación, en adición a los códigos simbólicos y de imágenes (Pylyshyn, 1973). De acuerdo con la *hipótesis proposicional*, las representaciones mentales tomarán la forma de sentencias abstractas semejante a las estructuras. Las proposiciones son buenas para capturar las relaciones entre conceptos. Por ejemplo, la sentencia "Pedro miró a María", especifica un tipo de relación entre Pedro y María, y esa relación puede ser trasladada a código simbólico verbal, como en la forma actual de una sentencia, o un código de imagen.

Se cree que las proposiciones están en un formato mucho más profundo que no es visual ni verbal. Tal formato puede describirse de mejor manera como una relación lógica entre sus elementos constituyentes y es denotado mediante el *cálculo de predicados*. Un cálculo de predicados es un sistema general de lógica que expresa con exactitud una gran variedad de aserciones y modos de razonamiento. Por ejemplo, la sentencia "Pedro miró a María" puede ser representada por un cálculo de predicados tal como:

[Relación entre elementos]([Elemento sujeto] [Elemento objeto]),

donde "Pedro" es el elemento sujeto, "María" el elemento objeto y "mirar" es la relación entre elementos. Lo que es bueno de un cálculo de predicados es que captura la estructura lógica esencial de una idea compleja, independientemente de sus elementos actuales. Cualquier número de sujetos, objetos y relaciones pueden ser insertados en un formato abstracto de una proposición. De este modo se cree que una proposición captura el significado básico de una idea compleja. Cuando este significado básico se traduce en un código simbólico o visual, puede ser expresado en una variedad de formas. Por ejemplo, las sentencias "Pedro miró a María" y "María fue mirada por Pedro", son dos códigos alternativos para la misma proposición. De igual manera, uno podría formar diferentes imágenes visuales que conducen a la misma proposición.

Aunque el cálculo de predicados es una forma elegante de expresar una proposición, esto no significa que las proposiciones actualmente asuman este formato en nuestros cerebros. En efecto, no es claro exactamente cómo las proposiciones son mentalmente entendidas. Sin embargo, ellas son útiles constructos hipotéticos, ya que las proposiciones son concisas y pueden virtualmente especificar todas las posibles relaciones entre conceptos.

Como resumen, puede decirse que las representaciones mentales son poderosas. Ellas permiten la creación de un mundo interior sobre el cual podemos pensar. Los subproductos de los pensamientos nos llevan a entender y a interactuar exitosamente con el medio ambiente. Más que vagar o rodar por el mundo cometiendo errores o tomando riesgos, podemos usar las representaciones para planear y realizar acciones apropiadas. Además, la implementación formal de las representaciones en un conjunto de símbolos, como cuando contemplamos en imágenes mentales o lenguaje, permite comunicar nuestros pensamientos a otros. Esto a su turno da lugar a formas más complejas y adaptativas de cooperación social.

La computación

3.1 Introducción.

Las representaciones son la primera componente clave del punto de vista del MCRM sobre los procesos mentales. Las representaciones son de escaso valor a menos que pueda hacerse algo con ellas. Teniendo el concepto de dinero no podemos hacer mucho por nosotros a menos que conozcamos cómo calcular una propina o cómo calcular correctamente una devuelta para alguien. Desde el punto de vista del MCRM, la mente realiza *cómputos* sobre las representaciones. Es por lo tanto importante entender cómo y por qué tales mecanismos mentales operan.

¿Qué suerte de operaciones realiza la mente? Si deseáramos obtener una lista detallada de tales operaciones, tal lista podría ser interminable. Piénsese en la habilidad matemática. Si existiera una operación mental separada para cada etapa de un proceso matemático, se podría decir que la mente suma, resta, divide y así sucesivamente. De igual forma con el lenguaje se podría decir que existen operaciones separadas para hacer un plural, poner un verbo en tiempo pasado, y así sucesivamente. Es mejor pensar de las operaciones mentales como inmersas en amplias *categorías*. Las categorías pueden ser definidas por el tipo de operación que es realizada o por el tipo de información sobre la que se actúa. Una lista incompleta de tales categorías podría incluir la percepción, sensación, atención, memoria, lenguaje, razonamiento matemático, razonamiento lógico, toma de decisiones y resolución de problemas. Muchas de las anteriores categorías pueden incorporar virtualmente idénticos o similares subprocesos, por ejemplo escaneo, igualación, ordenamiento y recuperación. Como ejemplo, se muestra a continuación el tipo de procesos mentales involucrados en la solución de un simple problema de adición.

$$\begin{array}{r} 29 \\ \underline{+\ 57} \\ 86 \end{array}$$

Las etapas computacionales son:

9+7=16 Sumar la columna derecha
6 Almacenar seis
1 Llevar uno
2+5=7 Sumar la columna izquierda
7+1=8 Sumar uno
8 Almacenar ocho
86 Almacenar el resultado

3.2 Categorías de la representación mental

Se ha dicho que existen tres clases amplias de representación mental -digitales, análogas y proposicionales- cada una teniendo sus propias características, y se dieron ejemplos de ellas. Sin embargo, la historia de la investigación en ciencias cognitivas sugiere que también existen numerosas formas de representación mental. Thagard (2006) propone cuatro: Estas son: conceptos, proposiciones, reglas y analogías.

