



Formación Universitaria

E-ISSN: 0718-5006

citrevistas@gmail.com

Centro de Información Tecnológica

Chile

Paz, Marco A.; Ramírez-del Real, Tania A.; Garibo, Suselle C.; Gallegos, José L.  
ALGORITMO DIDÁCTICO PARA LA ASIGNACIÓN IMPLÍCITA DE POLOS MEDIANTE  
LA ESPECIFICACIÓN DE CARACTERÍSTICAS TEMPORALES DESEADAS USANDO  
CONTROLADORES PI INDUSTRIALES

Formación Universitaria, vol. 6, núm. 6, 2013, pp. 23-40

Centro de Información Tecnológica

La Serena, Chile

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=373534463004>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## Algoritmo didáctico para la Asignación Implícita de Polos mediante la Especificación de Características Temporales deseadas usando Controladores PI Industriales

Marco A. Paz, Tania A. Ramírez-del Real, Suselle C. Garibo y José L. Gallegos

Universidad Politécnica de Aguascalientes, Secretaría Académica, Calle Paseo San Gerardo #207, Fracc. San Gerardo, C.P. 20342. Aguascalientes, México (e-mail: marco.paz@upa.edu.mx).

*Recibido Abr. 22, 2013; Aceptado Jun. 3, 2013; Versión final recibida Jul. 31, 2013*

---

### Resumen

El objetivo del trabajo reportado es el desarrollo de un algoritmo para el diseño de controladores PI con un enfoque didáctico. El presente trabajo propone un enfoque unificado que guíe al estudiante paso a paso durante el proceso de diseño e implementación de un controlador de esta clase. Si bien, el uso del control PID en la industria está ampliamente extendido, lo cierto es que el proceso de sintonización de las ganancias de este tipo de controladores en el entorno industrial es empírico en la mayoría de las ocasiones. Este artículo vincula de forma natural al diseño del controlador basado en una respuesta temporal deseada con el proceso de asignación de polos, lo cual permite al estudiante diseñar controladores que son fácilmente trasladables a plataformas industriales de control y en lo particular a controladores lógicos programables (PLC, por sus siglas en inglés). Al aplicar el algoritmo, los estudiantes podrán constatar como un diseño analítico puede tener éxito en la implementación práctica, lo cual permitiría en principio desarrollar mayor confianza en el diseño determinístico y realizar conexiones metacognitivas entre lo abstracto y lo real.

*Palabras clave: Control PID, asignación de polos, PLC, control de procesos, control digital, enseñanza ingeniería de control*

## Didactic algorithm for the Implicit Pole Assignment by specifying desired time characteristics for Industrial PI Controllers

### Abstract

The aim of the work reported is the development of an algorithm for designing PI controllers with a didactic approach. This paper proposes a unified approach to guide the student step by step through the process of design and implementation of a controller in this class. Although PID control use in the industry is widespread, the fact is that the process of tuning the gains of these controllers in the industrial environment is empirical in most occasions. This article links naturally to controller design based on a desired time response with pole assignment process, which allows students to design controllers that are easily transferable to industrial control platforms and in particular programmable logic controllers (PLC, for its acronym in English). In applying the algorithm, students can observe how analytical design can succeed in the practical implementation, which would in principle to develop greater confidence in the design deterministic and metacognitive connections between the abstract and the real.

*Keywords: PID control, pole assignment, PLC, process control, digital control*

## INTRODUCCIÓN

El control PID cumplió recientemente siete décadas de uso ininterrumpido en la industria del proceso, tiempo en el cual ha consolidado una presencia dominante frente a otras estrategias de control, pues más del 90% de los lazos de control instalados alrededor del mundo emplean este tipo de controladores (Aström y Hagglund, 1995; Ender, 1993). En la industria del proceso, los lazos de control son sintonizados en su gran mayoría de forma empírica, y en menor grado con métodos heurísticos bien conocidos, como lo son los métodos de sintonización de Ziegler-Nichols (lazo abierto y lazo cerrado). Usando las reglas de sintonización de Ziegler y Nichols puede llegar a obtenerse un desempeño aceptable del lazo de control para cierta clase de procesos. Más allá de la confiabilidad de la técnica de sintonización existen algunos problemas con el uso de los controladores PID, entre los que pueden mencionarse que una gran cantidad de controladores no son sintonizados expresamente por el usuario sino que se encuentran en operación con las ganancias que por defecto configuró el fabricante en el dispositivo (usualmente  $K_c=1$ ,  $T_i=1$  y  $T_d=0$ ), y que un porcentaje importante de los controladores operan en modo manual (Ender, 1993); esto último puede atribuirse a que los técnicos e ingenieros evitan enfrentarse al análisis de la dinámica característica del proceso y el cálculo de los parámetros de sintonización para el controlador. En particular, para una amplia gama de procesos industriales se emplean solo las acciones proporcional e integral de un control PID (mientras que la acción derivativa se ajusta frecuentemente a un valor de cero), lo cual en muchos casos no solo es suficiente, sino que también es recomendable a causa de algunos efectos indeseables de la acción derivativa en presencia de perturbaciones; en este mismo sentido, el alcance del presente artículo se limita al planteamiento algorítmico de controladores Proporcional + Integral (PI), para la ubicación de polos en los casos de plantas que pueden ser satisfactoriamente aproximadas con funciones de transferencia de primero y segundo orden sin ceros. Con respecto a la emisión deliberada de la acción derivativa en controladores PID, se puede mencionar que esta es una práctica común en la industria del proceso (Saglam, et al., 2013).

Los controladores PID comerciales pueden contar con auto-ajuste o auto-sintonización, siendo esta funcionalidad una herramienta relativamente sencilla de aplicar. Si bien, el controlador puede tener un desempeño aceptable al realizar el autoajuste, en algunos casos de esta forma de sintonización puede devenir una respuesta no deseada o incluso la inestabilidad en el lazo, debido a que el mecanismo de sintonización en muchas ocasiones no es capaz de sintetizar satisfactoriamente la dinámica característica esencial para el proceso de sintonización. Por otro lado, se encuentran los controladores PID embebidos en un PLC que cuentan con una función PID (Allen Bradley, 2000), la cual posee diversas opciones de configuración, destacándose el tipo de arquitectura del controlador (dependiente o independiente), en este sentido, la selección equívoca asociada al desconocimiento del algoritmo digital de control, también puede provocar una respuesta no deseada o inestabilidad en el lazo de control.

Los métodos reportados en la literatura sobre la enseñanza para sintonización de controladores PID son variados, algunos facilitadores de este tema en particular reportan el uso de software de simulación para la sintonización de ganancias mediante el método empírico (Ramasamy, et al., 2012), junto con la selección del proceso y la variación en la dinámica del mismo (Márquez y Cárdenas, 2008), otros señalan el uso de métodos analíticos en los que se enuncian algoritmos estructurados para facilitar la aplicación (Basilio y Matos, 2002); a pesar de esto el aprendizaje corre el riesgo de no llegar a ser significativo por no haber un enlace a una implementación física (Huba, 2007), destacando además que la solución de problemas aplicados a procesos reales mediante plataformas industriales de control, como lo es un PLC (Lakshmi, et al., 2012), tiene la característica de llegar a ser estimulante para el estudiante, y con ello facilitar aun más la adquisición del conocimiento. El aprendizaje del control de procesos es logrado mediante el conocimiento a nivel teórico, la comprensión, la aplicación, el análisis, la síntesis y la evaluación (Lin, et al., 2009) del lazo cerrado en el sistema, por lo cual la técnica de enseñanza utilizada debe lograr la conexión metacognitiva entre lo abstracto y lo real. Este trabajo hace énfasis en las seis características anteriormente mencionadas que favorecen la adquisición de la competencia en el diseño de controladores PI por ubicación de polos, logrando un aprendizaje significativo, de este modo cuando el estudiante encuentre problemas similares con procesos físicos tendrá las herramientas para hacerles frente.

