Formación Universitaria
E-ISSN: 0718-5006
citrevistas@gmail.com
Centro de Información Tecnológica
Chile

Cabezas, Carlos; Mendoza, Marvin R.

Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial

Formación Universitaria, vol. 9, núm. 6, 2016, pp. 13-25
Centro de Información Tecnológica
La Serena, Chile

Formación Universitaria
Vol. 9(6), 13-26 (2016)
doi: 10.4067/S0718-50062016000600003

Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial

Carlos Cabezas [(1)] **y Marvin R. Mendoza** [(2)]
(1) Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas, Univ. Católica del Maule, Avenida San Miguel 3605, Talca-Chile.
(2) Programa Doctorado en Educación Matemática, Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de los Lagos, Avenida Republica 517, Santiago-Chile. (e-mail: ccabezas@ucm.cl; vinmar28@hotmail.com)

Recibido Feb. 22, 2016; Aceptado Abr. 7, 2016; Versión final May. 14, 2016, Publicado Dic. 2016

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos mediante el análisis didáctico de producciones estudiantiles, relativas al pensamiento variacional, usando el enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática. La investigación persiguió como objetivos la caracterización y categorización de las producciones identificando particularidades de las mismas, y que dieran cuenta de las diversas formas de manifestación del pensamiento variacional. La investigación se realizó en un curso regular de cálculo inicial de ingeniería en la Universidad Católica del Maule, en Chile. Se analizaron las producciones escritas de los estudiantes en una prueba inicial. Esto se hizo generando categorías de manifestaciones de pensamiento variacional, de acuerdo a un primer nivel de análisis provisto por el enfoque onto-semiótico. Los resultados de esta investigación evidenciaron que gran parte de los estudiantes hace uso de ciertos aspectos del pensamiento variacional.

Palabras clave: pensamiento variacional; análisis didáctico; enfoque onto-semiótico; producciones estudiantiles.

Emerging Manifestations of Variational Thinking in Beginning Calculus Students

Abstract

In this study, the results obtained through the didactic analysis of student productions regarding the concept of variational thinking, using an onto-semiotic approach of mathematic instruction and knowledge. The research sought as objectives the characterization and categorization of productions identifying their characteristics, to discover the various manifestations of variational thinking. The research was conducted within a regular calculus course of freshmen engineering students at the Catholic University of the Maule Region in Chile. The written productions of the students in an initial test were analyzed. This was done by generating categories of manifestations of variational thinking according to a first level of analysis, provided by the onto-semiotic approach. The results of this research showed that most of the students made use of certain aspects of variational thinking.

Keywords: variational thought; training analysis; onto-semiotic approach; student productions

INTRODUCCIÓN

El Pensamiento Variacional constituye una línea de investigación en Educación Matemática que tiene su génesis en el análisis y reflexión de los trabajos de cálculo infinitesimal de Newton, Leibnitz y de sus antecesores en los que el cambio se consideró un punto medular en aras de responder a diferentes necesidades de la época, de brindar solución a problemas de movimiento que relacionaban aritmética, geometría y mecánica, entre otras áreas (Mendoza, 2013). Las tendencias actuales en Educación Matemática atribuyen importancia y dedican especial atención a la perspectiva histórica-epistemológica (Anacona, 2003; Godino, 2003, 2010) como un medio de comprensión de los distintos procesos que gestaron el nacimiento y desarrollo de diferentes nociones y objetos matemáticos, ya que la matemática es una producción humana situada en épocas y contextos determinados e influenciada por las respectivas culturas. Algunas obras que se refieren al desarrollo histórico-epistemológico del cálculo (Bagni, 2005; Ferrante, 2009; Molfino y Buendía, 2010), exponen que hubo mezcla de ideas estáticas y dinámicas para conceptualizar algunos objetos matemáticos.