El *concepto* es quizás la forma más básica de representación mental. Un concepto es una idea que representa cosas que hemos agrupado. El concepto "silla" no se refiere a una silla en particular, sino que es más general que eso. Él se refiere a todas las posibles sillas sin importar su tamaño, color o forma. Los conceptos no necesitan referirse a cosas concretas. Ellos pueden representar ideas abstractas, por ejemplo "justicia" o "amor". Los conceptos pueden relacionarse en forma jerárquica, donde un concepto a un nivel de organización representa todos los miembros de la clase justo bajo él. "Perros cazadores" pertenece a la categoría perros, que su vez pertenece a la categoría animal.

Una *proposición* es un enunciado o aserción típicamente puesto en forma de una sentencia simple. Una característica esencial de una proposición es que puede probarse que es verdadera o falsa. Por ejemplo el enunciado "La Luna está hecha de queso" es gramaticalmente correcta y puede representar una creencia para algunas personas, pero es un enunciado falso. Podemos aplicar las leyes de la lógica a las proposiciones para determinar la validez de tales proposiciones. Otro ejemplo de proposición, tomado del campo de las matemáticas, es "12 es un número primo". Usando el concepto de número primo, se prueba que tal proposición es falsa. Una inferencia lógica se denomina silogismo. Un silogismo consta de tres proposiciones. Las dos primeras proposiciones son las premisas y la última es la conclusión. Ejemplo:

Todos los hombres aman el fútbol
Juan es un hombre
Juan ama el fútbol

Obviamente la conclusión puede ser falsa si una de las dos premisas lo es. Si no es verdad que todos los hombres aman el fútbol, entonces puede no ser verdad que Juan ama el fútbol, aún si Juan es un hombre. Si Juan no es un hombre, entonces él puede o no puede amar el fútbol, asumiendo que todos los hombres amen el fútbol. El razonamiento logístico de ésta clase es lo mismo que razonamiento deductivo ya mencionado.

Debe notarse que las proposiciones son representaciones que incorporan conceptos. La proposición "Todos los hombres aman el fútbol" incorpora los conceptos "hombres" y "fútbol". Las proposiciones son representaciones más sofisticadas que los conceptos ya que ellas expresan relaciones, algunas veces muy complejas, entre conceptos. Las reglas de la lógica son consideradas como procesos computacionales que pueden ser aplicadas a las proposiciones en orden a determinar su validez. Sin embargo, las relaciones lógicas entre proposiciones pueden ser consideradas como una clase separada de representaciones.

La lógica no es el único sistema para realizar operaciones sobre proposiciones. Las reglas también lo hacen. Una *regla de producción* es un enunciado condicional de la forma "Si x, entonces y". La parte "si" de la regla se denomina la *condición*. La parte "entonces" se denomina la *acción*. Si la proposición contenida en la condición (x) es verdadera, entonces la acción especificada por la segunda proposición (y) es llevada a cabo, de acuerdo a la regla. Las siguientes reglas nos ayudan a conducir carro:

Si la luz es roja, entonces pise los frenos
Si la luz es verde, entonces pise el acelerador

En la primera regla, las dos proposiciones son "la luz roja" y "pise los frenos". También se pueden formar reglas más complejas ligando las proposiciones con las sentencias "*y*" y "*o*":

Si la luz es roja o la luz es amarilla, entonces pise los frenos
Si la luz es verde y nadie está en la cebra, pise el acelerador

La *"o"* que liga las dos primeras proposiciones en la primera parte de la regla, especifica que si cualquiera de las proposiciones es verdadera, la acción se lleva a cabo. Si un "*y*" liga las dos proposiciones, la regla especifica que ambas deben ser verdaderas antes de que la acción sea ejecutada.

El ejemplo de proposición respecto de números primos dada con anterioridad, se prueba que es falsa recurriendo a la siguiente regla: "Si un número es primo, entonces solamente es divisible por si mismo y por la unidad". Dado que 12 también es divisible por 2, entonces 12 no es un número primo.

Las reglas traen a discusión la cuestión de lo que el conocimiento realmente es. Usualmente pensamos del conocimiento como factual. Una proposición como "El confite es dulce", si es validada, proporciona una información factual. La proposición es entonces un ejemplo de conocimiento declarativo. El *conocimiento declarativo* se usa para representar hechos. Nos dice qué es, y es demostrado por la comunicación verbal. El *conocimiento procedimental,* de otra parte, representa habilidad (destreza). Nos dice cómo hacer algo y demostrado por la acción. Si decimos que la Segunda Guerra Mundial se libró durante el período 1939-1945, hemos demostrado un hecho aprendido en la clase de Historia. Si escribimos un reporte para nuestros estudios doctorales, hemos demostrado que poseemos una habilidad. Es por lo tanto muy importante que las sentencias de procesamiento de información tengan alguna forma de representar acciones si ellos ayudan a un organismo o máquina. Las reglas son una forma de conocimiento procedimental.