Un método analítico para calcular las ganancias de un controlador PI dependiente (PI ISA), es a través del diseño de un polinomio de asignación de polos que considere el desempeño deseado al cerrar el lazo de control, este es un procedimiento bien estudiado (Aström y Hagglund, 1995; Cominos y Munro, 2002). En este trabajo se hace énfasis en la síntesis de asignaciones de polos a partir de características temporales conocidas, como lo son el sobrepaso máximo y el tiempo de establecimiento; lo cual facilita la especificación del comportamiento dinámico en lazo cerrado. En el supuesto de que se ha logrado una buena aproximación del proceso a controlar con un modelo lineal e invariante en el tiempo, la asignación de polos con un control PI puede proveer una buena relación costo beneficio, pues se puede prever con un alto nivel de precisión el comportamiento del proceso en lazo cerrado de una manera relativamente sencilla.

En la sección de diseño de controlador para procesos de primer orden del presente trabajo se discute cómo llevar a cabo una asignación de polos para alcanzar un comportamiento deseado en lazo cerrado, así como algunos aspectos asociados a la implementación digital. En la sección de diseño para procesos de segundo orden se lleva a cabo un análisis equivalente al de la sección anterior. Finalmente, en la última sección se presenta la implementación en un PLC del método de síntesis de ubicación de polos usando el algoritmo de control PI ISA.

## DISEÑO DEL CONTROLADOR PARA PROCESOS DE PRIMER ORDEN

Si se asume que se ha obtenido una aproximación matemática de primer orden del sistema de interés, en donde el retardo es suficientemente pequeño para ser despreciado, se tiene que:

$$G_1(s) = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad (1)$$

donde  $K$  es la ganancia del sistema en lazo abierto, mientras que  $\tau$  es la constante de tiempo (tiempo que le toma al sistema alcanzar el 63.2% de la magnitud de su respuesta en estado estacionario). Por otro lado, si se elige el algoritmo de control PI dependiente (Åström y Hagglud, 1995) de la forma:

$$C(s) = \frac{K_c T_i s + K_c}{T_i s}, \quad (2)$$

donde  $K_c$  es la ganancia proporcional y  $T_i$  es el tiempo integral, al cerrar el lazo de control (usando realimentación negativa) con (1) y (2) se obtiene la función de transferencia equivalente en lazo cerrado de la ecuación (3),

$$C(s) = \frac{\frac{K K_c}{T_i \tau} (T_i s + 1)}{s^2 + \frac{1}{\tau} (1 + K K_c) s + \frac{K K_c}{T_i \tau}}. \quad (3)$$

Es evidente al observar la expresión (3) que cuando se cierra el lazo de control considerando (1) y (2) se obtiene un sistema de segundo orden con dos polos y un cero. En este sentido se puede recordar que la forma canónica de la función de transferencia de segundo orden está dada por:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (4)$$

donde  $\zeta$  representa el coeficiente de amortiguamiento, mientras que  $\omega_n$  representa la frecuencia natural no amortiguada (Ogata, 2003).

Analizando (4) observamos que, el denominador consta de dos polos, mientras que el numerador no contiene ningún cero. Es aceptado en la mayoría de los casos que la ecuación característica de un sistema de segundo orden determina el perfil dinámico de dicho sistema, por lo que solo con el fin de simplificar el procedimiento de diseño, se puede discriminar la contribución dinámica del cero en la ecuación de lazo cerrado, siempre y cuando este cero no se encuentre en el origen o sea de fase no mínima. Por esta razón, puede ser suficiente (en la mayoría de los casos) proponer un polinomio denominador que contemple una ubicación de polos para obtener una dinámica deseada en lazo cerrado.

El proceso de diseño del polinomio de asignación de polos, tiene como primer paso establecer la respuesta temporal en lazo cerrado, tomando en cuenta siempre la respuesta dinámica que presenta el sistema a controlar en lazo abierto, ya que establecer mediante el diseño, una dinámica de lazo cerrado mucho más rápida que la de lazo abierto, puede provocar un esfuerzo de control excesivo, lo cual a su vez puede ocasionar un conflicto con los límites asociados a la saturación de los actuadores presentes en el proceso físico.

Dos características de la dinámica asociada a sistemas de segundo orden subamortiguados, que pueden relacionarse intuitivamente con la respuesta dinámica del proceso, son: el máximo sobrepaso  $M_p$ , y el tiempo de establecimiento  $t_s$ . Tomando en cuenta la función de transferencia descrita (4) el sobrepaso máximo  $M_p$  se puede aproximar como:

$$M_p \approx e^{\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \text{ para } 0 \leq \zeta < 1, \quad (5)$$

Mientras que el tiempo de establecimiento  $t_s$  puede definirse de acuerdo a (Franklin, et al., 1998) como:

$$t_s \approx \frac{4.6}{\zeta\omega_n} e^{\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \text{ para } 0 \leq \zeta < 1. \quad (6)$$

La constante del numerador en (6) se obtiene mediante el cálculo del logaritmo natural de la fracción de tolerancia (el inverso del error porcentual expresado en decimales que acota la banda de tolerancia usada para la medición del tiempo de establecimiento), para el caso de una banda de tolerancia del 1%, se tendría una fracción de tolerancia de 100 (1/0.01). Otros numeradores diferentes pueden obtenerse para (6) a partir del uso de otras bandas de error (Ogata, 2003).

El tiempo de establecimiento  $t_s$  mantiene una relación inversa con el esfuerzo de control, por lo que en el presente trabajo se recomienda un tiempo de establecimiento en lazo cerrado superior al 50% del tiempo de establecimiento en lazo abierto. Esto para evitar, en la medida de lo posible, un conflicto entre la magnitud de la señal de control y los límites del sistema de actuación. Particularmente en los modelos de primer orden; el tiempo de establecimiento en lazo abierto es aproximadamente cinco veces la constante de tiempo, por lo que en el caso de no haberse definido el tiempo de establecimiento deseado en lazo cerrado para una aplicación particular, se recomienda elegirlo como:  $t_{sd}=3\tau$ .

Por su parte, la elección del sobrepaso máximo  $M_p$  se debe supeditar a las restricciones intrínsecas del proceso particular, supóngase por ejemplo, que en un proceso de nivel, al elegir un  $M_p$  determinado habrá que considerar cuál sería el máximo nivel de llenado posible para el depósito, para evitar el derrame de líquido cuando el sistema alcance el máximo valor de sobrepaso. Otro ejemplo donde la elección del  $M_p$  es crítica, puede encontrarse en ciertos procesos térmicos que requieren que el sobrepaso esté bien acotado, como en el caso de la inyección de plásticos, particularmente en el moldeo del policloruro de vinilo (PVC) para el que, la tolerancia no supera  $\pm 2^\circ\text{C}$ , por lo que un sobrepaso propuesto incorrectamente podría degradar irreversiblemente el material. Si no existen restricciones particulares, en el presente trabajo se recomienda que el sobrepaso deseado ( $M_{pd}$ ) satisfaga la relación:  $M_{pd} \leq 15\%$ .

Con  $M_{pd}$  y  $t_{sd}$  seleccionados se procede a proponer una función de transferencia en lazo cerrado de la forma:

$$G(s) = \frac{\omega_{nd}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_{nd}s + \omega_{nd}^2}, \quad (7)$$

donde  $\omega_{nd}$  es la frecuencia natural no amortiguada deseada y  $\zeta_d$  es el coeficiente de amortiguamiento deseado. Para fines de diseño tanto el  $M_{pd}$  como el  $t_{sd}$  son conocidos, puesto que han debido ser propuestos, así que se puede despejar  $\zeta_d$  y  $\omega_{nd}$  de (5) y (6), de forma que:

$$\zeta_d \approx \sqrt{\frac{(\ln(M_{pd}))^2}{\pi^2 + (\ln(M_{pd}))^2}}, \quad (8)$$

$$\omega_{nd} \approx \frac{4.6}{t_{sd}\zeta_d}. \quad (9)$$

A partir de la forma general de la función de transferencia deseada de segundo orden (7), se plantea una equivalencia término a término con el denominador de (3), con la finalidad de despejar las ganancias  $K_c$  y  $T_i$  (que hasta esta etapa del procedimiento son desconocidas), en función de  $K$  y  $\tau$  (que son conocidas), considerando a su vez que  $\zeta_d$  y  $\omega_{nd}$  incorporan el desempeño en lazo cerrado ( $M_{pd}$  y  $t_{sd}$ ).

$$K_c = \frac{2\tau\zeta_d\omega_{nd} - 1}{K}, \quad (10)$$

$$T_i = \frac{KK_c}{\tau(\omega_{nd})^2}. \quad (11)$$

De lo expuesto anteriormente, se puede resumir el procedimiento de diseño con el siguiente algoritmo:

1. Proponer el sobrepaso máximo deseado  $M_{pd}$  y el tiempo de establecimiento deseado en lazo cerrado  $t_{sd}$ ,
2. Sustituir  $M_{pd}$  y  $t_{sd}$  en (8) y (9) para obtener el coeficiente de amortiguamiento deseado y la frecuencia natural no amortiguada deseada,
3. Utilizar  $\zeta_d$  y  $\omega_{nd}$ , en conjunto con la ganancia del sistema en lazo abierto  $K$  y la constante de tiempo  $\tau$ , para calcular las ganancias del controlador  $K_c$  y  $T_i$  mediante la aplicación de (10) y (11).