En la primera etapa del desarrollo del cálculo, la idea de límite aparece a través de la exhaución en un solo contexto, el geométrico; sin embargo las ideas que utilizaron tanto Newton como Leibnitz, germinaron a partir de fenómenos en contextos físicos, geométricos y, en alguna medida algebraicos, siendo las ideas dinámicas las verdaderas gestoras de los trabajos de los padres del cálculo. En este sentido la variación y el cambio han sido aspectos explicativos de muchos fenómenos naturales y cotidianos en diferentes situaciones. Un gran desafío actual es encontrar maneras de utilizar este conocimiento acumulado, en distintos espacios de enseñanza y aprendizaje. La Educación Matemática lo ha abordado desde la comprensión de la cognición humana, de cómo el individuo logra desarrollar competencias, habilidades de pensamiento matemático de manera significativa, para que puedan ser puestos en escena al resolver problemas y obtener logros significativos en los aprendizajes. El pensamiento variacional se orienta a desarrollar habilidades de orden superior, partiendo de diferentes situaciones, sean estas cercanas o no al sujeto, bajo la premisa que el cambio y la variación se encuentran presentes en la mayoría de los procesos, fenómenos y situaciones que ocurren a nuestro alrededor sin importar el contexto en que nos situemos.

Una de las perspectivas del Pensamiento Variacional (Vasco, 2006), señala que “El objeto del pensamiento variacional es la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente –pero no exclusivamente– las variaciones en el tiempo. Una manera equivalente de formular su propósito rector es pues tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad”.

Si, en coherencia con esta concepción del pensamiento variacional, nos situamos en contextos cercanos a los estudiantes, en los cuales puedan investigar sobre los procesos de cambio que viven a diario, éstos podrán poner en evidencia sus concepciones pre matemáticas y, a través de un currículum adecuado, conducirlos a un aprendizaje más significativo de los conceptos matemáticos que el sistema educativo busca entregar, sistematizar y formalizar.

En este punto, y desde una perspectiva que trasciende el pensamiento variacional, afirmamos que la matemática no se comienza a aprender en la sala de clases. Esta afirmación es coherente con la descripción que Cantoral (Cantoral, 2005) hace del pensamiento matemático: “Por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otro, se entiende al pensamiento matemático como una parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; finalmente, una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas.” Desde ésta perspectiva, se convierte en una necesidad didáctica, conocer las pre concepciones y experiencias pre matemáticas que los estudiantes traen cuando llegan a la sala de clases. Conocer estas preconcepciones forma, entonces, parte del quehacer docente, pero también del quehacer del investigador en didáctica de la matemática; como afirma Godino (Godino, 2011), comentando la posición de ciertos autores (Wittmann, 1995; Hjalmarson y Lesh, 2008; Lesh y Sriraman, 2005), acerca del enfoque de la Didáctica de las Matemáticas como una “ciencia de diseño”.

Adhiriendo a esta última posición y considerando la falta de propuestas explícitas para enfrentar el problema del aprendizaje y enseñanza del fenómeno del cambio y la variación, particularmente con el fin de aportar al surgimiento de una propuesta de enseñanza del cálculo en el nivel inicial de la educación superior, interesa poner en evidencia las manifestaciones que, a pesar de un sistema educativo que no ha puesto atención en el particular, hayan podido desarrollar los estudiantes que llegan a este estadio en su proceso educativo.

PENSAMIENTO VARIACIONAL

El pensamiento variacional es conceptualizado desde distintas perspectivas de acuerdo a ciertos elementos, su génesis intrapersonal o extra personal y los indicadores de su desarrollo. Una primera mirada afirma que uno de los propósitos del pensamiento variacional es articular la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral y Farfán, 1998) y a situaciones que involucran variación en contextos; ya sean estos, realistas o fantasistas, intra o extramatemáticos.

Desde esta mirada, un saber no se estudia únicamente desde lo cognitivo, ya que las creaciones humanas, las matemáticas en este caso, se han desarrollado en contextos históricos, culturales y sociales situados, y es a través de las prácticas sociales que los seres humanos le dan sentido a lo que hacen, comparten códigos, utilizan diferentes estructuras y lenguajes (Cantoral y Farfán, 2003). De otras investigaciones en esta perspectiva del Pensamiento Variacional (Maury et A, 2012) se desprende que este pensamiento involucra elaboración de estrategias, formas de razonamiento, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación, argumentan además que los objetivos del pensamiento variacional se orientan a desarrollar estructuras de pensamiento que permitan identificar, analizar e interpretar, de manera natural, situaciones relacionadas con el cambio y, a su vez, modelarlos y transformarlos en otros más simples.