Otro tipo específico de representación mental es la *analogía*, aunque como se resalta más adelante, la analogía puede clasificarse como una forma de razonamiento lógico. El pensamiento analógico implica la aplicación de la familiaridad con una situación antigua a una nueva situación. Suponer que Ud. nunca ha montado en tren, pero ha montado en buses muchas veces. Ud. podría usar su conocimiento de montar en bus para imaginarse como montar en tren. Aplicando un conocimiento que Ud. ya tiene y que es relevante para ambas situaciones, podría capacitarlo para llevar a cabo la actual. Basado en su experiencia anterior, Ud. podría conocer que lo primero por hacer es determinar un horario, quizás decida entre un servicio local o uno expreso, comprar un tiquete, esperar en la línea, pasar a bordo, colocar su equipaje, hallar un asiento, y así sucesivamente.

Si un estudiante ha adquirido experiencia en el cálculo del área de triángulos rectángulos, puede usar ese conocimiento para calcular el área de un triángulo isósceles, aunque previamente no tenga experiencia en calcular el área de tales triángulos. Puede dividir el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos. Las analogías son un recurso en la solución de problemas de tipo matemático.

Las analogías son una forma útil de representación porque ellas nos permiten generalizar nuestro aprendizaje. No toda situación en la vida es enteramente nueva. Podemos aplicar lo que realmente hemos aprendido en una situación similar sin tener que imaginarnos todo de nuevo. Varios modelos de razonamiento analógico han sido propuestos (Forbus, Genter & Law, 1995; Holyoak & Thagard, 1995).

Modelo computacional-representacional de la matemática (MCRMAT)

4.1 La Matemática.

En un trabajo anterior (Toro, 2007) se analizó en detalle lo que matemática ha significado a lo largo del tiempo, desde los antiguos griegos hasta nuestros días. En particular, la abstracción y la idea de estructura domina por completo la matemática moderna. El matemático examina estructuras abstractas: numéricas, de formas, de movimiento y de cambio, de comportamiento; las estructuras con las que se repiten los sucesos aleatorios, las de simetría, las de regularidad; las estructuras del razonamiento; las estructuras fundamentales del universo. ¿De dónde provienen estas estructuras? Pueden ser imaginarias o reales, visuales o mentales, estáticas o dinámicas, o puramente utilitarias. Su origen puede residir en el mundo real que nos rodea, o en las profundidades del espacio y del tiempo, o pueden residir en la actividad de la mente humana. La idea de estructura conduce a la definición moderna de la matemática, comúnmente aceptada hoy día por los matemáticos: *La matemática es la ciencia de las estructuras.*

4.2 Representaciones y enseñanza de la matemática (EM).

Las representaciones ocupan hoy día un lugar central en la enseñanza de las matemáticas. Se le han dedicado reuniones científicas específicas, monografías, conferencias y artículos de revistas (Janvier, 1987; Goldin, 1998; Godino y Batanero, 1998; Cobb, Yackel y McClain, 2000; Golding, 2002; Hitt, 2002; Godino, 2002), lo que resalta la importancia de las representaciones para la enseñanza de la matemática, y al mismo tiempo su complejidad. La razón de este interés se deber encontrar en el hecho de que hablar de representación, como ya se anotó con anterioridad, equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión, modelización. Sin duda, estas nociones constituyen el núcleo central, no sólo de la matemática, sino también de la epistemología, psicología y demás ciencias y tecnologías que se ocupan de la cognición humana, su naturaleza, origen y desarrollo. Esta diversidad de disciplinas interesadas por la representación es la razón de la diversidad de enfoques y maneras de concebirla.

4.3 Carácter computacional-representacional de la matemática.

Otra característica de la matemática es su alto nivel *representacional* y de *abstracción.*

Un ejemplo de la anterior característica está contenido en la definición de función de una variable real de valor real. Desde el punto de vista conjuntista, la definición de función puede enunciarse como sigue: *sean A y B dos conjuntos de números reales. Una función de A en B es una regla que asigna a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B*. Para hacer operativa la anterior definición es necesario usar símbolos (representaciones) tanto para la función como para el valor que ella adquiere en un determinado elemento del conjunto A, valor que pertenecerá al conjunto B. A tal efecto, denótese por la regla de asignación, por un elemento cualquiera del conjunto A, y por el elemento de B que se le asigna a mediante la regla . La notación:

$$f : A \quad B,$$

indica que la función se define entre los conjuntos A y B. La notación:

$$y \quad f(x),$$

dice que el valor que toma la función f en el elemento x de A es el elemento y del conjunto B. En la terminología matemática, el conjunto A se denomina *dominio* de f, el conjunto de los valores que toma f en B se denomina *ámbito* de f que puede o no ser todo B. El símbolo x se denomina *variable independiente, y* y se denomina *variable dependiente.* Como un ejemplo concreto de función se tiene la regla f "elevar al cuadrado". Sea A el conjunto de los números reales R. Cuando se aplica tal regla a cualquier elemento del conjunto se tiene

$$f(x) \quad x^2, \qquad x \quad R.$$

De nuevo se tiene un número real, que se denota por y. Luego, puede escribirse

$$y \quad x^2$$

Dado que el cuadrado de un número real es siempre no negativo, el ámbito de la función ejemplificada es el conjunto de los números reales no negativos, característica que puede enunciarse como:

$$f(x) \quad 0, \quad x \quad R.$$

Conociendo la regla de asignación, es decir f se pueden calcular algunos valores de y y producir una tabla de valores. Si se tiene un sistema de coordenadas rectangulares, puede ubicarse cada par (x,y) de la tabla en tal sistema, unirlos mediante una línea continua, obteniéndose así una imagen (representación) de la función, como se ilustra en la Figura 2.