*Ejemplo 1.* Suponga el proceso industrial de caudal mostrado en el diagrama de tubería e instrumentación (DTI) de la Figura 1. El lazo de control es utilizado para regular un valor determinado de caudal de vapor. El proceso puede ser aproximado en lazo abierto con un buen nivel de confiabilidad para este caso particular, mediante la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{0.8}{4.6s + 1}, \quad (12)$$

en la Figura 2 se puede observar un diagrama a bloques del lazo de control PI ISA para (12).

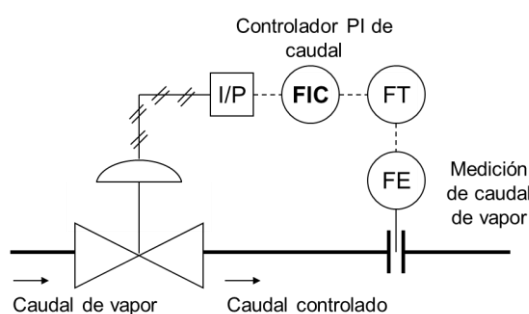


Fig. 1: DTI de un proceso de caudal

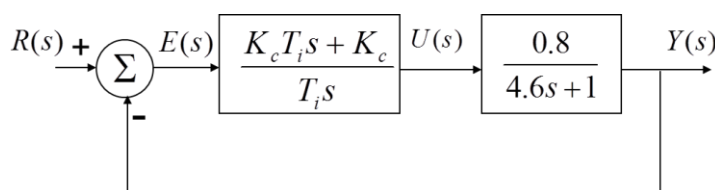


Fig. 2: Control PI ISA de un proceso de caudal

En la Figura 2,  $Y(s)$  representa la salida del proceso controlado,  $U(s)$  la señal de control, por su parte  $E(s)$  es el error o bien la diferencia entre  $R(s)$  y  $Y(s)$ , mientras que  $R(s)$  es la referencia del sistema, que para este ejemplo particular se asumirá unitaria. Tomando en cuenta la respuesta del sistema de caudal de vapor en lazo abierto y considerando la relación (7), se propone un tiempo de establecimiento en lazo cerrado de tres veces la constante de tiempo del sistema en lazo abierto, mientras que a su vez se propone un sobrepaso máximo del 15% en lazo cerrado, por lo que  $\omega_{nd}$  y  $\zeta_d$  fueron calculados como:  $\omega_{nd}=0.6448$  y  $\zeta_d=0.5169$ , entonces la función de transferencia de lazo cerrado deseada puede representarse como:

$$G_d(s) = \frac{0.4158}{s^2 + 0.6667s + 0.4158}. \quad (13)$$

De acuerdo a (10) y (11), se pueden obtener las ganancias  $K_c=2.5833$  y  $T_i=1.0805$ . En la Figura 3 se puede observar una comparación entre la respuesta de (13) y la respuesta al escalón unitario del proceso deseado en lazo cerrado representado por (12). Finalmente, al cerrar el lazo se podrá observar que la función de transferencia en lazo cerrado tendrá la forma de:

$$G_{LC}(s) = \frac{0.4494s + 0.4158}{s^2 + 0.6667s + 0.4158}. \quad (14)$$

Se puede observar que, si la función de transferencia en lazo cerrado es expresada en su forma canónica, los coeficientes del denominador son iguales a los de (13), cumpliendo de esta manera con la asignación deseada de polos, aunque no se puede obviar que el cero resultante al cerrar el lazo no fue considerado durante el proceso de diseño. En la Figura 4 se puede observar el comportamiento deseado ( $G_d$ ) y el real

( $G_{LC}$ ) cuando se aplica como entrada un escalón unitario. Se puede observar que  $G_{LC}$  alcanza la referencia unitaria, presentando cierta desviación con respecto a la respuesta de  $G_d$ , lo cual se debe fundamentalmente a la contribución dinámica del cero.

Si se deseara eliminar dicha diferencia, puede utilizarse una cancelación explícita del cero de  $G_{LC}$  incluyendo una prealimentación entre una referencia  $R'(s)$  y el punto de suma de la realimentación del controlador, con un denominador equivalente al cero de lazo cerrado y un numerador equivalente al último término del denominador de la ecuación (3), para alcanzar de esta manera la ganancia unitaria. La ubicación de la prealimentación diseñada para la cancelación de cero se muestra en el diagrama de bloques de la Figura 5. Para el Ejemplo 1, puede observarse en la Figura 6, una cancelación total del efecto del cero en la respuesta al escalón de  $G_d(s)$  y de la función de transferencia  $Y(s)/R'(s)$ .

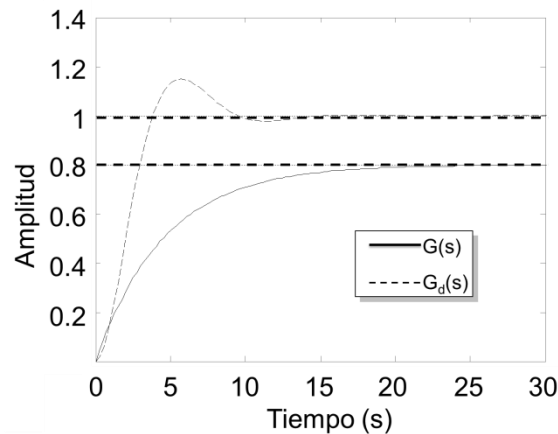


Fig. 3: Respuesta al escalón del sistema en lazo abierto  $G(s)$  vs. la respuesta del sistema en lazo cerrado deseado  $G_d(s)$ .

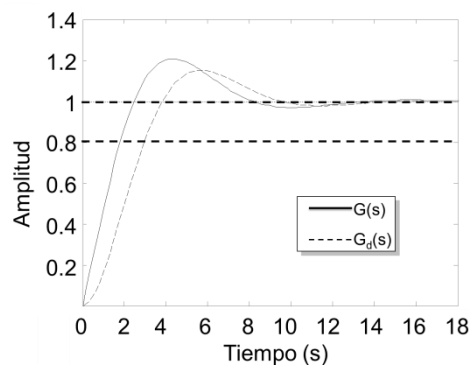


Fig. 4: Respuesta al escalón  $G_{LC}$  (13) vs.  $G_d$  (14). □

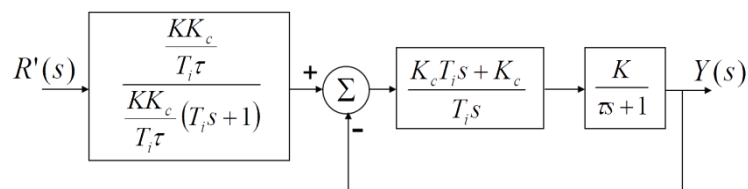


Fig. 5: Control PI ISA con cancelación explícita de cero

*Ejemplo 2.* Obtenga un control digital usando emulación (Franklin, et al., 1998) a partir de los resultados obtenidos en el Ejemplo 1. Considerando los valores calculados para  $K_c$  y  $T_i$ , el controlador PI, puede representarse como la función de transferencia:

$$C(s) = \frac{2.791s + 2.583}{1.08s}. \quad (15)$$

Una vez que se ha llevado a cabo del diseño del control en tiempo continuo, el siguiente paso, consiste en obtener los equivalentes discretos tanto de la planta como del controlador diseñado en tiempo continuo.