Una segunda referencia teórica, que es de especial interés en este estudio, considera que el pensamiento variacional combina lo cognitivo y lo didáctico para propiciar su génesis, potenciación y desarrollo. En este orden de ideas, se plantea que el pensamiento matemático variacional debe considerarse como la base sobre la cual se estructure el currículo matemático, ya que éste es un pilar y eje de los otros pensamientos matemáticos (numérico, espacial o geométrico, estocástico, métrico) figurando como un eje articulador de éstos; los cuales en conexión e interrelación deberían promover el desarrollo de habilidades matemáticas en diferentes contextos. Ello implica que el pensamiento variacional (MEN, 2006) se estructure en base a ciertos procesos generales: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos y, a la vez, sobre ciertos estándares de medición que se constituyen en el medio de desarrollo de habilidades, y de cada uno de los pensamientos matemáticos. En esta mirada del pensamiento matemático, cada uno está ligado a los demás pensamientos, y cada uno se potencia en la medida que se desarrollan los otros, mediante los procesos generales.

El pensamiento variacional es concebido como una forma dinámica de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades, de la misma o distintas magnitudes, en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco, 2003, 2006). En esta definición para pensamiento variacional, Vasco distingue dos momentos: el primero en el que se determina lo que varía, lo que permanece constante, se identifican patrones de regularidad de los procesos y, un segundo momento que requiere acciones cognitivas para la producción de sistemas mentales para reproducir covariaciones entre magnitudes. Para este autor, la cognición de cada sujeto ayuda a crear sistemas mentales, que a su vez ejecuta, revisa, refina y, de ser necesario descarta. En esta última acción, se inicia un nuevo proceso de génesis de modelos. Desde esta mirada, los modelos mentales se afinan, y se convierten en representaciones mentales (Duval, 1999) los cuales son exteriorizados mediante representaciones semióticas que pueden ser palabras, dibujos, letras, números.

Pensar variacionalmente desde este enfoque es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariaciòn de las variables involucradas, manifestada en algún tipo de soporte material (registro ostensivo).

A este mismo respecto, Carlson et al., (2002), emplean otra terminología y se refieren a razonamiento covariacional, definiendo éste como una actividad cognitiva que considera la coordinación del cambio conjunto entre dos variables, cuantificando lo que sucede en una variable, si la otra cambia. Los autores realizaron una investigación con estudiantes universitarios, y proponen cinco acciones mentales asociadas a ciertos niveles para determinar la covariacion entre dos cantidades, atendiendo al grado de desarrollo entre un nivel básico y uno superior. En este sentido, proponen: a) coordinación de los valores de las variables, cuando hay cambio en una y en otra, b) coordinación de la dirección del cambio, c) coordinación de la cuantificación del cambio en una y en la otra variable, d) coordinación de la razón de cambio, y e) coordinación de la razón instantánea de cambio en valores en el dominio de la función.

Por su parte, Grozdev, y Todorka, (2010) sostienen que la función concreta del pensamiento variacional consiste en descubrir las propiedades ocultas, determinar las conexiones y correlaciones de una situación mediante la transformación de la realidad, donde sólo a través del pensamiento conceptual y visual-figurativo se haría difícil o imposible. Diferentes investigaciones (Zorn et al., 2004;) sostienen la importancia de utilizar diferentes experiencias, metodologías, contextos y representaciones para desarrollar diferentes nociones y objetos matemáticos.

Es relevante señalar que muchas acciones de los sujetos en su cotidianeidad son pre matemáticas, entendiéndose éstas como una manifestación que desde el lenguaje verbal y puramente cotidiano (no matemático en la concepción del alumno), encierra potencialmente un concepto matemático expresable en algún registro de representación, ya sea geométrico, algebraico, numérico, tabular u otro. Ejemplos de expresiones pre matemáticas aparecen en el diálogo de los estudiantes cuando hablan, por ejemplo, de distancias sin interpretar la distancia como un concepto matemático, no se sitúan en un contexto métrico sino que hablan de la distancia entre dos objetos de manera aislada. En la edad preescolar los niños juegan a relacionar objetos con características de lo que representan, animales con sus expresiones fónicas por ejemplo. Aquí los niños no perciben que estén haciendo matemática, sin embargo ubicados en contextos funcionales ellos están construyendo relaciones susceptibles de formalización matemática. A estos últimos se les conoce como conceptos pre-numéricos por su proyección hacia los conceptos de ordinal y cardinal. En nuestra interpretación son, de manera genérica, manifestaciones pre matemáticas (Warren et al., 2011). El desarrollo temprano de ciertas nociones y relaciones pre matemáticas que los niños manifiestan colaboran para el desarrollo de posteriores procesos abstractos, también en el desarrollo de la cantidad, en el pre-algebra, y el desarrollo de un pensamiento covariacional (Blanton, 2010). Por su parte, Isoda (1996) también propone el desarrollo del pensamiento matemático en contextos cercanos y ricos en experiencias desde tempranas edades procurando que el ingenio y la creatividad ayuden a establecer relaciones y este pensamiento pueda desarrollarse.

