



Formación Universitaria

E-ISSN: 0718-5006

[citrevistas@gmail.com](mailto:citrevistas@gmail.com)

Centro de Información Tecnológica  
Chile

De Las Fuentes, Maximiliano; Arcos, José L.; Navarro, Carlos R.  
Impacto en las Competencias Matemáticas de los Estudiantes de Ecuaciones  
Diferenciales a Partir de una Estrategia Didáctica que Incorpora la Calculadora  
Formación Universitaria, vol. 3, núm. 3, 2010, pp. 33-44  
Centro de Información Tecnológica  
La Serena, Chile

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=373534521005>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en [redalyc.org](http://redalyc.org)

# Impacto en las Competencias Matemáticas de los Estudiantes de Ecuaciones Diferenciales a Partir de una Estrategia Didáctica que Incorpora la Calculadora

**Maximiliano De Las Fuentes<sup>(1)</sup>, José L. Arcos<sup>(2)</sup> y Carlos R. Navarro<sup>(1)</sup>**

Universidad Autónoma de Baja California, (1) Facultad de Ingeniería, (2) Planeación Benito Juárez s/n, C.P. 21900 Mexicali, B.C.-México.

(e-mail: maximilianofuentes@uabc.edu.mx, arcos@uabc.mx, carlos\_raul\_n@hotmail.com)

Recibido Jun. 08, 2010; Aceptado Jul. 02, 2010; Versión final recibida Jul. 17, 2010

## Resumen

En este artículo, se presenta un reporte de investigación sobre el aprendizaje de las competencias matemáticas en el curso de ecuaciones diferenciales, en donde se emplea una estrategia didáctica que incorpora el uso de calculadora. El proyecto se llevó a cabo con estudiantes de la Facultad de Ingeniería, Campus Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California. Con el propósito de evaluar los conocimientos matemáticos se aplicó un Pre-Test y un Post-Test. Se seleccionó un grupo experimental en el cual se utilizó una estrategia didáctica basada en la teoría de representación semiótica de Duval, y un grupo de control con el que se usó un enfoque de enseñanza tradicional. El balance general de la investigación respecto de la eficiencia de conocimientos favorece al grupo experimental, particularmente cuando se trata de la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico y formal.

*Palabras clave: competencias matemáticas, lenguaje simbólico formal, representaciones semióticas, ecuaciones diferenciales*

# Impact on Students' Math Skills of Differential Equations from a Teaching Strategy that Incorporates the Calculator

## Abstract

In this paper presents a report of a research work about learning mathematical competences in the differential equations course, in which a teaching strategy that incorporates the use of a calculator. The project was carried out with students from the Faculty of Engineering, Mexicali Campus of the Universidad Autónoma de Baja California. To evaluate knowledge of mathematics a Pre-Test and Post-Test was applied. A teaching strategy based on Duval's semiotic representation theory was used with an experimental group of students and the traditional method used with another control group. The overall balance of the research on the efficiency of knowledge benefits the experimental group, particularly when it comes to the mathematical competencies of using symbolic and formal language.

*Keywords: mathematics competences, formal symbolic language, semiotic representations, differential equations*

## INTRODUCCIÓN

Las actividades en ingeniería relacionadas al diseño e investigación, no sólo requieren de una buena manipulación algebraica, de la determinación de modelos o representaciones algebraicas con las que se pueda estudiar o analizar el proceso físico, químico o fenómeno de que se trate, sino también de una aprehensión conceptual del objeto matemático en cuestión. Solo si es posible operar o trabajar el proceso en distintas representaciones se puede dar un mejor tratamiento de aspectos especializados en nuevas situaciones; y así mismo facultar su estudio. Esta acción presupone la plena comprensión de un concepto matemático; cuanto más si la situación de aprendizaje está enmarcada en un contexto físico o de ingeniería. Los cursos de matemáticas de nivel superior buscan que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos y que puedan ser aplicados en otros contextos diferentes al cual se aprendieron. En ellos, también se espera que los estudiantes desarrollen competencias y habilidades en el manejo de dichos conceptos en sus diferentes representaciones: algebraico, numérico, gráfico e inclusive en el lenguaje natural.

Una situación que impera actualmente en esta universidad son los índices de reprobación estudiantil en los cursos de ecuaciones diferenciales del 25% en promedio, lo cual es preocupante, por tal motivo se rezagan o desertan más de 75 alumnos por semestre solamente debido a esta asignatura. En atención a lo anterior, y centrándonos en la problemática de la enseñanza de las matemáticas en ingeniería, el presente proyecto propone incidir favorablemente en la eficiencia de los conocimientos de los estudiantes, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica de enseñanza que incorpora la calculadora como medio de producción de significados a partir de la vinculación dinámica de 5 registros de representación (íconico, algebraico, tabular, gráfico y verbal) del fenómeno denominado sistema masa-resorte.

Mucho se ha escrito sobre el ámbito de las competencias en la educación (Álvarez, 2006; Proenza y Leyva, 2006; Martínez, 2008; Zabala, 2008; Goñi, 2009), pero para simplificar se definirá como el uso eficiente y responsable del conocimiento para hacer frente a situaciones problemáticas relevantes (Goñi, 2009) para el éxito en el desempeño profesional (Martínez, 2008). Dentro del proyecto PISA ('Programme for Indicators of Student Achievement') se realizó una definición y selección de las competencias consideradas esenciales para la vida de las personas y el buen funcionamiento de la sociedad (Martínez, 2008); y en este marco se identifican 8 competencias básicas y entre ellas se encuentra la competencia matemática.

