



Formación Universitaria

E-ISSN: 0718-5006

citrevistas@gmail.com

Centro de Información Tecnológica

Chile

García, Martha L.; Benítez, Alma A.
Diseño e Implementación de Tareas para Apoyar el Aprendizaje de las Matemáticas
Formación Universitaria, vol. 6, núm. 1, 2013, pp. 13-19
Centro de Información Tecnológica
La Serena, Chile

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=373534504003>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Diseño e Implementación de Tareas para Apoyar el Aprendizaje de las Matemáticas

Martha L. García⁽¹⁾ y Alma A. Benítez⁽²⁾

(1) Instituto Politécnico Nacional, ESIME-ZACATENCO, Avenida Instituto Politécnico Nacional S/N, Col. Lindavista, CP 07738, México D. F.- México (e-mail: martha.garcia@gmail.com).

(2) Instituto Politécnico Nacional, CECyT 11, Wilfrido Massieu, Av. de los Maestros 217, Col. Casco de Santo Tomás, CP 11340, México D. F.- México (e-mail: abenitez@ipn.mx).

Recibido Jun. 28, 2012; Aceptado Jul. 25, 2012; Versión final recibida Sep. 14, 2012

Resumen

Se presenta una propuesta para realizar la asignación de tareas que apoyen el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de primer año universitario. El trabajo tiene dos objetivos principales: i) analizar las características que se deben tomar en cuenta al diseñar una tarea matemática, para que sea considerada una buena oportunidad de aprendizaje para los estudiantes; y ii) analizar los resultados del trabajo de un grupo de veinte estudiantes del primer semestre de una carrera de ingeniería. El trabajo de los estudiantes en las tareas asignadas se clasificó para su análisis tomando en cuenta semejanzas en los procedimientos utilizados. Los resultados muestran que el aprendizaje de los estudiantes se ve favorecido cuando existe congruencia entre la demanda cognitiva de las tareas, el contenido matemático de los problemas y los objetivos curriculares.

Palabras clave: matemáticas, asignación de tareas, demanda cognitiva, enseñanza-aprendizaje, razonamiento

Design and Implementation of Homework to Facilitate the Learning of Mathematics

Abstract

This paper presents a proposal for assigning homework that facilitates the learning of mathematics for freshmen students. The study has two main objectives: i) to analyze the features that must include a homework of math so it can be considered as a good learning opportunity for students; and ii) to analyze the work of a group of twenty students of the first semester of an engineering course. For the analysis, the work of the student in the tasks assigned was classified considering the similitude between the school assignments. The results show that the learning process of the students is favoured when there is a clear relation between the cognitive demands of the homework, the math content of the problems and the academic objectives of the course.

Keywords: mathematics, homework assignment, cognitive demand, teaching-learning, reasoning

INTRODUCCIÓN

La última década del siglo XX y primera década de este siglo se han caracterizado por una creciente preocupación, por dar solución a diferentes problemas: mundiales de contaminación del medio ambiente; aumento en la demanda de las fuentes de energía; agotamiento de los recursos naturales, extinción de algunas especies de la flora y la fauna y aumento de la pobreza. Ante este panorama, una demanda social es que los países desarrollen políticas de crecimiento que garanticen la satisfacción de las necesidades fundamentales de las personas a la educación vivienda y trabajo, sin poner en riesgo las oportunidades para las próximas generaciones. Con este fin, los dirigentes de los sistemas educativos, recomiendan promover el desarrollo de competencias genéricas y específicas de cada área temática, en el caso de la Matemática que es el área temática de este trabajo, se enfatiza: a) que las matemáticas del bachillerato deben contribuir para desarrollar competencias para concebir esta disciplina: como una herramienta para entender e interpretar un fenómeno y no como una secuencia de algoritmos para ser memorizados y aplicados; como una forma de identificar patrones, realizar conjeturas y verificarlas y de comunicar el conocimiento matemático que adquieren, a sus compañeros y profesores, utilizando el lenguaje formal y el escrito (ICAS, 2010); b) en la universidad se mencionan tres destrezas que cualquier graduado en matemáticas o áreas afines debería poseer, la capacidad de idear demostraciones, la capacidad de modelizar matemáticamente una situación, y la capacidad de resolver problemas con técnicas matemáticas (Tuning Educational, 2003, p. 182).