Otra componente teórica considerada en este trabajo es la visualización matemática puesto que es el puente requerido para conectar lo ostensivo o perceptible con lo no ostensivo (imágenes mentales). De acuerdo con Torregrosa y Quesada, (Torregrosa y Quesada, 2007), la definición y caracterización de los procesos de visualización y razonamiento, es un avance en la línea de conocimiento del fenómeno cognitivo, ya que separa la acción cognitiva (proceso), de las distintas representaciones e imágenes mentales.

Según Arcavi (1999), la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es reconocida como una componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo), en la resolución de problemas e incluso en los procesos de demostración. Por esta razón, concordamos con Torregrosa y Quesada (2007) que afirman: “vemos a los procesos de visualización y de razonamiento, junto con su coordinación, como elementos esenciales de un modelo conceptual que nos permite conocer la actividad de los alumnos; en la línea abierta por Bishop (1983), para conocer en la medida de lo posible, el interfaz de la actividad matemática cuando se enfrentan a la resolución de problemas en geometría.” En nuestro caso, cuando se enfrentan al análisis de situaciones dinámicas en las que intervienen correlaciones de variables.

Proponemos a su vez la visualización, en concordancia con (Arcavi, 2003), como una primera instancia de comprensión de diferentes situaciones vinculadas con la variación, como un medio de desarrollo y potenciación de habilidades visuales y de otros sentidos. Desde esta óptica la visualización es un requisito indispensable para desarrollar pensamiento variacional puesto que es el canal receptor de lo visual y de otros sentidos para la posterior comprensión de los procesos cognitivos que involucra una situación didáctica. Algunas investigaciones proponen la visualización y el desarrollo de pensamiento variacional apoyadas en el uso de softwares dinámicos (García et al., 2015;)

METODOLOGÍA

El presente trabajo se enmarca en un enfoque cualitativo de corte interpretativo pues busca conocer el núcleo de las significaciones que grupos de estudiantes manifiestan en las respectivas sesiones de estudio y actividades de taller propias del curso en el cual se realiza la investigación. Es cualitativo por la naturaleza de sus datos. Esta investigación se desarrolló con un grupo de 40 estudiantes de un curso de cálculo de primer año de ingeniería civil informática de la Universidad Católica del Maule, durante el primer semestre de 2013. La edad de los estudiantes oscilaba entre 18 y 20 años, siendo algunos de ellos, alumnos repitentes.

El método utilizado en la investigación consiste en la aplicación del Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino et al., 2007), al análisis de las configuraciones cognitivas que sintetizan las producciones de los estudiantes, en las diversas actividades e instrumentos de control aplicados por el profesor en el desarrollo del curso. Estas actividades e instrumentos de control analizados en la investigación fueron los siguientes: a) Prueba de diagnóstico, b) Talleres y c) Sesiones de Estudio.

En base a las respuestas a la prueba de diagnóstico y las consideraciones teóricas de Vasco (2006), Duval (1999), y (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero 1998; Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) se establecieron categorías de análisis. Se filmaron las actividades de los talleres y las sesiones de estudio. Se analizaron las sesiones de estudio y los talleres mediante los datos recogidos en los videos y las pruebas escritas, en base a las categorías de análisis y a los criterios considerados en las respectivas configuraciones cognitivas de las producciones estudiantiles y, finalmente, se hicieron las conclusiones.