Con el fin de obtener los equivalentes discretos de las relaciones mencionadas, es fundamental elegir adecuadamente el periodo de muestreo  $T$ . En el presente trabajo se hace la siguiente recomendación heurística:

$$\frac{5\tau}{50} < T < \frac{5\tau}{20}. \quad (16)$$

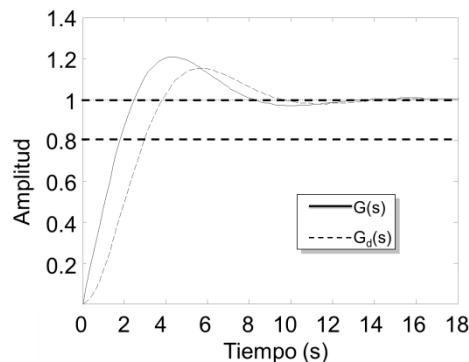


Fig. 6: Respuesta al escalón  $Y(s)/R'(s)$  vs.  $G_d$

La definición de los límites establecidos en (16) persigue dos objetivos: 1) reconstruir representativamente la respuesta del sistema, 2) evitar que el sistema sea sobre-muestreado, situación que a su vez podría provocar interacciones negativas entre el controlador y el ruido de perturbación. Tomando en cuenta la cota definida por (16) se opta en este ejemplo por seleccionar un periodo de muestreo  $T=1$ . En general se recomienda elegir un periodo de muestreo que admita un inverso entero al ser expresada la frecuencia de muestreo. Otra situación, de no menor importancia, en la elección del periodo de muestreo es la capacidad de la plataforma digital sobre la cual se alojará y ejecutará el algoritmo de control. Se recomienda verificar la velocidad de muestreo máxima que puede alcanzar la plataforma digital, y al mismo tiempo calcular o medir cuidadosamente el tiempo que consume la ejecución de una iteración completa del código de control, tomando en cuenta el tiempo de acceso a los puertos analógicos, se recomienda que la suma total de los tiempos que ocupan dichos procesos no exceda el 40% del periodo de muestreo  $T$  seleccionado.

Para  $T=1$ , el equivalente discreto de la planta (13) obtenido con ayuda de un retenedor de orden cero (ZOH, por sus siglas en inglés) es:

$$G(z) = \frac{0.1563}{z - 0.8046}. \quad (17)$$

Por su parte, para no introducir un retardo a la acción de control, se obtiene el equivalente discreto del controlador con ayuda de un mapeo directo de polos y ceros (Franklin, et al., 1998) tal que:

$$C(z) = \frac{3.931z - 1.558}{z - 1}. \quad (18)$$

Al obtener el lazo cerrado de las funciones de transferencia descritas por (17) y (18) se obtiene la expresión:

$$G_{Lcd} = \frac{0.6144z - 0.2435}{z^2 - 1.19z + 0.5611}, \quad (19)$$

de la que se puede deducir que los polos se encuentran en:  $z_1=0.5951+0.4549i$  y  $z_2=0.5951-0.4549i$ . Con la finalidad de contar con una aproximación de las pérdidas por discretización, se lleva a cabo una evaluación de la equivalencia continua de los polos discretos mediante:

$$s = \frac{1}{T} \ln(z). \quad (20)$$

Entonces a partir de las raíces en  $z$  puede obtenerse el mapeo a  $s$  como:  $s_1=-0.2889+0.6527i$  y  $s_2=-0.2889-0.6527i$ . De tal forma, con el par conjugado anterior se puede reconstruirse el polinomio característico en tiempo continuo como:

$$D_{G1}(s) = s^2 + 0.5778s + 0.5094. \quad (21)$$



Recíprocamente a partir de (21) se puede recalcular el tiempo de establecimiento y el sobrepaso máximo aplicando (5) y (6) como,  $M_p=0.2489$  y  $t_s=15.9221$ , podemos observar un desviación de +8.89% en el sobrepaso y de +2.12 segundos en el tiempo de establecimiento. Este cálculo considera únicamente el denominador de la función de transferencia, pero es suficiente para apreciar la existencia de una desviación.

En la Figura 7 se presenta una comparación entre las respuestas temporales del sistema en lazo cerrado en tiempo continuo y el sistema en lazo cerrado en tiempo discreto. Como puede observarse en la Figura 7 existe una discrepancia entre la respuesta continua y la respuesta discreta, lo cual se debe esencialmente a la elección del periodo de muestreo. Si se repite el procedimiento de diseño por emulación con un periodo de muestreo  $T=0.5$  (valor cercano al límite inferior de la recomendación en (16)), puede observarse que las desviaciones son menores que con  $T=1$ , ya que se obtienen diferencias de +4.41% en  $M_p$  y +0.83 segundos en  $t_s$ .

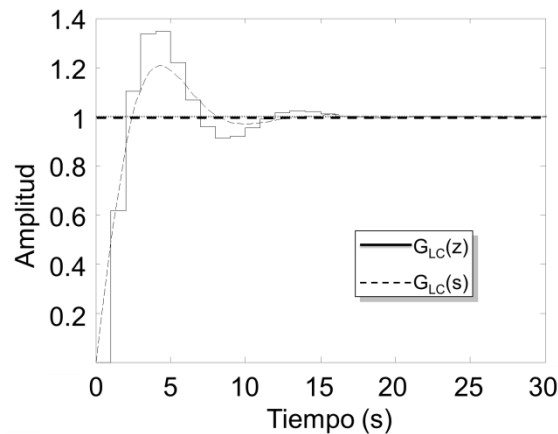


Fig. 7: Respuesta al escalón  $G_{LC}(z)$  vs.  $G_{LC}(s)$

### DISEÑO PARA PROCESOS DE SEGUNDO ORDEN ( $\zeta > 1$ )

En esta sección se lleva a cabo una revisión del diseño por asignación de polos para controladores PI ISA, cuando el proceso a controlar puede aproximarse como una función de transferencia canónica de segundo orden sobre-amortiguada.

Un conjunto representativo de procesos industriales pueden ser aproximados satisfactoriamente mediante la siguiente función de transferencia de segundo orden donde  $\zeta > 1$ ,

$$G_2(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \quad (22)$$

donde la frecuencia natural no amortiguada para (22) puede expresarse como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\tau_1 \tau_2}}, \quad (23)$$

y el coeficiente de amortiguamiento del sistema se define por:

$$\zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1 \tau_2 \sqrt{\frac{1}{\tau_1 \tau_2}}}, \quad (24)$$

la ecuación (22) es de hecho, la conjunción de dos funciones de transferencia de primer orden en serie.

Si se considera que el controlador PI ISA definido en (2), se utiliza para controlar un proceso representado por la función de transferencia (22), se obtiene, cerrando el lazo (con realimentación negativa), la función de transferencia siguiente:

$$G_{LC2}(s) = \frac{\frac{K_c K}{\tau_1 \tau_2} s + \frac{K_c K}{T_i \tau_1 \tau_2}}{s^3 + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}\right) s^2 + \left(\frac{K_c K + 1}{\tau_1 \tau_2}\right) s + \frac{K_c K}{T_i \tau_1 \tau_2}}. \quad (25)$$

Supóngase que se puede manipular el denominador de (25), y en consecuencia, la posición de sus polos en el lugar geométrico de las raíces (LGR) mediante la elección de las ganancias  $K_c$  y  $T_i$  del controlador descrito por (2). Ya que en principio, las ganancias del controlador deberían elegirse teniendo en mente una asignación de polos deseada, se puede comenzar la búsqueda de estos valores proponiendo un denominador deseado en lazo cerrado, sin embargo, debido a que el denominador de (25) es de tercer orden, el orden del denominador deseado en lazo cerrado deberá ser del mismo orden, por lo que introducimos arbitrariamente un tercer polo:

$$D(s) = (s + p_1)(s^2 + 2\zeta_d \omega_{nd} s + \omega_{nd}^2). \quad (26)$$

El polinomio denominador deseado en lazo cerrado sintetizado en (26) está conformado a su vez por la ecuación característica de segundo orden descrita en la sección anterior y por un polinomio de primer orden (inclusivo de un tercer polo real). La ecuación característica de segundo orden puede proponerse mediante la elección de un sobrepaso máximo  $M_p$  y un tiempo de establecimiento  $t_s$ , tal como fue descrito en la sección anterior, lo cual implica que este polinomio propuesto de segundo orden manifieste un subamortiguamiento dinámico; por su parte, para proponer la ubicación del tercer polo será necesario discutir un procedimiento específico.