De acuerdo a PISA (2003b), la competencia matemática enfatiza en el uso funcional del conocimiento matemático en situaciones diversas de manera reflexiva y basada en una comprensión profunda, se aclara que la competencia y el conocimiento no son antagónicos, sino mas bien existe una dependencia y una interrelación entre ambos, el conocimiento matemático no debe verse solamente desde una perspectiva conceptual, es decir una persona no es competente solo por saber algo, o solo por saber hacer algo, sino por saber hacer algo, a partir del saber, es decir saber hacer a partir del saber comprendiendo lo que se hace, como se hace y porque se hace, en este sentido la teoría y la práctica no pueden estar desasociadas. De hecho el cuestionamiento sobre la desconexión entre la teoría y la práctica ha provocado, como consecuencia, una fuerte corriente de opinión favorable a una enseñanza de competencias (Zabala y Arnaud, 2008).

Es importante resaltar la distinción entre conocimiento y competencia, esta última se diferencia radicalmente por la transferibilidad; es decir la habilidad de "ver" la similitud y aplicar lo que saben en nuevos contextos (Goñi, 2009). Por lo que aplicando esto a las competencias matemáticas podemos aseverar que "... los problemas con contextos extra-matemáticos... son preferibles como instrumentos para evaluar la competencia matemática, ya que es más probable encontrar problemas de este tipo en la vida cotidiana" (Proenza y Leyva, 2006, 12). Las competencias, y específicamente las competencias matemáticas valoran el uso armónico de los conocimientos factuales, conceptuales, procedimentales y actitudinales para la reflexión y determinación de soluciones a problemas reales y/o de la vida diaria. Con el objeto de acotar la problemática planteada, solo se estudian los conocimientos conceptuales y procedimentales. Similarmente, las competencias matemáticas como pensar y razonar, argumentar y comunicar, que son

consideradas de acuerdo a PISA (2003b) como generales no serán objeto de análisis por esta investigación, mientras que modelar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje lógico y formal son consideradas como competencias de corte específico.

En esta investigación la eficiencia del conocimiento se considera que puede expresarse de acuerdo a PISA (2003a), mediante las competencias matemáticas siguientes (ver tabla 1): modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico y formal (Martinez, 2008), ya que en conjunto describen los procesos para el dominio del fenómeno sistema masa-resorte; por lo que su análisis permitirá la determinación de la eficiencia de los conocimientos que logran los estudiantes.

Tabla 1: Competencias matemáticas e indicadores de acuerdo a PISA (2003a).

Competencia	Indicadores
Modelar	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Estructurar el campo o situación que va a modelarse.</li> <li>- Traducir la realidad a una estructura matemática.</li> <li>- Interpretar los modelos matemáticos en términos reales.</li> <li>- Trabajar con un modelo matemático.</li> <li>- Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.</li> <li>- Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).</li> <li>- Dirigir y controlar el proceso de modelización.</li> </ul>
Plantear y resolver problemas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados).</li> <li>- Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.</li> </ul>
Representar	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones.</li> <li>- Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito.</li> </ul>
Utilizar el lenguaje simbólico y formal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.</li> <li>- Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.</li> <li>- Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas. Utilizar variables, resolver ecuaciones.</li> <li>- Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.</li> </ul>

Los expertos del estudio PISA/OCDE consideran tres niveles de complejidad a la hora de considerar los ítems con los que se evalúan las competencias: nivel de reproducción, nivel de conexión y nivel de reflexión pues las tareas propuestas a los estudiantes plantean diferentes tipos y niveles de demandas cognitivas. La variable establecida para caracterizar los ítems en la evaluación PISA es la relativa al nivel de complejidad cognitiva con que se requiere la actuación competente de los estudiantes.

## OTROS ANTECEDENTES

### *Teoría de las representaciones semióticas*

Desde la perspectiva de la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente para su estudio y tratamiento se requiere contar representaciones de los mismos, las representaciones externas a las que hacemos alusión pueden ser de carácter geométrico, algebraico y numérico del objeto. Como lo señala el mismo Duval (2000, 4), “el uso de sistemas de representaciones semióticas

para el pensamiento matemático es esencial, debido a que a diferencia de otros campos de conocimiento (biología, geología, física), no existen otras maneras de lograr el acceso a los objetos matemáticos sino producir algunas representaciones". En este sentido, las representaciones permiten el acceso al objeto matemático. A través de estos procesos de representación, tratamiento y conversión se permite exteriorizar las representaciones mentales de los individuos, motivando la retroalimentación y mejoramiento de las mismas. Lo cual conduce a la formación de preceptos matemáticos y a la conceptualización de objetos matemáticos.