El curso en el que se realizó la investigación fue un curso regular de la carrera Ingeniería Civil Informática, para lo cual se contó con la autorización del Director de Escuela, del Profesor del curso y la conformidad de los estudiantes. Este curso realizó las actividades propias de la programación que establece el respectivo programa, sin intervención externa y, se eligió por disponibilidad del mismo. Las actividades, objeto de análisis de la investigación se organizaron de modo que pudieran ser observadas y analizadas por el equipo. Se tuvo acceso a los resultados de las pruebas de diagnóstico, producciones de los estudiantes en los talleres y filmación de las sesiones de estudio; estas últimas las realizaron los alumnos en diversos lugares en los que los estudiantes acostumbraban a estudiar. Con esta modalidad, el profesor del curso pretendía que los estudiantes se potenciaran entre ellos, tuvieran espacios de libertad en los cuales pudieran expresar, sin la presencia de una figura institucional sus ideas, sus aportes, sin temor al error y así, generaran razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos proporcionados, en cualquier tipo de lenguaje que manifestara una comunicación ya fuese verbal, gráfica, algebraica o de otro tipo. Finalmente y en base a sus producciones se categorizaron elementos indicativos del lenguaje, formas de argumentación, criterios de inferencia, uso de definiciones, estrategias y proposiciones, que ponen en escena los estudiantes en situaciones problemáticas, entre las cuales nos interesa destacar aquellas que pudieran ser interpretada como una manifestación de pensamiento variacional o pre variacional.

ANALISIS DIDACTICO DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO (EOS)

Para reflexionar respecto de las producciones estudiantiles presentamos los elementos de un primer nivel de análisis que propone el Enfoque Onto semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). En este enfoque se plantean diferentes categorías de análisis para comprender de manera sistémica el desarrollo de una tarea, una actividad didáctica en fase de diseño o en ejecución. Un primer nivel de análisis didáctico que es de interés en este trabajo atiende al reconocimiento de un sistema de prácticas que realizan los estudiantes de manera individual o grupal, ya sean estas mediadas por sus conocimientos previos o por otra entidad externa que puede ser de carácter institucional (curricular, bibliográfica, u otra). Desde el EOS una práctica matemática, es una actuación o una manifestación (lingüística o no) con la intencionalidad de resolver algún problema intra o extra matemático, compartir una posible solución y validarla para extrapolarla a otras realidades. En esta práctica matemática intervienen objetos tangibles (ostensivos) y otros no tangibles (no ostensivos). Los primeros compuestos por el uso del lenguaje, símbolos, gráficos u otros, y los segundos referidos a la utilización de conceptos, propiedades, proposiciones, entre otros.

Consideramos relevante reflexionar respecto a cómo las prácticas matemáticas están influenciadas por la experiencia del individuo y cómo son comprendidas por éste, qué objetos matemáticos emergen de las mismas y cómo el objeto emergente adquiere un status derivado de las prácticas precedentes. El primer nivel de análisis didáctico del EOS propone los elementos constituyentes primarios en los sistemas de prácticas (Godino et al., 2007): a) Lenguaje (términos utilizados, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros de representación), b) Situaciones/problemas (descripción de la naturaleza del problema, tarea, ejercicio y si la situación hace referencia a un problema intra o extra matemático, y si este atiende a una situación realista o fantasista), c) Conceptos/Definiciones (Empleo o acercamiento a base teórica mediante el uso de definiciones, axiomas, teoremas, propiedades, etc.), d) Procedimientos (empleo de algoritmos, operaciones, técnicas, etc.), e) Argumentos (Sustento teórico explicitado para validar o explicar sus proposiciones y procedimientos). En la figura 1, obtenida de Font y Godino (Font y Godino, 2006) se ilustra los elementos de este primer nivel de análisis propuesto por el EOS y de pertinencia a esta investigación.