Al desarrollar (26) en función del grado se tiene:

$$D_{G2}(s) = s^3 + (2\zeta_d \omega_{nd} + p_1)s^2 + (\omega_{nd}^2 + 2p_1 \zeta_d \omega_{nd})s + \omega_{nd}^2 p_1. \quad (27)$$

Suponiendo que se cuenta con el coeficiente de amortiguamiento deseado y la frecuencia natural no amortiguada deseada, se pueden igualar los coeficientes de la segunda potencia del denominador de (25) y de (27) para establecer la siguiente relación:

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} = 2\zeta_d \omega_{nd} + p_1. \quad (28)$$

Ya que todos los términos en (28) son conocidos, con excepción de  $p_1$ , pudiéndose obtener como:

$$p_1 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} - 2\zeta_d \omega_{nd}, \quad (29)$$

donde, para no violar la condición de Stodola (Poor, H. et al., 2005), se requiere cumplir:

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} > 2\zeta_d \omega_{nd}, \quad (30)$$

siendo entonces claro que no se puede proponer arbitrariamente un sobrepaso máximo deseado, ni un tiempo de establecimiento deseado con la finalidad de construir el polinomio de segundo orden de (26), porque el polinomio propuesto como referencia pudiera llegar a incumplir una condición mínima necesaria para la estabilidad en lazo cerrado.

*Ejemplo 3.* Suponga el proceso industrial de presión neumática de la Figura 8. El lazo de regulación observado, es utilizado para amortiguar las fluctuaciones de presión neumática a la salida de un compresor de cilindros.

El sistema puede modelarse en lazo abierto como:

$$G_1(s) = \frac{0.65}{(10s + 1)(20s + 1)}. \quad (31)$$

Considere entonces que se propone un denominador deseado en lazo cerrado de tercer orden, cuya componente de segundo orden se diseña a partir de una propuesta de un sobrepaso máximo del 10% y un menor tiempo menor de establecimiento que en lazo abierto. Como la función de transferencia descrita por (31) es sobrearmortiguada ( $\zeta > 1$ ), la relación presentada por (6) no es útil para calcular el tiempo de

establecimiento. Una relación que puede representar al tiempo de establecimiento en sistemas de la forma (22) que se propone en este trabajo es:

$$t_{ss} \approx 3.5(\tau_1 + \tau_2), \quad (32)$$

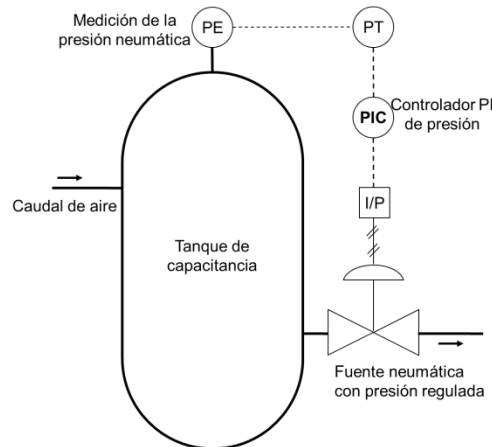


Fig. 8: DTI de un proceso de presión

al cual llamaremos tiempo de establecimiento práctico para el sistema sobreamortiguado de la forma (22). A partir de esta definición se puede decir que el tiempo de establecimiento de (31) es igual a 105 segundos. Para este ejemplo ilustrativo en particular, se opta por elegir arbitrariamente el tiempo de establecimiento deseado en lazo cerrado como:  $t_{sd}=0.4t_{ss}=42$ , y a su vez, empleando (10) y (11) se tiene que:  $\omega_{nd}=0.1853$  y  $\zeta_d=0.5912$ , por lo que claramente (30) no es satisfecha, y aunque el componente de segundo orden es estable, la ubicación del tercer polo no lo es (obsérvese que  $p_1=-0.0690$ , sustituyendo en (30)). □

Partiendo de la premisa de que se desea una dinámica dominante de segundo orden subamortiguada en (26), interesa conocer la ubicación de los polos del polinomio de segundo orden para contar con los elementos necesarios para establecer una relación entre la ubicación de estos últimos y el tercer polo. Si se recurre a la fórmula general y se asume que sólo se propondrán polinomios deseados de segundo orden subamortiguados ( $\zeta < 1$ ) se tiene que la componente real de los polos complejos puede expresarse como:  $s_r = -\zeta_d \omega_{nd}$ , por lo que se opta por proponer:

$$p_1 = \alpha \zeta_d \omega_{nd}, \quad (33)$$

de esta forma  $p_1$  cedería la dominancia a los polos complejos conjugados en el caso de que  $\alpha > 1$ . Es necesario enfatizar que en ningún caso  $\alpha$  debe ser menor que cero, puesto que en este caso se propondría una asignación del tercer polo al semiplano derecho del plano complejo.

Con la intención de formular una idea de qué valores pueden ser asignados a  $\alpha$  se procede a realizar un ensayo de diseño de (26). En esta oportunidad se propondrá un  $M_{pd}$ , no así un  $t_{sd}$ , de tal forma que se puede calcular  $\zeta_d$  utilizando (8), considerando que  $\omega_{nd}$  no se podrá calcular. Manipulando la ecuación (28) considerando a (33) se tiene:

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} = (2 + \alpha) \zeta_d \omega_{nd}. \quad (34)$$

Obteniéndose  $\omega_{nd}$  como:

$$\omega_{nd} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2 \zeta_d (2 + \alpha)}. \quad (35)$$

Una alternativa para obtener  $\omega_{nd}$  es utilizar el tiempo de establecimiento propuesto en (11); utilizando esta ecuación se fuerza entre ambas ecuaciones a una igualdad para obtener la relación:

$$\alpha = \frac{t_{sd}(\tau_1 + \tau_2)}{4.6\tau_1\tau_2} - 2. \quad (36)$$

De (29) o (36) se puede deducir que al proponer el tiempo de establecimiento deseado en lazo cerrado debemos considerar que:

$$t_{sd} > \frac{9.2(\tau_1 \tau_2)}{\tau_1 + \tau_2}, \quad (37)$$

con la finalidad de que  $\alpha$  sea al menos positiva definida.

Se observa entonces que  $M_p$  puede ser propuesta libremente siempre que  $0 < M_p < 1$ , mientras que al proponer  $t_{sd}$  se debe observar como restricción la impuesta por (37). Habiendo construido (27), se puede proceder ya sin más consideraciones a obtener las ganancias  $K_c$  y  $T_i$ .

Si se igualan los términos de primer orden del denominador de (25) y de (27) se obtiene. De lo anterior se deduce entonces la ganancia proporcional como:

$$K_c = \frac{\omega_{nd}^2 \tau_1 \tau_2 + 2p_1 \zeta_d \omega_{nd} \tau_1 \tau_2 - 1}{K}. \quad (38)$$

Por su parte, la igualación de los términos de orden cero en (25) y (27) resulta en, teniéndose entonces como ganancia integral la siguiente relación:

$$T_i = \frac{K_c K}{\tau_1 \tau_2 \omega_{nd}^2 p_1}. \quad (39)$$

A manera de algoritmo, el método de diseño para sistemas de segundo orden cuando  $\zeta > 1$  es:

1. Aproximar, cuando sea posible, el proceso a controlar a una estructura de la forma (22),
2. Proponer el sobrepaso máximo tal que  $0 < M_p < 1$ ,
3. Proponer  $t_{sd}$  respetando el cumplimiento de (37),
4. Utilizar las ecuaciones (8) y (9) para calcular  $\zeta_d$  y  $\omega_{nd}$  con el  $M_p$  y  $t_s$  propuestos,
5. Calcular  $p_1$  aplicando (36) y (33), en este orden o directamente de (29),
6. Calcular  $K_c$  de (38) y  $T_i$  de (39).