Para el desarrollo de las competencias específicas en matemáticas, es esencial vincular los objetivos curriculares con los materiales y actividades empleados por el profesor en el aula. Para que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas se requiere que los profesores, proporcionen a sus estudiantes oportunidades de aprendizaje, *tareas matemáticas*, que pongan en juego estas habilidades (García y Benítez, 2011a). La necesidad de brindar a los estudiantes oportunidades de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de competencias en el área de matemáticas, dio origen a una de las preguntas que guiaron la investigación con números de registro 20110397 y 20111060 efectuada en el Instituto Politécnico Nacional (IPN). ¿Qué características debe tener una *tarea matemática* para que sea una buena oportunidad de aprendizaje? Para dar respuesta a la pregunta se establecieron los siguientes objetivos: a) Analizar dos tareas matemáticas de acuerdo con el nivel de demanda cognitiva que requieren de los estudiantes; b) Analizar el trabajo de los estudiantes en estas tareas

Con el propósito de establecer la perspectiva teórica del proyecto se hará referencia a algunos conceptos considerados para el análisis: Schultz (2009) define el término *tarea* como una actividad que se lleva a cabo en la clase y que dirige la atención de los estudiantes para desarrollar una idea matemática particular, también es posible utilizar una secuencia de tareas para formar la idea, cada una de ellas incluye problemas o ejercicios. Las tareas diseñadas o seleccionadas por el profesor deben promover el desarrollo de competencias genéricas y de competencias específicas en matemáticas, por lo que resulta fundamental conocer cuáles son las características que hacen que una tarea cumpla con estos objetivos.

Ponce Preiss y Núñez (2010) consideran que las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes no son creadas por incluir la resolución de problemas como actividad primordial en las clases de matemática, sino que es el tipo de pensamiento que los estudiantes ponen acción al resolver los problemas lo que determina su aprendizaje; por lo que las investigaciones sobre los procesos que se desarrollan en las aulas, acerca de las relaciones entre las características de la instrucción y los aprendizajes de los estudiantes, se convierten en una importante herramienta para mejorar los aspectos deficientes.

Smith y Stein, (1998) señalan que una tarea matemática puede ser analizada considerando el tipo de razonamiento que los estudiantes ponen en práctica para realizarla y utilizan el término demanda cognitiva para hacer referencia al tipo y al nivel de pensamiento que los estudiantes requieren para involucrarse y resolver con éxito la tarea. Este concepto permite clasificar el tipo de razonamiento que la tarea demanda de los estudiantes. Los autores consideran los siguientes niveles para clasificar las tareas: a) Bajo nivel de demanda cognitiva (Memorización); b) Bajo nivel de demanda cognitiva (Procedimiento sin conexiones); c) Alto nivel de demanda cognitiva (Procedimiento con conexiones) y d) Alto nivel de demanda cognitiva (Trabajar en matemáticas).

En particular, las tareas matemáticas que se incluyen en este documento se ubicaron en el nivel tres de demanda cognitiva: Alto nivel de demanda cognitiva (Procedimiento con conexiones), sus características se presentan en la Tabla 1. Una característica que se considera fundamental de este nivel es el manejo de representaciones, que por una parte contribuyen para el razonamiento de los estudiantes y por otra para el desarrollo de significados. Parnafes y Di Sessa, (2004) consideran que el razonamiento de los estudiantes está vinculado con la representación que emplean; cada representación resalta aspectos de un concepto, de tal forma que al emplear varias representaciones los estudiantes enriquecen la comprensión del mismo

Al respecto García y Benítez (2011b) analizaron la forma en que los estudiantes relacionan diferentes representaciones cuando resuelven tareas matemáticas, señalan que la información subyacente en cada representación no es percibida en la misma forma por todos los estudiantes y que una tarea puede promover el manejo de diferentes representaciones, establecer conjeturas y verificarlas así como la transferencia de conocimiento adquirido en cursos anteriores.

Durante el proceso de resolución de una tarea las estrategias didácticas del docente resultan primordiales, ya que son éstas las que pueden modificar o mantener la demanda cognitiva durante el desarrollo de la tarea, al respecto Torres, Reyes y Barrera (2011) reportan que la formulación constante de preguntas a los estudiantes y la atención que se brinda a las respuestas de los estudiantes, orientan las acciones de los estudiantes hacia la búsqueda de relaciones, significados o explicaciones y fomentan la discusión con lo que se mantiene un alto nivel en la demanda cognitiva de una tarea.