Guzmán (1998) al evaluar el desempeño logrado respecto a la noción de función y su significado, en un estudio realizado con estudiantes de cálculo; incluyó la consideración de los registros de representación gráfico, algebraico y el lenguaje natural, reveló la preponderancia que dan los estudiantes a quedarse en el mismo registro en el cual se planteó la pregunta. Hitt (2003) enfatiza la importancia que tiene el balancear los diferentes tipos de representación, pues las actividades en ingeniería de diseño, proyecto e investigación, no sólo requieren de una buena manipulación algebraica, sino de la determinación de modelos o representaciones algebraicas con las que se pueda estudiar o analizar el proceso; Cistac (2009) indica que precisamente en la etapa de construcción inicial de las capacidades tecnológicas es esencial enlazar los conceptos matemáticos con el proceso físico; con lo cual interrelacionar contenidos; y con ello el cambio en las representaciones semióticas. Bajo esta perspectiva, es entonces muy importante que los docentes promuevan entre sus estudiantes situaciones didácticas o problemas en los que para poder resolverlos, utilicen distintos registros de representación. Congruente, el "National Council of Teachers of Mathematics" (NCTM) (Consejo Nacional de profesores de Matemáticas) (Ferrini-Mundy, 2000) incluyó por primera vez las conexiones y representaciones como parte del proceso matemático. Sin embargo para Duval (2006a) para entender las dificultades que varios estudiantes tienen con el aprendizaje de las matemáticas propone dos tipos de transformaciones en las representaciones semióticas: Tratamiento y conversión. Estas transformaciones afectan cualquier actividad matemática y explican el tipo de sistema semiótico que se necesita para una situación específica, pues permiten analizar la causa de los problemas en el entendimiento de las matemáticas y no tratar las deficiencias como frecuentemente se subestiman al considerarlas como una problemática en el aprendizaje de conceptos (Duval, 2006a).

Existen radicales diferencias entre estos dos tipos de representaciones semióticas (Duval, 2006a): 'Tratamiento semiótico' se refiere a transformaciones en las representaciones que ocurren en el mismo registro de representación; mientras que 'Conversión semiótica' se relaciona con transformaciones en las representaciones que ocurren en cambios de registro de representación; por ejemplo pasando de la notación algebraica de una ecuación a su representación gráfica. Estos dos tipos de transformaciones de las representaciones semióticas han de ser entendidas y evaluadas separadamente como fuentes de incomprendición en el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 2006a); a pesar de que la 'conversión semiótica' representa mayor complejidad y dificultad (Duval, 2006b; Radford, 2006) que el 'tratamiento semiótico', pues cualquier cambio en el registro de representación requiere primeramente un reconocimiento de la existencia del mismo objeto entre dos distintas representaciones semióticas; lo cual representa una brecha que hay en el aprendizaje, pues el traslado entre registros no se efectúa espontáneamente (Guzmán, 1998) . Por lo que la habilidad para el manejo ('tratamiento semiótico') de un registro de representación a otro es frecuentemente un componente crítico en el progreso del aprendizaje de las competencias matemáticas, esta transformación puede vincularse con la competencia matemática de utilizar el lenguaje simbólico y formal propuesta por PISA (2003a).

La importancia y deficiencia en las transformaciones de las representaciones semióticas, es ilustrada en un estudio en nuestra propia universidad, donde De Las Fuentes (1998) realizó una valoración sobre la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos para funciones lineales y cuadráticas; se observó en general que los cambios de registro que más les causó dificultad a los estudiantes fueron del gráfico al algebraico y del verbal al algebraico, además de deficiencias con relación a la asociación de las variables visuales y las unidades significativas de la expresión algebraica. Estudios muestran claramente que la enseñanza universitaria se centra en el funcionamiento dentro del cuadro analítico o algebraico, en una praxis algorítmica y en la evaluación de las competencias algebraicas correspondientes (Artigue, et al, 1995). Jiménez (2000), presenta una reflexión en torno a la

vinculación dinámica de las representaciones del conocimiento matemático como poco aprovechada en relación a los dispositivos electrónicos con los cuales hoy en día se cuenta. Lo cual es lamentable, pues tal y como lo plasma Giandini y Salerno (2009, 25), “el uso de la tecnología en los procesos de enseñanza y de aprendizaje da la posibilidad de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples registros de representación, dentro de esquemas interactivos, difíciles de lograr con los medios tradicionales... [y] permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos”

#### *Incorporación de tecnología en la enseñanza de las matemáticas*

La incorporación de la tecnología promueve modificaciones en la forma de enseñanza y en la manera en que el estudiante aprende; estudios realizados por Artigue (1995) señalan que la enseñanza universitaria a los estudiantes se les prepara con destrezas y capacidades algorítmicas, sin incorporar ni los avances en el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes ni los recursos tecnológicos modernos. Similarmente, Demana y Waits (1998) señalan de la necesidad no solo de preparar a los docentes en el campo tecnológico y proporcionarles material didáctico basado en tecnología, sino de proveer un desarrollo profesional del docente. De Las Fuentes (1998) señala que la dificultad de que los estudiantes no vinculen de manera apropiada los conceptos matemáticos y los algoritmos asociados a los mismos en la resolución de determinados problemas –particularmente de aquellos que tienen que ver con el estudio y comprensión de fenómenos que se presentan en el campo de la ingeniería–, parece deberse a dos importantes aspectos, por una parte, la preponderancia de la enseñanza de las matemáticas basadas en un enfoque tradicional; y por otra parte, la ausencia o el uso inadecuado de la tecnología (por las concepciones de los profesores).