*Ejemplo 4.* Si se retoma el Ejemplo 3, manteniendo el  $M_p$  propuesto del 10% y por su parte se propone el  $t_{sd}$  como  $0.85t_{ss}$  lo cual cumple con (37), entonces se obtiene  $\omega_{nd}=0.0872$  y  $\zeta_d=0.5912$ , se puede observar a su vez que el coeficiente de amortiguamiento deseado no sufre cambios en relación al Ejemplo 3, debido a que éste solo depende del sobrepaso deseado. Ahora se calculan las ganancias del controlador con ayuda de (38) y (39) como:  $K_c=2.2889$  y  $T_i=20.8619$ . A partir la elección particular de  $t_{sd}$  como  $0.85t_{ss}$  para este caso se alcanza una cancelación exacta del cero en lazo cerrado con  $p_1$  porque:  $p_1=1/T_i$ , dicha cancelación se puede cumplir en aquellos casos donde se satisfaga la siguiente relación de la expresión (40), en la Figura 9 se puede observar la respuesta al escalón unitario del proceso controlado.

$$\frac{K_c K}{\tau_1 \tau_2 \omega_{nd}^2} = 1. \quad (40)$$

*Ejemplo 5.* Obtenga un control digital usando diseño por emulación (Poor, H. et al., 2005) a partir de los resultados obtenidos en el Ejemplo 4.

El periodo de muestreo de un proceso aproximable por una función de transferencia de la forma (22) puede ser elegido a partir de la relación que se propone en este trabajo como:

$$T = \frac{\tau_1 + \tau_2}{10}. \quad (41)$$

De tal forma para el proceso utilizado en los ejemplos 3 y 4, el periodo de muestreo  $T$  se elige como 3 segundos. Considerando los valores calculados para  $K_c$  y  $T_i$ , el equivalente discreto (usando mapeo directo de polos y ceros) del controlador PI, puede representarse como:

$$C(z) = \frac{2.367z - 2.038}{z - 1}. \quad (42)$$

A su vez, el equivalente discreto del proceso utilizando retenedor de orden cero tiene la forma:

$$G(z) = \frac{0.01261z - 0.01085}{z^2 - 1.602z + 0.6376}. \quad (43)$$

Con lo que el sistema en lazo cerrado tendrá la forma:

$$G_{LC}(z) = \frac{0.02986z^2 - 3.469 \times 10^{-18}z - 0.02212}{z^3 - 2.572z^2 - 2.239z - 0.6597}, \quad (44)$$

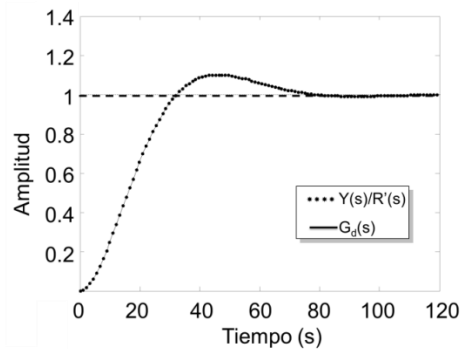


Fig. 9: Respuesta en lazo cerrado

y a su vez la respuesta al escalón del sistema discreto en lazo cerrado puede compararse con la respuesta continua en la Figura 10. Se observa que con la elección del periodo de muestreo a partir de la ecuación (43), existe una pequeña desviación en relación con el sistema continuo.

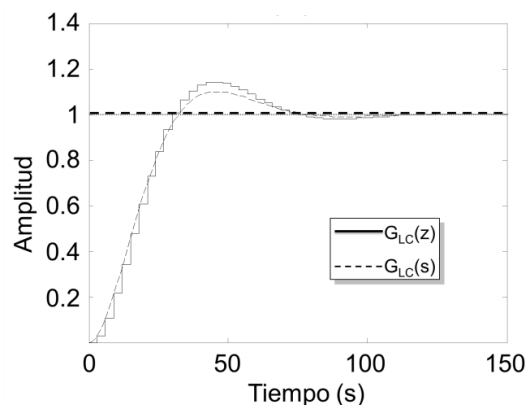


Fig. 10: Equivalente discreto del control PI

□

### DISEÑO PARA PROCESOS DE SEGUNDO ORDEN ( $0 < \zeta \leq 1$ )

Si el sistema en lazo abierto es críticamente amortiguado, es decir, las constantes  $\tau_1$  y  $\tau_2$  son iguales tal que:

$$G_3(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2}. \quad (45)$$

Las ecuaciones (38) y (39) pueden ser empleadas libremente, reemplazando la relación  $\tau_1 \tau_2$  por  $\tau^2$ . Mientras que la consideración sobre la magnitud de  $t_{sd}$  expresada en (37) puede simplificarse como:  $t_{sd} < 4.6\tau$ . Por su parte  $\alpha$  se puede obtener a partir de la respectiva simplificación de (37) como:

$$\alpha = \frac{2t_{sd}}{4.6\tau} - 2 \quad (46)$$

y obtener  $p_1$  de la misma manera a partir de (29).

Si la aproximación de segundo orden del proceso a controlar en turno es de naturaleza subamortiguada ( $0 < \zeta < 1$ ), puede aproximarse una función de transferencia de lazo abierto de la forma:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (47)$$

y al controlar el sistema con un controlador PI ISA de la forma propuesta en (2), se tiene la siguiente función de transferencia de lazo cerrado:

$$G_{LC_3}(s) = \frac{\frac{K_c K T_i \omega_n^2 s}{T_i} + \frac{K_c K \omega_n^2}{T_i}}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + (\omega_n^2 + K_c K \omega_n^2)s + \frac{K_c K \omega_n^2}{T_i}} \quad (48)$$

Al igualar los coeficientes de las potencias de segundo orden de (27) y del denominador de (48) y reemplazando  $p_1$  por (29), se puede deducir en este caso que:

$$\alpha = \frac{2\zeta\omega_n t_{sd}}{4.6} - 2. \quad (49)$$

A lo cual:

$$t_{sd} > \frac{4.6}{\zeta\omega_n}, \quad (50)$$

y como en este caso (6) es válida y representativa se puede decir que es condición necesaria para proponer un polinomio de ubicación de polos deseado estable que:  $t_{sd} > t_s$ . Cuando el sistema en lazo abierto, es aproximado como una función de transferencia de la forma (48).

Igualando los coeficientes del polinomio de ubicación deseada de polos de (27), con los del denominador de la función de transferencia (48), puede deducirse la ganancia proporcional y el tiempo integral deben calcularse con las siguientes expresiones:

$$K_c = \frac{\omega_{nd}^2 + 2p_1\zeta_d\omega_{nd} - \omega_n^2}{K\omega_n^2}. \quad (51)$$

$$T_i = \frac{K_c K \omega_n^2}{\omega_{nd}^2 p_1}. \quad (52)$$

## ESTABILIDAD EN LAZO CERRADO

*Lema 1. El sistema en lazo cerrado en (3) utilizando (9) es estable si y solo si el polinomio de ubicación de polos deseado en (7) es Stodola.*

Demostración:

En relación al diseño de controladores PI ISA por asignación de polos para procesos de primer orden, si se aplica el criterio de Routh al denominador de la función de transferencia de (3), se tienen condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad cuando:

$$K K_c > -1, \quad (51)$$

$$\frac{K K_c}{T_i} > 0. \quad (52)$$

Por su parte si se sustituye (9) en (51) se obtiene la condición:

$$2\tau\zeta_d\omega_{nd} - 1 > -1. \quad (53)$$

Esta condición se cumple siempre, ya que tanto  $\tau$ ,  $\zeta_d$  y  $\omega_{nd}$  son positivos definidos. Por otro lado, si (9) se sustituye en (52) se obtiene la relación  $\tau(\omega_{nd})^2$ , la cual siempre será positiva, por lo tanto es una condición necesaria y suficiente para conservar la estabilidad del lazo.

*Lema 2: El sistema en lazo cerrado del sistema de segundo orden de la forma (22) en lazo cerrado con el controlador PI de la forma (2) es estable si y sólo el tiempo de establecimiento deseado propuesto respeta la expresión (37).*

Demostración:

Los términos del arreglo de Routh que deben conservar la condición de ser positivos, son descritos por las siguientes expresiones:

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} > 0, \quad (54)$$

$$\frac{KK_c + 1}{\tau_1 \tau_2} - \frac{KK_c}{T_i(\tau_1 + \tau_2)} > 0, \quad (55)$$

$$\frac{KK_c}{T_i \tau_1 \tau_2} > 0. \quad (56)$$

La expresión (54) siempre es válida, debido a que las constantes de tiempo  $\tau_1$  y  $\tau_2$  siempre son positivas. Continuando con el procedimiento para la expresión (55), se sustituyen variables de interés para determinar una condición para  $t_{sd}$ , obteniendo la siguiente expresión:

$$t_{sd} > \frac{9.2\tau_1\tau_2(\tau_1 + \tau_2)}{(\tau_1 + \tau_2)^2 + \omega_{nd}^2(\tau_1\tau_2)^2}. \quad (57)$$

La expresión anterior resulta una condición para mantener la estabilidad, en pasos posteriores se comprueba si es una condición necesaria y suficiente.