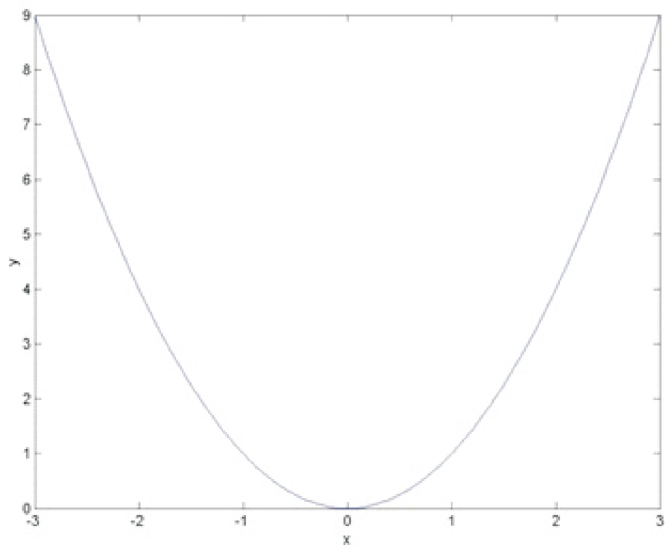

Figura 2. Gráfica de la función $y \;\; x^2$

Las gráficas (imágenes) desempeñan un papel muy importante en todo el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, basta inspeccionar un texto moderno de cálculo (Larson et al., 2006), debido a que ellas nos permiten comprender muchos conceptos teóricos, y en algunos casos, como en el concepto de vector, son imprescindibles para su comprensión y sus aplicaciones de orden práctico, como por ejemplo a la física,.

Suponer ahora que se tiene dos funciones $g \; f$, definidas sobre el conjunto de los números reales :R

$$f, g : R \qquad R$$

Como al evaluarlas en cualquier número Rx , los resultados son los dos números reales $f(x), g(x)$; con tales números se pueden realizar las cuatro operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división. Por ejemplo, la suma de las dos anteriores funciones se denota por $f \quad g$ que se define como:

$$(f \quad g)(x) \quad f(x) \quad g(x)$$

Se obtiene así una nueva función, sumando los valores de cada una de ellas. Las demás operaciones se definen de forma similar. De suerte que se han combinado (computado) dos representaciones para obtener una nueva representación, usando para ello una regla precisa.

Dado que la suma y el producto de dos funciones de una variable real de valor real es de nuevo un número real, tales operaciones poseen las mismas propiedades que la suma y multiplicación ordinaria de números reales. El conjunto de todas las funciones de una variable real de valor real, definidas sobre el conjunto de los números reales, tales como las llamadas funciones continuas, forman, respecto de la suma y multiplicación de funciones por números reales, una *estructura abstracta*, que se denomina *espacio vectorial*.

La aritmética, el álgebra, la geometría euclidiana, la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral (en una y varias variables), las ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales), y la estadística, por mencionar solamente algunas áreas de la matemática, hacen uso de todo los tipos de representaciones para poder explicarse. Las áreas mencionadas, excepto la aritmética, hacen parte de la formación matemática universitaria que hoy día se imparte a los estudiantes de ingeniería.

Se recuerda, que las matemáticas se usan para modelar y resolver problemas del mundo real, pero si antes no se tiene una conceptualización de lo que las matemáticas mismas son, entonces se corre el peligro de aplicarlas mal, y por ejemplo, realizar diseños no adecuados a necesidades de orden práctico.

Finalmente, un adecuado equilibrio entre lo abstracto de las matemáticas y sus aplicaciones en contextos dados, representa un avance significativo en la enseñanza de tal ciencia. Esto es de vital importancia cuando se enseñan matemáticas a los estudiantes de ingeniería. El resultado final de la enseñanza de las matemáticas no puede única y exclusivamente valorarse por las destrezas que adquieren los estudiantes para manipular expresiones simbólicas. Es posible que un estudiante, después de enseñarle el concepto de integral definida, pueda calcular algunas integrales de tal tipo, pero si no es capaz de explicar el concepto mismo de integral definida, significa que algo anda mal en el proceso de enseñanza- aprendizaje de tal concepto; lo que es indicativo de que el estudiante pueda tener dificultades de tipo cognitivo para entender toda la simbología y el carácter abstracto que hay detrás del concepto de integral definida.

4.4 El MCRMAT.

El *modelo computacional representacional de la matemática,* MCRMAT, considera que desde el punto de vista interno de la matemática como ciencia, *la matemática realiza cómputos con representaciones, cuyo objetivo final es la creación de estructuras abstractas.* Puede pensarse del MCRMAT como un instrumento teórico que capta lo esencial de la matemática: su carácter *abstracto, representacional y de estructura.* Pero además es un instrumento teórico para la enseñanza de las matemáticas, como se explica a continuación.

4.5 Una relación tripartita.

La Figura 3 muestra las relaciones entre el MCRM, la enseñanza de la matemática (EM) y el MCRMAT.