Tabla 1: Tareas con alto nivel de demanda cognitiva

Características	Relación con el trabajo de los estudiantes en la primera tarea	Relación con el trabajo de los estudiantes en la segunda tarea
Orientan al uso de procedimientos promueve el entendimiento de conceptos e ideas matemáticas	Los estudiantes modifican el número de periodos que hermanece el dinero en la institución bancaria para dar sentido al término interés compuesto, y comprender la variación de la función.	Los estudiantes inician la exploración representando pirámides de diferentes niveles para identificar el número de cajas necesarias en cada caso.
Sugieren trayectorias explícitas o implícitas a seguir relacionadas con conceptos e ideas	Se incluye la notación Q_0 , α y Q_n lo que sugiere la exploración del problema con un caso particular.	Se solicita elaborar una tabla que incluya las variables niveles y cajas para que identifiquen regularidades en las series que forman la tabla: Estas actividades son la base de procesos cognitivos particulares Parnafes y Di Sessa, (2004).
Representadas en múltiples formas, Establecen conexiones entre representaciones	Se presenta la tarea en lenguaje verbal, se utiliza la representación numérica para explorar el problema. La tarea demanda el análisis de las relaciones entre las variables para identificar el comportamiento de la función.	Se presenta la tarea en lenguaje verbal, el enunciado sugiere el uso de las representaciones icónica y numérica. La tarea demanda relacionar las representaciones utilizadas para analizar y proponer una relación entre las variables.
Requieren alto grado de esfuerzo cognitivo, y relación entre los conceptos para completar la tarea exitosamente	Los estudiantes se conectan con la tarea mediante el análisis de distintas formas de relacionar las variables del problema y relacionan la información con conceptos conocidos como la variación lineal.	El manejo de la representación numérica favorece el establecimiento de conjeturas y la verificación de las mismas para relacionar las variables del problema.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada en esta investigación es de tipo cualitativo y permitió documentar y analizar el tipo de razonamiento que los estudiantes siguieron al realizar las tareas. En los trabajos que se ubican en un paradigma cualitativo, se concibe que la realidad es creada por los sujetos y se analizan las formas en que estos entienden un contexto, explican, actúan y manejan las situaciones cotidianas a las que se enfrentan

Primera Tarea: Interés compuesto: En las instituciones bancarias anuncian que el interés que pagan a un cliente se aplica diariamente, por hora e incluso por minuto o fracción de minuto. Cuando esto ocurre, se dice que el interés se compone o capitaliza continuamente. Si Q_0 es la cantidad inicial de dinero; α es el interés generado en un periodo y Q_n es la cantidad de dinero acumulada en una cuenta de ahorros después de n periodos. Determina un modelo para calcular la cantidad de dinero acumulada al final de n periodos.

Segunda Tarea: La pila triangular: El problema original fue propuesto por Bassein (1993, p. 7). Se quiere construir una pila triangular de cajas. Determina el número de cajas requeridas para formar una pila de una altura dada, en este problema, las cajas son rectangulares y con el mismo tamaño. La altura de la pila se medirá en términos del número de niveles que tenga la pila. Por ejemplo, una pila de tres niveles tendrá una altura 3. En la Tabla 1 se analizan las características de las dos tareas anteriores.

El contenido matemático de las tareas: Las tareas incluyen ideas matemáticas que se consideran esenciales para analizar la variación de una función i) Conformar una idea global del comportamiento de una función, analizando el cambio en la variable independiente y su relación con el cambio en la variable dependiente; ii) Dar sentido a la función que modela el problema, proponiendo diferentes relaciones entre las variables involucradas en el problema.

Relación del contenido matemático de las tareas con los objetivos curriculares: El objetivo de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral es que el estudiante aplique los conceptos básicos como el de función real de variable real, a la solución de problemas en diferentes contextos. Como se mencionó en el párrafo anterior, el contenido matemático de las tareas pone énfasis en el análisis del comportamiento de la función que modela la situación, y las tareas tienen como característica importante el establecer relaciones entre diferentes representaciones, lo que contribuye de acuerdo con Parnafes y Di Sessa, (2004) al desarrollo de significados relacionados con conceptos, en este caso con el concepto de función.