Finalmente de la manipulación de la expresión (56), se tiene por resultado la expresión dada por la ecuación (37), la cual resulta en una condición para mantener la estabilidad. A continuación se comprueba cuál es la condición necesaria y suficiente. Comparando las dos expresiones para  $t_{sd}$ , se supone la desigualdad con (57) y (37):

$$\frac{9.2\tau_1\tau_2(\tau_1 + \tau_2)}{(\tau_1 + \tau_2)^2 + \omega_{nd}^2(\tau_1\tau_2)^2} < \frac{9.2\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}, \quad (58)$$

desarrollando la expresión (58) se obtiene:

$$\frac{\omega_{nd}^2\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} > 0, \quad (59)$$

por lo tanto la expresión (59) siempre es válida, ya que las variables  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\omega_{nd}$  son variables positivas definidas. Para el caso contrario de la desigualdad de (58), se tiene por resultado una expresión contradictoria para (59), ya que resulta falsa la proposición, por la razón anteriormente mencionada. Por lo tanto la expresión de la ecuación (37) es una condición necesaria y suficiente para conservar la estabilidad en lazo cerrado.

## IMPLEMENTACIÓN EN UN CONTROLADOR LÓGICO PROGRAMABLE

De manera experimental, se aplicó la metodología propuesta en este trabajo a sistemas satisfactoriamente aproximables como modelos lineales de primer y segundo orden. La implementación se llevó a cabo utilizando un Controlador Lógico Programable (PLC por sus siglas en inglés) de la marca Allen Bradley modelo MicroLogix 1500 LRP serie C, el cual utiliza el algoritmo de control PID representado por la ecuación:

$$u(t) = u(t - 1) + K_c \left[ e(t) - e(t - 1) + \frac{\Delta t}{T_i 60} e(t) + \frac{60T_d}{\Delta t} (e(t) - 2e(t - 1) + e(t - 2)) \right]. \quad (60)$$

La ecuación (60), representa un algoritmo de arquitectura dependiente en tiempo discreto, cuyas constantes de tiempo están en minutos. Para la implementación se utilizó además un módulo de entradas analógicas (1769-IF4) conectado para realimentar la salida del sistema ( $E_o$ , ver Figura 11), un módulo de salidas

analógicas (1769-OF8V) como entrada al sistema ( $E_i$ , ver Figura 11). La programación del PLC se llevó a cabo empleando el software RSLogix (Rockwell Automation) mientras que la comunicación para la descarga del programa se llevó a cabo utilizando el software RSLinx (Rockwell Automation).

Como puede apreciarse, la ecuación (60) se encuentra en tiempo discreto dada la naturaleza digital del Controlador Lógico Programable, por lo que es importante mencionar que existirá cierta desviación entre la respuesta práctica y la respuesta esperada en tiempo continuo en función de una determinada selección del periodo de muestreo (en el caso particular del PLC utilizado, el periodo de muestreo más pequeño que puede configurarse es una centésima de segundo); el análisis asociado al diseño por emulación permite una predicción confiable de dicha desviación como pudo observarse en secciones anteriores (Franklin, et al., 1998).

Uno de los objetivos principales del artículo es que pueda ser fácilmente reproducible por el estudiante, el estudio de los sistemas análogos es uno de los temas más frecuentes en la enseñanza de la ingeniería de control a nivel licenciatura (Ogata, 2003), por lo que la mayoría de los estudiantes de esta área pueden estar familiarizados con este tema, adicionalmente la implementación de plantas análogas con circuitos RC es muy económico y fácil de reproducir. Para una implementación práctica del método expuesto con procesos industriales reales se sugiere elegir una metodología de modelado e identificación confiable (Åström y Hagglund, 1995; Franklin, et. al, 1998; Ogata, 2003).

#### Proceso de primer orden

El sistema de primer orden implementado de acuerdo a la Figura 11, es el circuito eléctrico análogo equivalente con un sistema de caudal como el que podría encontrarse en la industria del proceso y tiene como función de transferencia la mostrada en (61).

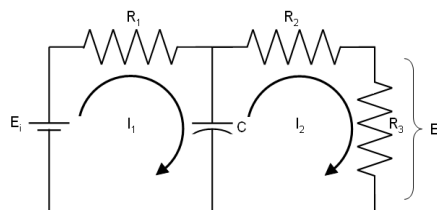


Fig. 11: Circuito RC análogo a un sistema de caudal

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_3}{(R_1 R_2 C + R_1 R_3 C)s + R_1 + R_2 + R_3}. \quad (61)$$

En la Tabla 1 se observan los valores de los elementos utilizados en la implementación del circuito RC de la Figura 11. En el análisis de resultados se trabaja con los valores medidos de estos elementos.

Tabla 1. Valores de los elementos usados en el circuito de la Figura 11

Elemento	Valor nominal	Valor medido
$R_1$	10,000 $\Omega$	9,849 $\Omega$
$R_2$	27,000 $\Omega$	26,608 $\Omega$
$R_3$	15,000 $\Omega$	14,592 $\Omega$
$C$	330E-6F	317E-6F

La función de transferencia (61) con la sustitución de los valores medidos de los elementos del sistema de la Figura 11 es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{0.28}{2.71s + 1}. \quad (62)$$

A partir de los parámetros del modelo se calculan las ganancias para el controlador PI para un sobrepaso deseado del 15% y un tiempo de establecimiento deseado en lazo cerrado de tres veces la constante de tiempo (8.13 segundos), tal que  $K_c=7.2$  y  $T_i=0.6365$ ; ya que las constantes de tiempo de la ley de control están en minutos en este PLC,  $T_i$  debe introducirse en la plataforma del PLC como  $T_i/60=0.0106$ , redondeado a 0.01 debido a que la plataforma no acepta milésimas. En la Figura 12 se muestran los parámetros que, a partir de la aplicación del método de diseño propuesto, se introdujeron al módulo PID del PLC.



En los parámetros de control (tuning parameters) se introducen las constantes del controlador  $K_c$  y  $T_i$ , en el área de entradas y salidas de control (Inputs y Outputs) no se modifican, ya que estas indican cuando se requiere un "set point" escalado y el control de la salida en porcentaje. Las banderas modificadas son: TM (modo de temporización), RG (rango de ganancia) y EN (habilitación). El modo de temporización se refiere al elegido en la sección de parámetros de control, elegido como TIMED (temporizado) y la bandera se pone en "1"; la bandera de rango de ganancia se lleva a "1", para hacer más sensible las constantes del controlador (para poder introducir dos decimales), por último la bandera de habilitación se coloca en "1" para activar el funcionamiento del controlador.

En la Figura 13 se aprecia una comparación entre la implementación y una simulación con el mismo control PID discreto empleado por el PLC utilizando los parámetros calculados; puede observarse que la desviación entre la implementación y la simulación es muy pequeña.

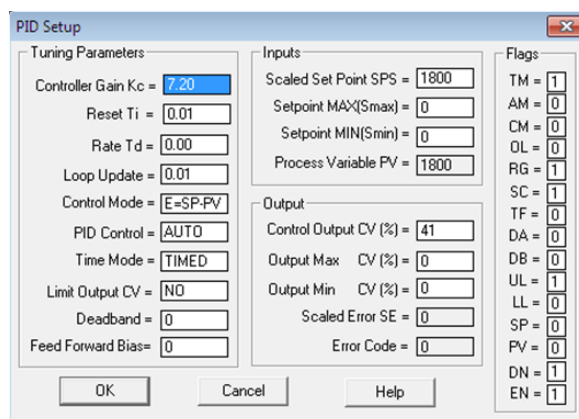


Fig. 12: Configuración del módulo PID del PLC para proceso de primer orden

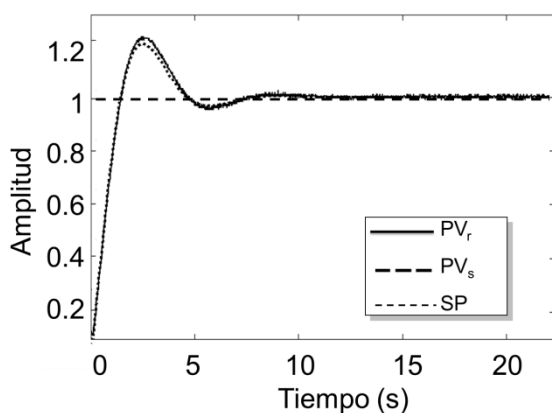


Fig. 13: Comparación entre la respuesta simulada (PVs) y la respuesta obtenida con el PLC (PVr) para proceso de primer orden.