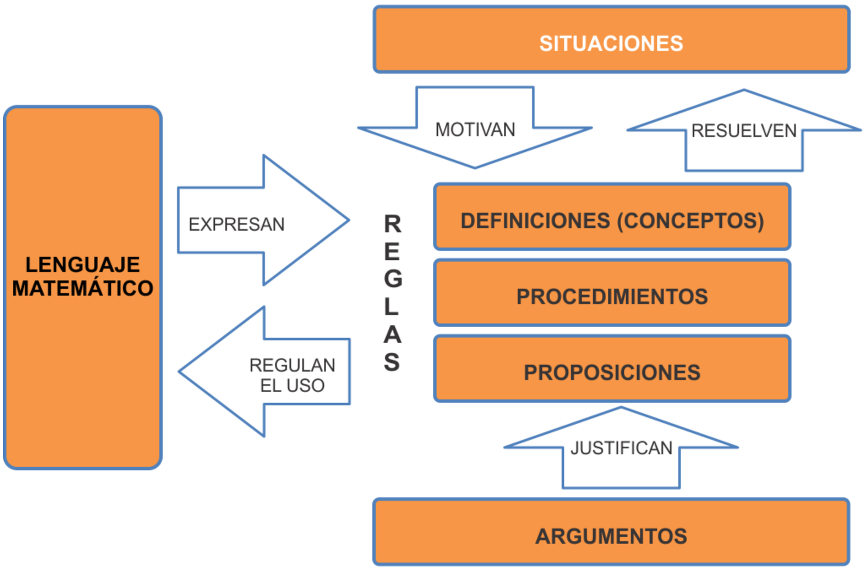

Fig.1 Configuración de objetos matemáticos primarios

ACTIVIDADES PROPUESTAS EN EL CURSO

En este apartado, por cuestión de espacio, presentamos una de las actividades consideradas para el desarrollo de la investigación. Esta corresponde a uno de los reactivos de la prueba de diagnóstico. La figura 2 está formada por una sucesión de hexágonos regulares construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados, tal como se ilustra en la figura. La consigna se compone de: a) Haga todos los comentarios que considere pertinentes si el proceso de construcción de la figura continúa de manera indefinida y, b) agregue otros comentarios que estime pertinentes, si supone que el lado del primer hexágono de la figura mide 1 metro.

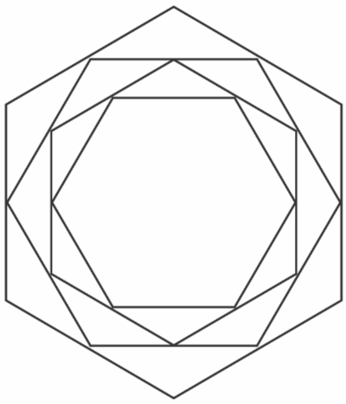

Fig. 2 Hexágonos Inscritos

RESULTADOS Y ANALISIS

De acuerdo al primer nivel de análisis con que aporta el EOS, abordamos de manera sistémica esta tarea, considerando las respectivas categorías: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo. Las preguntas que guían nuestro análisis son las siguientes ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo? ¿Qué lenguaje específico utilizan? ¿Cuáles son sus argumentos? ¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados? ¿Cuáles son los elementos emergentes que son inducidos por los enunciados de los reactivos y cuáles son propios y responden al uso de sus conocimientos y concepciones previas en respuesta a los requerimientos de la actividad planteada? Para un adecuado ordenamiento del análisis, se presentan sub-secciones, que muestran las respectivas etapas y categorías de análisis.

Etapa 1 Se responde a las preguntas básicas

Se responde a las preguntas ¿Qué problemas y prácticas realizan los estudiantes en el desarrollo de la tarea analizada? ¿Cómo se relacionan las distintas etapas del desarrollo?

La actividad se presenta en un registro figural que muestra hexágonos regulares construidos, cada uno en el interior del precedente, ubicando sus vértices en los puntos medios de sus lados. Se plantea que los hexágonos se construyen de manera indefinida atendiendo a ese patrón. La consigna se compone de dos partes: a) Haga todos los comentarios que considere pertinentes si el proceso de construcción de la figura continúa de manera indefinida y, b) agregue otros comentarios que estime pertinentes, si supone que el lado del primer hexágono de la figura mide 1 metro. La tarea está planteada de modo general, pues se trata de analizar si en el desarrollo de la misma, los estudiantes manifiestan alguna forma de pensamiento variacional sin que ésta sea inducida en el enunciado de la tarea. La actividad lleva a los estudiantes a hacerse preguntas acerca de las propiedades que tendrán los hexágonos en el proceso de construcción de la figura.

En este punto los estudiantes pueden visualizar las propiedades de cada hexágono de manera individual o secuencial, en el segundo caso surge la posibilidad de que detecten la presencia de variables, busquen y establezcan dependencias entre las mismas. Las respuestas a las cuestiones planteadas requieren la explicación del proceso de construcción las que podrán ser dadas en términos de covariaciones entre las variables o en términos descriptivos de los hexágonos vistos de manera individual. Ambas consignas planteadas en la situación exigen poner en juego procedimientos y dominio en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además del empleo de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, conjeturar, representar y comunicar entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo elemental permite generar modelos matemáticos de la situación planteada en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

Etapa 2: Producciones de algunos estudiantes cuyas respuestas son representativas del grupo total.