Los sujetos, la organización de las sesiones y los materiales: La tarea se desarrolló con un grupo de 20 estudiantes inscritos en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral del primer semestre de una carrera de ingeniería. Las fuentes para recolectar los datos incluyeron: reportes escritos con lápiz y papel, reportes elaborados en Word, grabaciones en video y archivos electrónicos de Excel. En la dinámica de trabajo se identificaron tres etapas: la primera de trabajo individual, la segunda de trabajo en parejas aunque también se identificaron episodios de trabajo entre diferentes parejas y una tercera etapa de discusión con el grupo completo. Los estudiantes trabajaron en las tareas durante dos sesiones de 1 hora 30 minutos cada una.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Después de analizar los datos de las diferentes fuentes de información utilizadas, se clasificaron los trabajos de los estudiantes tomando en cuenta semejanzas en los procedimientos utilizados. Los trabajos seleccionados muestran una forma de trabajo representativa del grupo completo.

Elementos de análisis: (a) Uso de procedimientos conocidos; b) Interpretación de la información subyacente en las representaciones numérica y simbólica y relación entre representaciones; c) Conjeturas y justificación de las mismas; d) Propuesta de diferentes funciones para modelar el problema; e) Comparación y evaluación de heurísticas utilizadas, así como comunicación de resultados.

Resultados de la primera tarea

Los estudiantes iniciaron la exploración del problema proponiendo un caso particular. Cada pareja propuso una cantidad inicial, un interés fijo y un periodo específico. Con estos datos calcularon la cantidad acumulada Q_n que se tendría al finalizar el periodo propuesto. Un ejemplo de esta forma de trabajo lo observamos en el documento de Carlos, quien propuso una cantidad inicial de \$800, un porcentaje de 30% anual y calculó la cantidad acumulada al final de uno, dos y tres años. El cálculo lo realizó multiplicando el interés generado con la cantidad inicial, por el número de periodos propuesto, más la cantidad inicial Figura 1.

Esta forma de trabajo fue común en los estudiantes al iniciar la exploración de la tarea, lo que muestra una tendencia a considerar que la cantidad acumulada varía en forma lineal, este tipo de variación forma parte de los antecedentes académicos de los estudiantes; lo que hace suponer que en esta fase no habían comprendido el significado de un interés compuesto por lo que recurrieron a sus conocimientos previos. Para que comprendieran el significado de un interés compuesto fue esencial el intercambio de ideas con otros compañeros del grupo. Después de la interacción entre parejas de estudiantes, las concepciones originales se modificaron (variación lineal) y procedieron a ensayar diferentes relaciones entre las variables presentes en la tarea.

1.- Se desea saber la rapidez con que una cantidad de dinero Q_0 aumenta en 1 año (un periodo).

Cantidad $Q_n = \left(\frac{Q_0 \cdot x}{100} \right) n + Q_0 = 1040$ en un año

$800 = Q_0$

$x = 30$

$n = 2$

$\left(\frac{800 \cdot 30}{100} \right) 2 = 1280$ en 2 años

$(8 \cdot 30) 3 = 1520$ en 3 años

Fig. 1. Trabajo de Carlos y Edgar en la etapa de exploración

Carlos y Edgar identificaron que la cantidad acumulada en cada periodo se modificaba, pero no en qué forma ocurría, en la Figura 2 se observa que mantuvieron constante la cantidad inicial y la multiplicaron por el interés, lo que los llevó a un resultado incorrecto. Después de interactuar entre ellos y con otras parejas de estudiantes, Carlos y Edgar finalmente comprendieron el significado de que el interés fuera compuesto. Calcularon en forma correcta, el monto acumulado después de varios periodos; al parecer la exploración numérica ayudó a construir este significado. Sin embargo, no pudieron relacionar esta representación numérica con una expresión algebraica, por lo que su trabajo se basó en la representación numérica.

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= 1000 \\
 Q_1 &= (9.5/100) (1000) + 1000 = 1095 \\
 Q_2 &= (9.5/100) 1000 + 1095 = 1190 \\
 Q_3 &= (9.5/100) 1000 + 1190 = 1285 \\
 Q_4 &= (9.5/100) 1000 + 1285 = 1380 \\
 Q_5 &= (9.5/100) 1000 + 1380 = 1475
 \end{aligned}$$

Fig. 2. Segunda relación propuesta por Carlos y Edgar

Al igual que Carlos y Edgar, la pareja integrada por Luis y Raúl comprendieron la tarea y asumieron que la función que debían utilizar no podía ser lineal, en su reporte final se identificó que relacionaron las representaciones verbal y numérica y propusieron una expresión algebraica para calcular la cantidad acumulada después de 3 periodos, utilizando la cantidad acumulada en los periodos anteriores, como se muestra en la Figura 3. En general, el uso de un procedimiento recursivo no estuvo presente en el trabajo de los estudiantes.