Rosa (2001) apunta que el atraso existente en la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas se debe entre otras cosas a las concepciones de los docentes respecto a la enseñanza y aprendizaje, así como también a la ignorancia de las potencialidades que dichos instrumentos poseen. Pues tal y como Laborde (2003) y Saucedo (2005) señalan que la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas permite a los estudiantes visualizar fenómenos matemáticos, hacer conexiones y realizar experimentos, promoviendo una mejor comprensión en el estudiante del concepto matemático. Una experiencia propia en la que se diseñó e implementó una estrategia didáctica que incorpora la calculadora Voyage 200 para abordar derivadas sucesivas, permite concluir un impacto favorable en la asociación de características geométricas esenciales (puntos críticos, inflexión, concavidades). Una de las consideraciones medulares de la incorporación de las calculadoras en la enseñanza tiene que ver con el balance en el uso o distribución del tiempo, Demana y Waits (1998) apunta que si bien es cierto anteriormente la distribución mayoritaria del tiempo de una clase se enfocaba al cómputo de lápiz y papel, además de una incipiente resolución de problemas como consecuencia del desarrollo conceptual, ahora, la resolución de problemas, la argumentación e interpretación, así como el cómputo (mental, papel y lápiz y el cómputo con tecnología) deben estar equilibrados. Infinidad de autores (Moreno y Rojano, 1999; Hernández, 2000; Karen, 2000; Queralt, 2000; Bower, 2003; Heugl, 2003; Laborde, 2003; De Faria, 2005; Eduteka, 2006) confirman que la incorporación de la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas contribuye a modificar los enfoques de enseñanza y estimulan la actividad intelectual de los estudiantes; pero que existe resistencia del profesorado para su aceptación; y que es necesario investigación sobre los efectos cognitivos que provoca en los estudiantes, las habilidades y actitudes que favorece.

En el presente proyecto de investigación se diseña e implementa una estrategia didáctica replicable en la enseñanza de las matemáticas; que contribuya a mejorar la eficiencia de los conocimientos alcanzados por los estudiantes cuando se aborda el estudio del fenómeno sistema masa-resorte, que involucra ecuaciones diferenciales de segundo orden, se utiliza como herramienta tecnológica la calculadora TI-voyage 200. La cual apoya y permite visualizar y conectar de manera dinámica las distintas representaciones en la educación matemática a saber: gráfica, numérica, algebraica e icónica o física virtual. Se presentan los resultados tanto del diagnóstico Pre-Test como del comparativo de las competencias matemáticas logradas por los estudiantes a partir de la implementación de la estrategia didáctica y el Post-Test.

## DESARROLLO METODOLÓGICO

El problema de investigación se ha planteado mediante el siguiente cuestionamiento: ¿Existe diferencia de la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico y formal empleando el sistema masa-resorte que alcanzan los alumnos de ingeniería cuando son sometidos a una enseñanza tradicional y con estrategia didáctica alterna que incorpora tecnología de la calculadora graficadora en la Facultad de Ingeniería Mexicali?. Para efecto de dar respuesta a esta interrogante se han planteado el par de hipótesis siguientes: 1) *Hipótesis nula*: La enseñanza de los conocimientos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte en el programa de ecuaciones diferenciales mediante una estrategia didáctica que incorpora la calculadora tiene igual influencia en el nivel de eficiencia que alcanzan los alumnos en la competencia de utilización del lenguaje simbólico y formal, que la enseñanza basada en un esquema tradicionalista; y 2) *Hipótesis alternativa*: La enseñanza de los conocimientos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte en el programa de ecuaciones diferenciales mediante una estrategia didáctica que incorpora la calculadora tiene una mayor influencia en el nivel de eficiencia que alcanzan los alumnos en la competencia de utilización del lenguaje simbólico y formal, que la enseñanza basada en un esquema tradicionalista.

Aquí se evalúa la eficiencia de los conocimientos mediante la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico y formal de los estudiantes, como reflejo del 'tratamiento semiótico' propuesto por Duval (2006a) como aproximación a la evaluación del logro educativo y desempeño matemático de los estudiantes de ingeniería. Se realizó un estudio explorativo y comparativo con dos grupos de estudiantes en la Universidad Autónoma de Baja California, en virtud de manipular de manera intencional variables independientes y se mide la variable dependiente, así como para el establecimiento de la comparación de los dos grupos el diseño de investigación que se utiliza es el denominado experimento "puro" de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006). Con el objeto de comprobar la conjectura objeto de esta investigación se usa la prueba de medias de Walpole y Myers (1989).

Con el propósito de establecer las condiciones de los estudiantes en cuanto a la competencia matemática específica de la utilización del lenguaje simbólico y formal, lograda hasta el momento previo al inicio de abordar el estudio del fenómeno sistema masa-resorte, se diseñó y aplicó un instrumento de medición diagnóstico o Pre-Test, con la consideración de los criterios de Contreras, Bachhoff y Larrazolo (2004) para la generación de ítems en la construcción de exámenes del tipo criterial alineado con el currículum, a la vez es matricial ya que involucra amplitud en contenidos conceptuales y procedimentales, los cuales han sido estudiados y tratados por los estudiantes tanto en cursos de cálculo diferencial e integral, probabilidad y estadística y métodos numéricos previos, como en el propio de ecuaciones diferenciales

La estrategia didáctica es diseñada a partir de las teorías cognitivas de Duval (1993, 2000, 2006a, 2006b) y Hitt (1991, 2003) toda vez que en las actividades que los estudiantes tienen que realizar en la estrategia se enfatiza en la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro, además de promover el equilibrio de los distintos registros de representación (algebraico, numérico y geométrico) para no privilegiar en particular alguno de ellos; los avances logrados en el campo tecnológico por Kutzler (2003), Demana y Waits (1998) rescatando dos aspectos de la enseñanza de las matemáticas, trivialización y visualización. Y finalmente, Laborde (2003) por su aplicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, específicamente por promover en la estrategia didáctica la construcción de relaciones entre las distintas representaciones, así como de la posibilidad de conexión entre los registros, además de privilegiar los cálculos rápidos mediante el sistema de cómputo algebraico integrado a la calculadora e inherente a la propia estrategia didáctica. En De Las Fuentes y Arcos (2007) se identifican algunos aspectos que son considerados e integrados en el diseño de la estrategia didáctica, a saber: el manejo insuficiente de las condiciones iniciales del sistema masa-resorte en el lenguaje matemático, el énfasis en el proceso de resolución de las distintas ecuaciones diferenciales que modelan los movimientos del sistema masa-resorte. Así como también se dejó entrever como necesario reforzar el tránsito del contexto numérico al físico, y del contexto analítico o algebraico al físico.