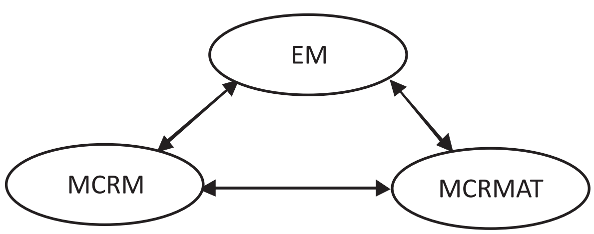

Figura 3: Relaciones entre MCRM, EM y MCRMAT

El MCRMAT no debe inducir a pensar que las matemáticas están referidas a un conjunto de representaciones (expresiones simbólicas) desprovistas de conexión con cualquier fragmento del conocimiento de los estudiantes a quienes se les enseñan matemáticas. Como consecuencia natural de la anterior idea es que el conocimiento matemático se reduce a un conjunto de destrezas para manipular representaciones, que los estudiantes en ocasiones tienen dificultades para entenderlas (un problema cognitivo), que a su vez, permiten la transformación de una representación a otra. En realidad, esta es una visión demasiado pobre de las matemáticas, y es uno de los problemas que se derivan de la enseñanza tradicional de tal ciencia, y que por supuesto debe ser modificada a través del tiempo mediante nuevos procesos educativos. Lo anterior es de vital importancia cuando se enseña matemática a los estudiantes de ingeniería. El MCRMAT tampoco es un regreso, a ultranza, a la enseñanza de la abstracción pura en matemáticas, semejante a la enseñanza de las famosas matemáticas modernas. *Las matemáticas se enseñan para que los estudiantes las entiendan, no simplemente para acumular conocimiento matemático, de tal manera que ellos reúnan e integren tal tipo de conocimiento en una concepción general que le dé sentido y valore el conocimiento especializado.* Para hacer matemáticas, entenderlas y consumirlas, es necesario cambiar en forma radical la forma como actualmente las matemáticas se enseñan.

4.6 El MCRMAT y el aula de clase.

En una prueba respecto de operaciones matriciales, el autor propuso la solución del siguiente ejercicio (Grossman, 2008, p. 74):

Sean $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ números reales dados tales que $a_{11}a_{22} \quad a_{21}a_{12} \quad 0$

Encuentre los números $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ *tales que*

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \quad \begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

Como todo profesor de álgebra lineal sabe, la respuesta correcta del ejercicio planteado es:

$$\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \quad \frac{1}{a_{11}a_{22} \quad a_{21}a_{12}} \quad \begin{array}{cc} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{array}$$

Algunas de las soluciones presentadas por los estudiantes consistieron en darle valores específicos a los números $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ de forma que cumplieran la condición dada y luego hallaron los valores de $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ .Un estudiante expresó que se acordó que en el bachillerato, algo inusual, el profesor le había dado la fórmula para calcular la inversa de una matriz y escribió la respuesta correcta. El concepto de inversa, para la época de la prueba aún no se había enseñado y por lo demás el estudiante estaba cursando por primera vez la asignatura. Es algo meritorio que el estudiante en cuestión haya recordado la fórmula para calcular la inversa de una matriz de orden 2, y relacionado, de alguna manera, la solución del ejercicio con el cálculo de una inversa. Desde el punto de vista de los estudiantes, el ejercicio se resolvió satisfactoriamente, pero no es la solución correcta desde el punto de vista matemático. ¿Por qué? El ejercicio está propuesto para que se halle la solución general, no una solución particular. Las respuestas dadas por los estudiantes son particulares, lo que evidencia un problema cognitivo, pues no diferencian lo *particular* de lo *general*. La situación comentada también se presenta cuando se le pide a los estudiantes que demuestren, por ejemplo, que la suma de matrices es conmutativa: dan ejemplos de dos matrices específicas, las suman en un orden y luego en el otro, evidentemente ambos resultados son iguales, y para ellos tal proceso constituye la demostración. Las demostraciones son parte importante de la enseñanza de las matemáticas por que contribuyen al desarrollo de operaciones mentales generales tales como concretar, abstraer, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar, generalizar; las que se ponen de manifiesto en cada una de las acciones que conforman desarrollo de la habilidad de demostrar (Ortiz & Jiménez, 2004).

Al comentar que las operaciones de límite, derivación e integración también pueden aplicarse a funciones de una variable compleja de valor complejo, incidentalmente se preguntó a los estudiantes que cuál era el significado del símbolo:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Algunos contestaron el símbolo representa la integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado a, b Otros, que representa el área bajo la curva de la función en el intervalo dado, lo cual no siempre es cierto. No hubo ninguna respuesta al indagar sobre el concepto de integral definida. Debiera ser obvio, pero no lo es, que una vez enseñado el concepto de integral definida, el símbolo que la representa sirviera para recobrar tal concepto. Aquí la dificultad radica que la prioridad, cuando se enseña cálculo integral, es de orden computacional: se dedica el curso a métodos de integración y a algunas aplicaciones de la integral, y se pierden de vista los conceptos fundamentales que sustentan al de integral indefinida y definida. Al proceder de tal forma, es improbable que un estudiante recobre el concepto de integral definida una vez tenga ante sí el símbolo con que se lo representa. Situaciones como las anteriores son comunes en las clases de matemáticas y se evidencian en las evaluaciones.