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= \text{Cantidad inicial} \\
 \alpha &= \text{interés en porcentaje} \\
 Q_n &= \text{Cantidad Acumulada} \\
 Q_1 &= \alpha Q_0 + Q_0 \\
 Q_2 &= \alpha Q_1 + Q_1 \\
 Q_3 &= \alpha Q_2 + Q_2
 \end{aligned}$$

Fig. 3. Trabajo realizado por Luis y Raúl

Resultados de la segunda tarea

En esta tarea se identificó la misma estrategia que en la primera, iniciaron la exploración con casos particulares. En la Figura 4 se muestra un ejemplo de esta forma de trabajo, Carlos y Edgar dibujaron pilas de 3, 5 y 6 niveles y enumeraron las cajas utilizadas para construir cada pila.

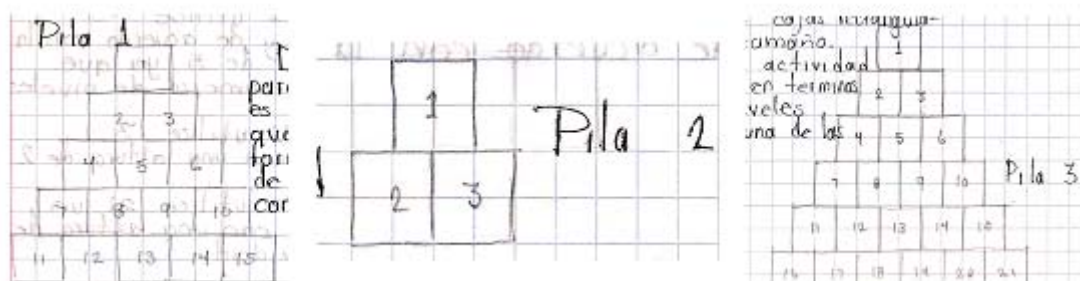


Fig. 4. Pilas dibujadas por Carlos y Edgar en la fase de exploración

Luis y Raúl trabajaron en una forma similar, después de dibujar pilas con diferentes niveles, realizaron una exploración numérica para obtener el número de cajas necesarias para formar una pila de una altura dada, identificaron que el número total de cajas era igual al número de cajas de una pila de altura n más el número de niveles de la pila siguiente $n+1$ (Figura 5).

Otros estudiantes identificaron que el total de cajas lo podían calcular sumando el número de cajas necesarias para formar una pila con un nivel menos más el número de cajas en la base de la pila actual. Con estas evidencias es posible afirmar que los estudiantes que trabajaron de esta forma encontraron una relación a partir del análisis de casos particulares, sin embargo no encontraron una expresión general para determinar el número de cajas necesarias para formar una pila de una altura dada sin depender de las pilas anteriores.

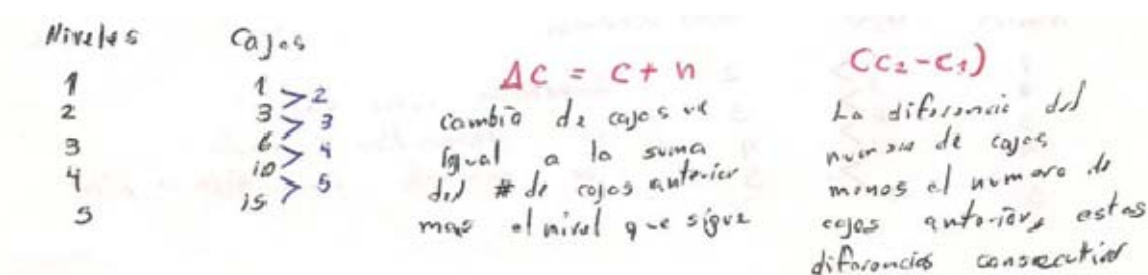


Fig. 5. Exploración numérica realizada por Luis y Raúl

El trabajo de los estudiantes aporta evidencias que permiten afirmar, que proponer casos particulares y trabajar en la representación numérica es el punto de partida para el establecimiento de conjeturas, la identificación de patrones de comportamiento y para orientar el trabajo de los estudiantes hacia la verificación y justificación de sus resultados que son competencias matemáticas que se recomienda desarrollen los estudiantes. De esta forma, las tareas se pueden identificar como buenas oportunidades de aprendizaje, ya que favorecen que los estudiantes conciban a la matemática como una herramienta que les permite analizar y comprender el comportamiento de un fenómeno o situación.