La estrategia didáctica en su totalidad se conformó mediante 13 actividades en los que los conceptos matemáticos involucrados en las actividades de aprendizaje van alternando su rol, de herramienta a objeto (Douady, 1985) y viceversa además se destaca el trabajo por parte de los estudiantes en los diferentes indicadores que conforman cada una de las competencias matemáticas a evaluar. Cada actividad fue descrita en cuanto a la competencia preponderante, las actividades cognitivas relacionadas (representación, tratamiento y conversión) y los registros de representación relacionados. La Tabla 2 muestra la especificación de la actividad número 7 de la estrategia didáctica, en la cual se pretende fortalecer las competencias señaladas, involucrando de manera importante la interacción del estudiante con la calculadora y el contenido curricular planteado. Esta actividad incorpora para su desarrollo un programa para la calculadora, con el propósito de que el estudiante interactúe de manera virtual con el sistema masa-resorte e infiera los rasgos de velocidad, aceleración, continuidad y restitución del movimiento sobrearmortiguado.

Tabla 2: Especificación de la actividad número 7

No. de Actividad	Competencias específicas relacionadas	Actividades cognitivas relacionadas	Registros de representación relacionados	Dialéctica herramienta objeto	Contenido curricular	Uso de la calculadora
7	Representar, Modelar, Utilizar el lenguaje simbólico y formal	Representación, Tratamiento y Conversión	Algebraico y Gráfico	Herramienta	Comportamiento gráfico, condiciones iniciales, ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, ecuación de movimiento	Editor de programas

La calidad del experimento fue verificada mediante su validez interna de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006). Para realizar la experimentación, los estudiantes se organizaron en grupos formados por tres integrantes; haciéndoles entrega a cada uno de ellos una calculadora simbólica del tipo voyage 200. Previamente se les capacitó en el uso básico de la máquina (edición de ecuaciones, graficación de funciones, ventanas de graficación, determinación de críticos relativos y raíces reales), ya que algunos de ellos no habían tenido contacto con la calculadora simbólica voyage 200. Se entregó a cada estudiante del equipo un cuadernillo con las actividades de aprendizaje y las instrucciones a seguir para el desarrollo de las actividades fueron dadas verbalmente por el instructor. También se indicó que las respuestas que fueran anotadas no las borraran, aunque después consideraran que estas estuvieran equivocadas. Posteriormente, se discuten las propuestas a nivel grupal y el profesor institucionaliza el conocimiento adquirido.

Participaron en la investigación 66 estudiantes de la Facultad de Ingeniería, 36 de ellos integraban el grupo experimental, y el resto trabajaron de manera tradicional, la experimentación tuvo una duración de 12 días incluyendo la aplicación de la posprueba. El instrumento de medición Post-Test o posprueba está constituido por 37 reactivos y se ha diseñado bajo las mismas consideraciones que el diagnóstico, a diferencia que se aboca a determinar la eficiencia de conocimientos adquirido por los estudiantes en cuanto a sus competencias matemáticas, alrededor de los conceptos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte. En la figura 1 se muestra la caracterización de 4 reactivos representativos del Post-Test, en cuanto a la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico y formal, así como de cada uno de sus respectivos indicadores.

El Post-Test se administró posterior a la terminación de la aplicación de la estrategia didáctica en el grupo experimental y de igual forma para el caso de los estudiantes del grupo de control, de manera que la comparación de los resultados permite responder al planteamiento hipotético de origen.

No. de Reactivo: 2
Indicador: Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.
Una masa que pesa 4 libras se une a un resorte cuya constante es 18 libras por pie. El periodo del movimiento armónico simple es:
A) $\frac{1}{6}\pi$ B) $\pi$ C) $\frac{1}{12}\pi$ D) $2\pi$
No. de Reactivo: 7
Indicador: Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.
Una fuerza de 400 newtons alarga un resorte 2 metros. Una masa de 50 kilogramos se une al extremo del resorte y se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 10 metros por segundo. Las condiciones del sistema son:
A) $x(0) = -10$ y $x'(0) = 0$ B) $x(0) = 10$ y $x'(0) = 0$ C) $x(0) = 0$ y $x'(0) = -10$ D) $x(0) = 0$ y $x'(0) = 10$
No. de Reactivo: 8
Indicador: Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.
Un sistema masa-resorte tiene las siguientes condiciones iniciales de posición (en pies) y velocidad (en pies por segundo), $x(0) = -2$ y $x'(0) = 2$ , bajo estas circunstancias la masa en $t = 0$ segundos:
A) Se encuentra en reposo      B) Se encuentra 2 pies sobre la posición de equilibrio
C) Se dirige hacia arriba      D) Se presenta un desplazamiento extremo
No. de Reactivo: 18
Indicador: Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos
Un sistema masa-resorte tiene por ecuación de movimiento $x(t) = -e^{-t}$ donde $t$ es el tiempo en segundos y $x(t)$ la posición en pies. La velocidad del contrapeso en $t = 0$ segundos es:
A) 0 pie/s      B) 1 pie/s      C) -1 pie/s      D) indeterminada