#### Proceso de segundo orden

El sistema de segundo orden implementado es un circuito RC de dos mallas (ver Figura 14) el cual es análogo a un lazo de presión neumática.

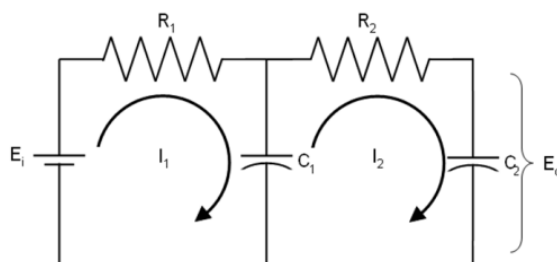


Fig. 14: Circuito RC análogo a un sistema de presión

El circuito de la Figura 14 puede ser representado con la función de transferencia de la expresión dada por la ecuación (63).

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (63)$$

En la Tabla 2 se observan los valores de los elementos utilizados en la implementación del circuito RC de la Figura 14. En el análisis de resultados se utilizan los valores medidos de estos elementos.

Tabla 2. Valores de los elementos usados en el circuito de la Figura 14.

Elemento	Valor nominal	Valor real
$R_1$	820Ω	807.6Ω
$R_2$	10,000Ω	9,860Ω
$C_1$	470E-6F	483E-6F
$C_2$	100E-6F	100.5E-6F

La función de transferencia (63) con la sustitución de los valores reales del sistema de la Figura 14 está dada por la expresión (64).

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{2.587}{s^2 + 3.783s + 2.587} \quad (64)$$

Para el cálculo de las ganancias del controlador PI, se propone un tiempo de establecimiento deseado de 3.15 segundos, mientras que el sobrepaso deseado será del 8%. Considerando estas especificaciones temporales se calculan las ganancias para el controlador PI como  $K_c=2.0603$  mientras que  $T_i=1.1277$ .  $T_i$  debe introducirse en la plataforma del PLC como  $T_i/60=0.019$ , redondeado a 0.02 debido a que, como ya se comentó, la plataforma no acepta milésimas. En la Figura 15 se muestran los parámetros que, a partir de la aplicación del método de diseño propuesto, se introdujeron al módulo PID del PLC. Se sigue el mismo procedimiento de configuración de parámetros anteriormente mencionado.

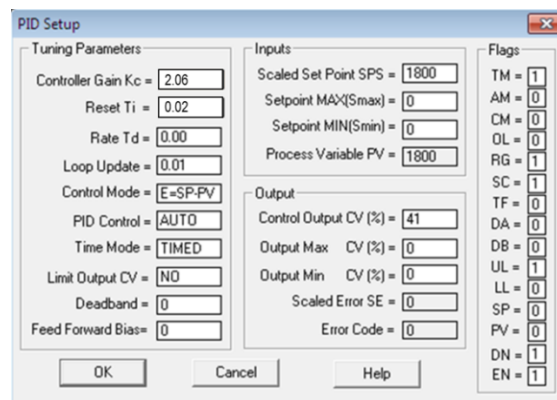


Fig. 15: Configuración del módulo PID del PLC para el ejemplo 2.

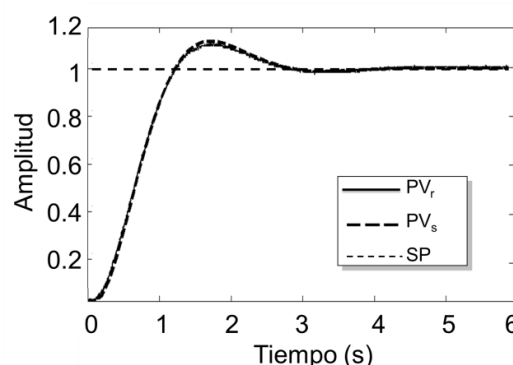


Fig. 16: Comparación entre la respuesta simulada (PVs) y la respuesta obtenida con el PLC (PVr) para el ejemplo 2.

En la Figura 16 se aprecia una comparación entre la implementación y una simulación con el PID discreto y los parámetros calculados; puede observarse que la desviación entre la implementación y la simulación es mínima. En este caso particular puede apreciarse que, el sobrepaso es prácticamente el mismo que el propuesto, ya que con las ganancias se logra la cancelación del cero en lazo cerrado, con el tercer polo del denominador.

## CONCLUSIONES

La sintonización de controladores PID por ubicación de polos presenta varias ventajas cuando se cuenta con un modelo lineal e invariante en el tiempo suficientemente representativo del proceso a controlar. De los resultados mostrados se puede concluir que el método propuesto simplifica a los diseñadores la labor de sintonización de controladores PI cuando se lleva a cabo una ubicación de polos en lazo cerrado a partir de la definición de características dinámicas deseadas en el tiempo. La respuesta de los sistemas físicos probados bajo el diseño de parámetros con la metodología propuesta corresponde casi en totalidad con la respuesta esperada según las simulaciones hechas. Por lo anteriormente declarado, los estudiantes pueden lograr un entendimiento completo de este método analítico para la sintonización de ganancias de controladores PI, ya que siguen estructuradamente el algoritmo didáctico y finalmente lo implementan, obteniendo los resultados esperados en la respuesta dinámica del sistema, por los parámetros característicos propuestos por ellos mismos.

## REFERENCIAS

- Åström K. J. y Hägglund T., *PID Controllers: theory, design and tuning*, Instrument Society of America, USA (1995).
- Allen Bradley, Módulos analógicos Compact E/S, (2000).
- Basilio J.C. y Matos S. R., *Design of PI and PID Controllers With Transient Performance Specification*, IEEE Transactions on Education, Vol. 45, No. 4, 364-370 (2002).
- Cominos P. y Munro M., *PID Controllers: recent tuning methods and design to specification*, IEE Proc.-Control Theory Appl., 149(1), 46-53 (2002).
- Ender, D., *Process control performance, not as good as you think*. Control Engineering, 40, p. 180-190,(1993).
- Franklin G.F., Powell J. D. y Workma M., *Digital Control of Dynamic Systems*, 3a ed., Addison Wesley, USA (1998).
- Huba M. y Simunek M., *Modular Approach to Teaching PID Control*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 54, No. 6, 157-168 (2007).
- Lakshmi A., Naveenkuman B., Balaji A. y Bharathi N., *Experimental validation of PID based cascade control system through SCADA-PLC-OPC and internet architectures*, Measurement, Vol. 45, No. 4, 643-649 (2012).
- Lin S. y Tsai C., *Development of a Self-Balancing Human Transportation Vehicle for the Teaching of Feedback Control*, IEEE Transactions on Education, Vol. 52, No. 1, 157-168 (2009).
- Márquez D. y Cárdenas O., *Implementación de un Laboratorio Virtual para la enseñanza de Controladores PID*, Información Tecnológica, Vol. 19, No. 3, 75-78 (2008).
- Ogata K., *Ingeniería de Control Moderna*, 4ª ed., Pearson/Prentice Hall, México (2003).
- Poor H., Burcsi P. y Kovács A., *An algorithm checking a necessary condition of number system constructions*, Annals Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp., 25, 143-152 (2005).
- Ramasamy S., Pradhan H., Ramanathan P., Arulmozhivarman P. y Tatavarti R., *A Novel Pedagogical Approach to Teach PID Controller with LabVIEW Signal Express*, AICERA, 2012 IEEE International Conference on, 1-8, (2012).
- Saglam G., Celal C. y Kurtulan S., *A new PI tuning method for an industrial process: A case study from a micro-cogeneration system*, Energy Conversion and Management, Vol. 67, 226-239 (2013).