El autor ha utilizado el MCRMAT para estructurar la enseñanza de ciertos tópicos, a manera de diseño experimental, en algebra lineal, y variable compleja. La comprensión de los conceptos subyacentes a las representaciones mejoró notablemente, cuando se compararon con los mismos tópicos enseñados en cursos anteriores siguiendo el método tradicional. Por supuesto, los resultados son parciales

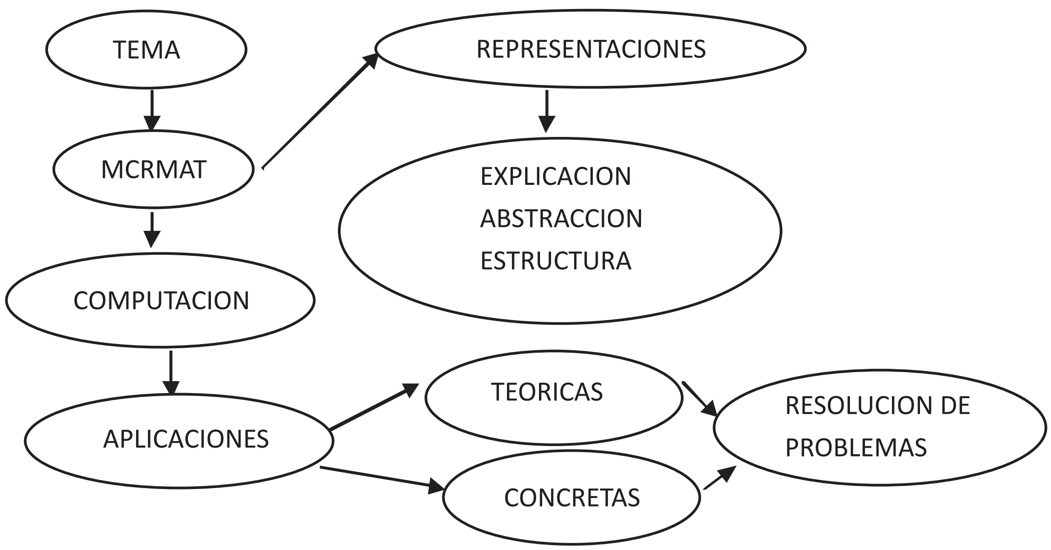

Figura 4: El MCRMAT y la clase de matemáticas

En la Figura 4 se presenta un esquema general usado por el autor en la preparación de una clase con el MCRMAT. A los estudiantes se les hizo una corta exposición sobre teoría de representaciones; se les explicó el MCRM, y se hizo énfasis en el carácter representacional de la matemática, apelando a su definición moderna, llegando de manera natural al MCRMAT.

El esquema de la Figura 4, y como su consecuencia lógica, es el usado para preparar las evaluaciones y retroalimentar todo el proceso de enseñanza aprendizaje. Lo anterior, puede ayudar en el descubrimiento de las dificultades cognitivas que puedan tener los estudiantes respecto de la comprensión y utilización de las representaciones usadas cuando se enseña un tema particular de matemáticas.

El MCRMAT y uso de tecnologías de la información en la enseñanza de las matemáticas.

5.1 Introducción.

Se han escrito libros y artículos (Dorfler, 1993, Rabardel, 1995; Balacheff y Kaput, 1996; Moreno, 2001) sobre el tema del uso de tecnologías de la información en la enseñanza de las matemáticas.

En nuestro país (Ministerio de Educación Nacional, 2001) se han venido desarrollando proyectos de incorporación de calculadoras tales como la TI-89, TI-92 (en realidad deben llamarse minicomputadoras) y el sistema Cabri-Géomètre, en la enseñanza de las matemáticas.

En el Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad Autónoma de Manizales (UAM), se está desarrollando el proyecto "Incorporación de Nuevas Tecnologías a la Enseñanza de la Matemática" al interior del Grupo de Investigación "Física y Matemáticas con Énfasis en la Formación de Ingenieros" (Clasificación D de Colciencias). Como un producto de tal investigación, el autor, uno de los investigadores principales, escribió (Toro, 2009) un libro introductorio sobre el uso de Matlab. Actualmente está escribiendo un texto de cálculo integral mediado con Matlab como herramienta de cálculo numérico, gráfico y simbólico.

5.2 El MCRMAT y sistemas representacionales artificiales

Lenguajes de programación como *Matlab* y *Mathematica,* incorporan, además de sistemas de representación numérico y gráfico, un sistema representacional que permite realizar cómputos algebraicos. Esto significa, que además de realizar cálculo numérico y graficar ecuaciones, tales lenguajes permiten hacer cómputos simbólicos. Operaciones tales como factorización de polinomios, derivación e integración simbólica (en una, dos y tres dimensiones), simplificación de expresiones algebraicas y trigonométricas, cálculo simbólico de determinantes (orden dos y tres), operaciones con matrices simbólicas, descomposición en fracciones parciales, solución de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, por mencionar solamente unas pocas, son realizadas eficientemente en tales sistemas representacionales. Así, un tal sistema puede verse como un *sistema cognitivo artificial* inducido por el MCRMAT, pues revela, no solamente, el carácter computacional-representacional que tiene la matemática, sino su acción a través de medios artificiales. Es cognitiva, porque tales sistemas representacionales realizan actividades semejantes a las cognitivas de la mente (memoria, análisis, computaciones, toma de decisiones, entre otras) y artificiales, porque son llevadas a cabo por un agente externo a la mente, la computadora. Como consecuencia de lo anterior, la enseñanza de la matemática puede y debe ser mediada usando sistemas representacionales como los ya mencionados.