Fig. 1: Caracterización de reactivos del Post-Test

La determinación de la eficiencia de los conocimientos que logran los estudiantes se llevó a cabo mediante competencias matemáticas (particularmente sobre la competencia de utilización del lenguaje simbólico y formal), asumiendo el modelo que PISA-OCDE utiliza para las evaluaciones internacionales. Debe señalarse que la competencia de la utilización del lenguaje simbólico y formal incluye al menos cuatro indicadores que permiten la puntualidad en la medición de los conocimientos de los estudiantes, a saber: a) Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; b) Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos; c) Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural; y d) Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.

De acuerdo a PISA (2003b) la competencia matemática enfatiza en el uso funcional del conocimiento matemático en situaciones diversas de manera reflexiva y basada en una comprensión profunda, se aclara que la competencia y el conocimiento no son antagónicos, sino mas bien existe una dependencia y una interrelación entre ambos, el conocimiento matemático no debe verse solamente desde una perspectiva conceptual, es decir una persona no es competente solo por saber algo, o solo por saber hacer algo, sino por saber hacer algo, a partir del saber, es decir saber hacer a partir del saber comprendiendo lo que se hace, como se hace y porque se hace, en este sentido la teoría y la práctica no pueden estar desasociadas. De hecho, Zabala & Arnau (2008) señalan que el cuestionamiento sobre la desconexión entre la teoría y la práctica ha provocado, como consecuencia, una fuerte corriente de opinión favorable a una enseñanza de competencias.

## ANÁLISIS Y RESULTADOS

El diagnóstico permitió establecer la uniformidad en cuanto a las competencias matemáticas de los estudiantes que participaron en la investigación, toda vez que una prueba de medias con un nivel de significancia  $\alpha = 0.05$  evidencia que no hay diferencia en las competencias matemáticas de los estudiantes de los grupos participantes antes de iniciar la experimentación. Los instrumentos de medición diagnóstica y Post-Test fueron diseñados en conjunto tanto por el investigador como por los instructores participantes en la investigación, se incluyeron solo preguntas de opción simple, una correcta y tres distractores, lo anterior con la finalidad de enfatizar de manera más objetiva en el aprovechamiento de los grupos tanto de control como piloto. Cabe señalar que en la aplicación de los instrumentos de medición no se permitió el uso de libros ni calculadora. La confiabilidad del instrumento de medición Post-Test es establecida a partir del método de mitades partidas, obteniendo un coeficiente de 0.81, calificado como correlación positiva considerable de acuerdo a la escala de Hernández (2006).

Los cálculos y resultados de la prueba de igualdad de medias para la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico y formal se llevaron a cabo mediante los índices promedio de dificultad, dicho índice de dificultad está relacionado con la proporción de estudiantes que resuelven correctamente un ítem o reactivo, y se calcula de acuerdo a Crocker y Algina, (1986). La Tabla 3 exhibe los numerales referentes a cada uno de los grupos de investigación, número de alumnos, media aritmética, desviación estándar y variancia. Como puede observarse en los numerales la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico y formal, es favorable para el grupo experimental en el que se implementó la estrategia didáctica. Lo anterior sugiere que la estrategia didáctica diseñada e implementada fortalece de manera sustantiva la competencia matemática citada, de manera inherente la interpretación del lenguaje natural al lenguaje simbólico y formal, así como la traducción y el manejo de ecuaciones, fórmulas y modelos.

Tabla 3. Parámetros estadísticos del Post-Test de acuerdo a su índice de dificultad

Grupo	Competencia	No. de alumnos	Media del índice dificultad $x$	Desviación estándar $s$	Variancia $s^2$
Experimental	Utilización del lenguaje simbólico y formal	36	0.5195	0.1656	0.0274
Control	Utilización del lenguaje simbólico y formal	30	0.3325	0.1505	0.0227

El balance general referido a la eficiencia de conocimientos favorece al grupo experimental, en cuanto a la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico y formal como lo evidenció la prueba de hipótesis de medias respecto al aprovechamiento, en cuanto que con un nivel de significancia  $\alpha=0.05$  se rechaza la hipótesis nula planteada en la investigación, toda vez que se obtiene el estadístico  $z=4.80$  contra el rango de rechazo de la hipótesis nula  $t < -1.96$  o  $t > 1.96$ , lo que significa mayor eficiencia de conocimientos de manera significativa por parte del grupo experimental. Con el propósito de ampliar la información respecto del nivel alcanzado por los estudiantes del grupo experimental y de control, se incorpora la tabla 4, misma que exhibe el número promedio de respuestas correctas y sus parámetros de dispersión. A partir de los numerales obtenidos, en particular sobre el número medio de respuestas correctas, una prueba de hipótesis de medias, con un nivel de significancia  $\alpha=0.05$  y un estadístico calculado  $z=3.58$  indican mayor eficiencia de conocimientos de manera significativa por parte del grupo experimental.

Tabla 4. Parámetros estadísticos sobre el número de aciertos obtenidos en el post-test.