CONCLUSIONES

Las reformas curriculares propuestas en cualquier institución educativa solo pueden hacerse efectivas si los profesores participan en forma activa en estos procesos. Para alcanzar los objetivos curriculares, una labor importante es que reflexionen acerca de las características de las tareas que proponen a sus estudiantes en clase. En el caso de las matemáticas, los resultados que se presentan en este documento, brindan evidencia de la estrecha relación entre el tipo de demanda cognitiva que cada tarea requiere de los estudiantes y las habilidades, conocimientos y actitudes que los estudiantes ponen en práctica cuando trabajan en ellas.

Como se explicó en la metodología el contenido matemático y las características de las tareas que las ubican como de alto nivel de demanda cognitiva, son congruentes con los objetivos curriculares de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral, lo que se verificó con el trabajo de los estudiantes, quienes al trabajar en las tareas, construyeron significados relacionados con el concepto de función, lo que favoreció la propuesta de modelos matemáticos para representar cada situación. En este sentido, los resultados que arroja esta investigación se convierten en un ejemplo puntual para los profesores, quienes pueden contribuir al aprendizaje de sus estudiantes diseñando tareas con características y contenido matemático acorde con los objetivos curriculares de las asignaturas.

Se mostró evidencia de la estrecha relación entre el razonamiento que los estudiantes realizan al trabajar en una tarea y la forma de presentar la tarea, las instrucciones implícitas que en ella se encuentren, los conocimientos anteriores del estudiante y los conceptos que se pretenden desarrollar. De manera puntual, el análisis de los datos permite concluir que las tareas que pueden ser exploradas a través de múltiples representaciones (icónica, verbal, numérica), favorecen el razonamiento de los estudiantes, independientemente de sus conocimientos previos.

AGRADECIMIENTOS

Las autoras agradecen el patrocinio otorgado por la Comisión y Fomento a las Actividades Académicas [COFAA-IPN] y por la SIP del IPN (Números 20100459 y 20111060).

REFERENCIAS

Bassein, S. *An infinite series approach to calculus*. Publish or Perish, Inc., Houston, USA, (1993).

García M. y Benítez A., *Competencias Matemáticas Desarrolladas en Ambientes Virtuales de Aprendizaje: el Caso de MOODLE*, Rev. Formación Universitaria, ISSN: 0718-5006 (en línea), 4(3), 2011. <http://www.citrevistas.cl/a1-formacion.htm>. Acceso: 31 de Agosto (2011).

García M. y Benítez A., *Using Multiple Representations to Make and Verify Conjectures*, US-China Education Review, ISSN 1548-6613, 1(3), 430-437 (2011).

ICAS Intersegmental Committee of the Academic Senates, *Statement of competencies in mathematics expected of entering college students*, (en línea), 2010. California State University and University of California, California, USA <http://icas-ca.org/competencies-in-mathematics>. Acceso 11 Enero (2010).

Parnafes, O. y diSessa, A. *Relations between patterns of reasoning and computational representations*, International Journal of Computers for the Mathematics Learning: 9, 251-280, (2004).

Ponce, L., Preiss D. y Núñez, M. *Demanda cognitiva en la clase de matemáticas chilena*, Primer Congreso interdisciplinario de Investigación en Educación, documento 190 (en línea), Santiago, Chile, 30 de septiembre al 1º de octubre 2010. http://www.cii2010.cl/?page=view_programa_completo Acceso 1 de agosto (2012).

Schultz, K. *Cognitive Demand and Technology Use in High School, Selection and Implementation of task*, PhD, University of Georgia Athens, Georgia (2009).

Smith, M. & Stein, M. *Selecting and creating mathematical task: From research to practice*, Teaching mathematics in the Middle School, 3(5), (1988).

Torres, A., Reyes, A. y Barrera, F. *Procesos de diseño e implementación de tareas de aprendizaje matemático con alta demanda cognitiva*, Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Trabajo 203 (en línea), Estado de México, México, 4,5 y 6 de mayo 2011. http://www.uaeh.edu.mx/sistema_investigacion/funciones/bajarArchivo_web.php?producto=3817&archivo=Torres-Reyes-Barrera-2011.pdf Acceso 11 de agosto (2012).

Tuning Educational Structures in Europe *Informe Final Fase Uno* (2003), (en línea), Universidad de Deusto, España, Ed. J. González. http://www.relint.deusto.es/TUNINGProject/spanish/doc_fase1/Tuning%20Educational.pdf Acceso 8 Marzo (2010).