Hace treinta años, la *habilidad para* manejar una tabla de logaritmos o una de funciones trigonométricas, y usarlas para resolver problemas, por ejemplo en la solución de triángulos oblicuángulos, era considerada como *auténtico conocimiento de matemática pura.* Hoy día, usando Matlab, se puede generar una tabla de logaritmos naturales o decimales, de los primeros diez mil números naturales en cuestión de minutos. Lo mismo puede comentarse de una tabla de valores de la función seno o coseno para un intervalo dado de ángulos. De suerte que los sistemas representacionales artificiales han cambiado la forma como se aprecia lo que respecto a un tópico, se considera que ello es conocimiento matemático. Lo más importante, respecto a los logaritmos, es que un estudiante entiende su concepto, deduzca a partir de él sus principales propiedades, como también sea capaz de usarlas en diferentes contextos de aplicación: *que si es auténtico conocimiento matemático.* Los cálculos numéricos involucrados, pueden dejarse a una computadora o a una minicomputadora como la TI-92.

Algo similar sucede con las gráficas. Un estudiante de ingeniería debe ser capaz de graficar a lápiz y papel ciertas funciones sencillas. Sin embargo, en ocasiones, existen funciones cuyas gráficas son muy complicadas, y tal tarea deber ser dejada a un sistema computacional graficador. No es tarea fácil graficar, en coordenadas polares, con lápiz y papel, la función $r \quad 3\,sen(4 \quad)$ (rosa de ocho pétalos). Por lo demás, hoy día, es prácticamente imposible estudiar geometría diferencial sin el auxilio de graficadores y sistemas algebraicos de cómputo (Toro, 2005).

El uso de sistemas representacionales artificiales numéricos, gráficos y algebraicos, permiten estudiar una situación matemática dada desde cualquiera de los tres puntos de vista: numérico, gráfico o simbólico. Pero lo más importante, desde el punto de vista *cognitivo*, es que tal situación puede *estudiarse integradamente desde los tres puntos de vista*. La anterior integración abre la posibilidad de establecer nuevas relaciones entre los tres tipos de representación, y por lo tanto, emerge *una mayor elaboración conceptual de los objetos matemáticos involucrados en la situación bajo estudio*. Se concluye entonces que tales sistemas son aptos para la enseñanza de las matemáticas, y su uso para tal fin representa un punto de inflexión en la enseñanza de tal ciencia.

No debe pensarse de los instrumentos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas como *"simples prótesis para la acción"*. Tales instrumentos deben verse como reorganizadores de todo el funcionamiento cognitivo, y de hecho contribuye al rediseño de estrategias en la resolución de problemas y a la reconceptualización mediante la sustitución de un sistema de representación, como el mismo autor ha experimentado durante los años que lleva usando *Matlab* y *Mathematica* como instrumentos, no solamente para sus investigaciones, sino también para la enseñanza de la matemática, como los experimentos llevados a cabo en la enseñanza de algunos temas de variable compleja.

Finalmente, uno de los objetivos de nuestro grupo de investigación en la implementación de tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, es el de entender cómo se debe realizar tal implementación, debido que ante los sistemas de representación artificiales, solamente se tiene dos posibilidades: (i) entenderlos como herramientas de *amplificación*, (ii) entenderlos como herramientas de *reorganización* y pasar de la amplificación a la reorganización no es tarea fácil. De hecho se debe trabajar en el marco de un currículum ya establecido, pero la idea es que las innovaciones exitosas tendrán la capacidad de *"erosionar"* los currículos tradicionales. La comprensión que se alcance sobre el conocimiento producido con la mediación de las herramientas proporcionadas por las tecnologías de la información, se torna de vital importancia para la enseñanza de la matemática.

Finalmente, se debe puntualizar que si bien debe promoverse el uso de las tecnologías de la información en la enseñanza de la matemática, tal uso debe ser racional: *existen momentos preciso en los cuales tales tecnologías deben ser implementadas.*

Conclusiones

Algunas conclusiones que se desprenden del artículo son;

1. El MCRM es importante porque permite entender, desde el punto de vista abstracto, cómo la mente puede producir el pensamiento.

2. El MCRMAT emerge de la estructura interna de la matemática como ciencia.

3, El MCRMAT es un instrumento teórico que puede utilizarse para la enseñanza de la matemática. Es una herramienta conceptual que permite evidenciar problemas cognitivos que puedan presentar los estudiantes en el proceso de aprendizaje de tal ciencia.

4. El MCRMAT es una herramienta teórica que permite entender la necesidad actual de usar tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas, ya que existe una relación directa entre los sistemas cognitivos artificiales, la enseñanza de las matemáticas y el MCRMAT.

Bibliografía

BALACHEFF, N., KAPUT J. (1996). *Computer-Based Learning Enviroment in Mathematics.* En Bishop, A. J., et al. *International Handbook of Mathematical Education,* 469-501.