Grupo	Promedio del número de aciertos	Variancia	Desviación estándar	Número de alumnos
Grupo experimental	16.3611	43.8944	6.6253	36
Grupo de control	11.2333	24.9437	4.9944	30

La experiencia investigativa puede considerarse como exitosa y significativa en varios aspectos, por una parte se logra que los estudiantes se apropien intelectualmente del problema a través de

la inclusión de las actividades de la estrategia didáctica y la tecnología de la calculadora graficadora, además se consigue también que el estudiante transite adecuadamente del contexto gráfico al contexto físico virtual, los estudiantes utilizan el lenguaje natural para describir adecuadamente los diferentes tipos de movimiento armónico y amortiguado. Los estudiantes asocian adecuadamente el gráfico de la ecuación de movimiento a partir de la ecuación diferencial que modela el sistema, y viceversa. Se detectó que la mayoría de los estudiantes no están acostumbrados a trabajar en sus clases habituales con estrategias didácticas que incorporan tecnología de la calculadora, sino simplemente con ejercicios más o menos rutinarios con dependencia del profesor como producto de la enseñanza tradicional

La enseñanza de los conocimientos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte en el programa de ecuaciones diferenciales mediante una estrategia didáctica que incorpora la calculadora tiene una mayor influencia en el nivel de eficiencia que alcanzan los alumnos, que la enseñanza basada en un esquema tradicionalista. En este sentido se evidencia mayor eficiencia en la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico y formal, misma que es manifestada de manera particular a través de que el alumno maneja enunciados y expresiones que contienen símbolos, resuelven ecuaciones, decodifican e interpretan el lenguaje simbólico y formal, y traduce favorablemente desde el lenguaje natural al algebraico y viceversa, esta competencia es significativamente importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para ingeniería, toda vez que las actividades en ingeniería de diseño, proyecto e investigación, no sólo requieren del modelado y el planteamiento de los problemas, sino también de una buena manipulación e interpretación de los códigos matemáticos.

## **CONCLUSIONES**

De los análisis y resultados presentados, se pueden obtener las siguientes conclusiones sobre la estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora y su impacto en las competencias matemáticas de los estudiantes de ecuaciones diferenciales:

1. La utilización de la calculadora graficadora, programable y simbólica a partir de la estrategia didáctica diseñada, permite desde nuestra perspectiva utilizar el tiempo de manera más eficiente, toda vez que la manipulación numérica y algebraica puede quedar en un segundo término, privilegiando competencias de modelado y planteamiento y resolución de problemas, en donde de forma directa se exige del alumno el desarrollo de las habilidades de análisis e interpretación.
2. La incorporación de la tecnología al implementar la estrategia didáctica puede extenderse previo diseño a otros temas y conceptos de matemáticas, tales como las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, cálculo de puntos críticos y transformada de laplace; pues consecuentemente con la teoría de Duval de las transformaciones semióticas se enfatizaría en el aprendizaje de las competencias matemáticas sobre la manipulación algebraica y numérica.
3. La utilización de problemas o actividades que incorporen contextos extra-matemáticos, promueve en los estudiantes que visualicen la similitud en nuevos contextos; toda vez que es más probable encontrar este tipo de situaciones en la vida cotidiana, tal y como se refleja en la estrategia didáctica de este proyecto, lo que corrobora una mayor dificultad en la resolución de este tipo de problemas. Esto permite la evaluación de competencias y no simplemente de conocimientos.
4. El abordar el aprendizaje de las competencias matemáticas, tales como: modelado, planteamiento y resolución de problemas, representación y utilización del lenguaje simbólico y formal en sus respectivos indicadores permite de manera más significativa diseñar, planificar y evaluar la estrategia didáctica que se utilice, pues favorece encontrar áreas de oportunidad en los indicadores de las distintas competencias matemáticas, como en este proyecto de investigación se determinó sobre la competencia de utilización del lenguaje simbólico y formal.
5. Para el aprendizaje de las competencias matemáticas el abordar las transformaciones semióticas de Duval en sus componentes de representación, tratamiento y conversión permite identificar la madurez cognitiva del estudiante, pues aunque la actividad de conversión es preponderante para la adquisición de competencias matemáticas, es necesario tener cierta habilidad en los niveles previos.