DAWSON, M. R. W. (1998). *Understanding cognitive science. Malden, MA: Blackwell.*

DORFLER, W. (1993). *Computer Use and Views of the Mind.* En Learning from Computers: Mathematics Education and Technology, Keitel, C. & Ruthven, K. (eds),. Springer Verlag, Nato Asi Series, 121.

COBB, P., YACKEL y MCCLAIN, K. (2000) (Eds.). *Symbolizing and communications in mathematics classrooms.* London: Lawrence Erbaum Associates

CHURCHLAND, P., S., KOCH, C., & SEJNOWSKI, T.J. (1990). What is computational neuroscience? In E. L. Schwartz (Ed.), *Computational neuroscience* (38- 45).

FORBUS, K., GENTNER, D., and LAW, K. MAC/FAC. (1995): A model of similarity-based retrieval. *Cognitive Science, 19, 144-205.*

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

FRIEDENBERG, JAY, GORDON SILVERMAN. (2006). *Cognitive science: An introduction to the study of mind. London:* Sage Publications, Inc.

GARDNER, Howard. (1996). *La nueva ciencia de la mente: historia de la revolución cognitiva.* Barcelona, Paidós.

GODINO, J. D. (2002*). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.* Recherches en Didactique des Mathématiques 22, (2/3): 237-284.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1998). *Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education.* En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics Education as a research domain: A search for identity (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

GODINO, J. D. y LLINARES, S. (2000). *El Interaccionismo simbólico en educación matemática.* Educación Matemática, 12(1): 70-92.

GOLDIN, G. (1998). *Representations and the psychology of mathematics education*: part II. Journal of Mathematical Behaviour, 17 (2): 135-165.

GOLDIN, G. y STHEINGOLD, (2001*). System of representations and the development of mathematical concepts*. En A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), The roles of representation in school mathematics (pp. 1-23).Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

GOLDING, G. (2002). *Representation in mathematical learning and problem solving*. En, Lyn D. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education (197-218). London: Lawrence Erlbaum.

GROSSMAN, STANLEY I. (2008). *Algebra lineal. Sexta edición.* México, D.F.: Mc Graw Hill.

HARTSHORNE C., WEISS P., and BURKS A. (Eds.). (1931-1958). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

HITT, F. (2002) *Representations and mathematics visualization*. North American Chapter of PME: Cinveztav-IPN.

HOLYOAK, K. J., and THAGARD, P. (1995). *Mental Leaps: Analogy in creative thought.* Cambridge, MA: MIT Press.

JOHNSON, PHILIP N. LAIRD.(1993). *El Ordenador y la Mente.* Ediciones Paidós Ibérica, S.A.

JANVIER, C. (ed.) (1987), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* Hillsdale, New Jersey.

LARSON Ron, ROBERT P. Hostetler y BRUCE H. Edwards. *Cálculo. Octava edición.* México, D.F.: Mc Graw Hill.

LAWRENCE ERLBAUM A.P. KAPUT, J. J. (1998). *Representations, inscriptions, descriptions and learning*: A kaleidoscope of windows. Journal of Mathematical Behaviour, 17 (2), 266-281.

MARR, D. *Vision. (1982).* San Francisco, CA: W. H. Freeman.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, (2001). *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Proyecto de incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media en Colombia.* Bogotá, D. C.: Enlace Editores.

MORENO, L. (2001). *Cognición, Mediación y Tecnología.* Avance y Perspectiva, vol. 20, pp. 65-68.

ORTIZ, Hugo Hernán A., JIMÉNEZ G. Francy Nelly . (2004). *La demostración elemento vivo en la didáctica de la matemática.* Scientia et Technica Año XII, No 31, Agosto de 2006 UTP.

PAIVIO, A. *Imagery and verbal process.* (1971). New York: Holt, Rinehart & Winston.

ODIFREDI, Piergiorgio. (2006). *La matemática del siglo xx: de los conjuntos a la complejidad.* Buenos aires: Katz Editores.

PYLYSHYN, Z. W. (1987). *What the mind's eye tells the mind's brain: A critique of mental imagery*. *Psychological Bulletin*, 80, 1-24.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les Technologies.* Paris: Armand Colin.

SADOVSKY, Patricia. (2005). *Enseñar matemáticas hoy: miradas, sentidos y desafíos. Buenos Aires: Libros el Zorzal.*

SCHOENFELD, H. A. (1987). *Cognitive science and mathematics education: an overview.* En H. A. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education. London: LEAS, p. 1-32.

THAGARD, P. (2006). *La mente. Introducción a las ciencias cognitivas.* Buenos Aires: Katz Editores.

TORO, Luis alberto C. (2007). *Matemáticas, Ingeniería y Computadora.* Revista Educación en Ingeniería, N° 3, 55-65.

TORO, Luis Alberto C. (2009). *Una Introducción a Matlab para estudiantes de Ciencias e Ingenierías*. (2009). Universidad Autónoma de Manizales (UAM). Gráficas Tizán Ltda.-Manizales.

TORO, Luis Alberto C. (2005). *Differential Geometry of Curves*. (Applied Knowledge Paper, Course Math 722, Beyond the Third Dimension, Lacrosse University). En
http://yupana.autonoma.edu.co/departamentos/fisicamatematica