## REFERENCIAS

- Alvarez, C.Y., *Planificar la enseñanza universitaria para el desarrollo de competencias*, Educatio siglo XXI, 24 , 17-34, (2006).
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez., P., *Ingeniería didáctica en educación matemática*. pp. 97-140. Grupo Editorial Iberoamérica, (1995).
- Bower, B., Brueningsen, C., Brueningsen, E., Gough, S. y Turley, W., *Discovering Math on the Voyage 20: Explorations*. Edit. Texas Instruments, Estados Unidos de América, (2003).
- Cistac, G., Bongianino, R., Filippi, J. y Kovac, F., *La simulacion como medio de interrelacion entre herramientas matematicas y procesos tecnologicos*, Formacion Universitaria, 2(5), 3-11, (2009).
- Contreras, L., Bachhoff, E. y Larrazolo, N., *Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica*. Edit. Manual Moderno, México, (2004).
- Crocker, L. y Algina, J., *Introduction to Classical and Modern Test Theory*, Holt, Edit. Rinehart and Winston., (1986).
- De Faria, E., *Matemáticas y nuevas tecnología en Costa Rica*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México, 18, 749-754, (2005).
- De Las Fuentes, M. *Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real Empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos*. Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Univ. de Sonora - México (1998).
- De Las Fuentes, M. y Arcos, J., *Una alternativa didáctica para el tratamiento del fenómeno sistema masa-resorte empleando la calculadora graficadora*. Memorias del 7º Congreso Internacional Retos y Expectativas de la Universidad, Universidad Autónoma de Nuevo León, Monterrey, México (2007).
- Douady, R., *Juego de marcos y dialéctica herramienta – objeto*. (1985). Versión en español Ernesto Sánchez S. y Gonzalo Zubieta B. Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa. DME-CINVESTAV. (1993)
- Demana, F. y Waits, B., *El Rol de la Calculadora Graficadora en la Reforma de las Matemáticas*, Universidad de Ohio, Estados Unidos, (1998)
- Duval, R., *Registros de representaciones semióticas y funcionamiento cognoscitivo del pensamiento*. Traducción: Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN, (1993).
- Duval, R., *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático*., Université du Littoral Côte-d'Opale, Boulogne, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais, Lille, (2000).
- Duval, R., *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*., Journal of Educational Studies in Mathematic, 61(1-2), 103-131. (2006a).
- Duval, R., *Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?*., Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, 9(Especial), 45-81, (2006b).
- Eduteka, *Funcionaria del Ministerio de Educación explica los alcances del proyecto de calculadoras en la enseñanza*. (2006), <http://www.eduteka.org/Entrevista3.php> , acceso: 12 Marzo (2007).
- Ferrini, M., *Principles and Standards for School Mathematics: A Guide for Mathematicians*, (2000).
- Gerald, A. G., *Representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y resolución de problemas*, Manual de investigación internacional en educación matemática (pp. 197-218), Edit. L. D. English, New Jersey, EE. UU., (2002).
- Giandini, V. y Salerno, M., *La geometria, los ingresantes y el software maple*, Formacion Universitaria, 2(4), 23-30, (2009).
- Goñi, J.M., *El desarrollo de la competencia matematica en el curriculo escolar de la Educacion Basica*, Educatio Siglo XXI, 27(1), 33-57, (2009).
- Guzmán, I., *Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes*, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, México, 1(1), 5-21, (1998).

Hernández, R. A., *A didactic engineering research performed whit in a course on ordinary differential equations where students use the TI-92 calculator*, (2000).

Hernández, S. R., Fernández, C. C. y Baptista, L. P., *Metodología de la investigación* (cuarta edición). México: Mc. Graw Hill, (2006).

Heugl, H., *La necesaria competencia algebraica fundamental en la época de los Sistemas de Cómputo Algebraico*, En A. Del Castillo, et al, (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico*, (pp 29-66). Hermosillo, Sonora: (2003).

Hitt, E. F., *Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa*. *Educación Matemática*, 7, 63-75, (1991).

Hitt, E. F., *Una reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes de Tecnología*, *Boletín de la Asociación Venezolana*, 10(2), (2003).

Jiménez, J., Hugues, E., y Castillo, A., *La Experimentación Matemática Escolar apoyada por un dispositivo CAS*. En sexta escuela de verano del Centro Austriaco para la Didáctica del Cómputo Algebraico en Portoroz, Slovenia, (2000).

Karen, D., *La influencia de la tecnología en las normas sociomatemáticas en un curso de ecuaciones diferenciales*, (2000), pp 219-224.

Kutzler, B., *La calculadora algebraica como herramienta pedagógica para enseñar matemáticas*, En A. Del Castillo, et al, (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico* (pp 9-27). Hermosillo, Sonora, (2003).

Laborde, C., *¿Porqué la tecnología es hoy indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?*, En J. Jiménez, et al (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico* (pp 115-127). Hermosillo, Sonora, (2003).

Lafourcade, P, *Evaluación de los Aprendizajes*, Kapelusz, Buenos Aires, Argentina, (1971).

Martínez, A., *Aprendizaje de competencias matematicas*, Revista Avances en Supervision Educativa, 8(5), (2008).

Moreno, L. y Rojano, T., *Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo*, Revista Avance y Perspectiva, 18, 325-333, (1999).

PISA, *Pruebas de Matemáticas y Solución de Problemas*, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, (2003a).

PISA, *Marcos Teóricos de Pisa*. [Versión electrónica], Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, (2003b).

Proenza, Y. y Leyva, L.M., *Reflexiones sobre la calidad del aprendizaje y de las competencias matematicas*, Revista Iberoamericana de Educacion, 40(6), 1-11, (2006).

Queralt, T., *Un enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas con las calculadoras gráficas*. Centro de información, innovación y recursos educativos de Torrent (CEFIRE) España, (2000).

Radford, L., *Introducción, Semiótica y educación matemática*, Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, 9(Especial), 7-21, (2006).

Rosa, N. A., *La calculadora y los sistemas semióticos de representación: Hacia un aprendizaje de los conceptos matemáticos*, Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas Xixim, 2, Artículo 1, Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, (2001).

Saucedo, R., *La exploración de una ecuación diferencial con la ayuda de Voyage 200 y el CBL; un trabajo experimental*, Revista Innovaciones Educativas, 7, 10-11, (2005).

Walpole, R. E. y Myers, R. H., *Probabilidad y estadística para ingenieros* (segunda edición). México: Interamericana, (1989).

Zabala, A. y Arnau, L., *11 Ideas clave, ¿Cómo aprender y enseñar competencias?* . Barcelona. Editorial Grao. Segunda edición, (2008).