E1: “siempre el hexágono interior va a ser más pequeño que el exterior y sus lados sean la mitad del hexágono del hexágono antes definido”.

E3: “considera que para que el proceso de construcción continúe indefinidamente, todo depende de sus variables (como pueden ser sus medidas)”. Todos los hexágonos van presentando un decrecimiento que puede ser establecido por medio de una función”. “ Se puede conocer el área de cada uno de los hexágonos al saber la medida del lado del hexágono inicial y al tener la medida de sus ángulos y los ángulos que se forman en los puntos que se trazan los hexágonos podemos determinar la medida de los lados de los hexágonos más pequeños por medio de trigonometría”.

E5: “El proceso de tomar un pentágono de un tamaño, este se irá achicando, es decir, la medida de sus lados irá disminuyendo hasta llegar a un punto que no se puede sacar más distancias”.

E8: “A medida que existan más hexágonos dentro del inicial, el área de estos irá decreciendo a medida que avanza. Lo mismo ocurre con sus perímetros y la longitud de sus lados… si el proceso de construcción continuara llegaría un momento que la figura deberá ser microscópica ya que el hexágono se construye con los puntos medios del anterior como estos son medidas numéricas siempre existirá la mitad de un número por más pequeño que sea”. “El diámetro de las circunferencias es cada vez más pequeño”.

E9: “El Proceso de construcción continúa indefinidamente al ser un fractal. Si el lado es l podemos declarar la fórmula del hexágono en función del triángulo de lado l. Ya despejada la fórmula del área en función del área de los triángulos solo nos falta deducir en cuanto se reduce el lado del triángulo para obtener la función del fractal”.

E15: “La imagen representa un fractal el cual estará indefinidamente repitiéndose no con el mismo tamaño pero si la figura”.

E18: “Continúa indefinidamente”. “Se puede decir que las primera gráficas al ser un metro, en la siguiente será 0,5, luego 0,25, después 0,125. Se puede decir en este caso la función es: $f(x) = \frac{1}{2x}$., x: es el exponente creciente que parte desde 0 hasta el infinito”.

E19: Cada vez los hexágonos serán más grandes, el primero siempre será el más pequeño, da una sensación de que fueran un círculo y los hexágonos generan”.

E20: “A medida que existan más hexágonos dentro del inicial, el área de estos irá decreciendo a medida que avanza. Lo mismo ocurre con sus perímetros y la longitud de sus lados”.

E21: “Se crearán infinitos triángulos bajo la razón 6(n-1) el perímetro de los hexágonos bajará mediante la misma fórmula”. “El segundo hexágono tendrá distinta área siempre menor que el hexágono menor al hexágono n°1.

medida de los lados de los hexágonos más pequeños por medio de trigonometría”.

E23: “La figura será indefinida veces y cada vez el lado de cada hexágono disminuirá a la mitad”. “Si el lado fuera un metro el siguiente sería la mitad y así sucesivamente como podría mostrarla esta fórmula h(x)=$\frac{1}{2}x$, con x número de hexágonos dentro de la primera figura”.

E30: “Si el proceso de construir indefinidamente, la cantidad de hexágonos irá creciendo con hexágonos cada vez más pequeños, la cantidad de hexágonos crece indefinidamente”.” Si el hexágono grande mide 1metro de lado(a)…entonces el lado del hexágono inmediatamente menor será$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y el que vendrá será $\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$ y el otro $\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{8}\sqrt{3}$, y el otro $\frac{3}{8}\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{16}$ y así sucesivamente”. “Todos los hexágonos van presentando un decrecimiento que puede ser establecido por medio de una función”. “Se puede conocer el área de cada uno de los hexágonos al saber la medida del lado del hexágono inicial y al tener la medida de sus ángulos y los ángulos que se forman en los puntos que se trazan los hexágonos podemos determinar la medida de los lados de los hexágonos más pequeños por medio de trigonometría”.

E32: “Es posible que el hexágono siga dibujándose infinitamente hacia dentro (desde el punto de vista abstracto). También se puede pensar en una sucesión de hexágonos continua hacia afuera. Si cada lado mide 1m, entonces su perímetro es de 6m (en el caso del hexágono exterior). Se puede calcular el área de alguno de los hexágonos dibujados en el interior. Se forman triángulos entre cada hexágono dibujado…. También se puede hacer una función algebraica que determine la medida de los triángulos en cuestión”.

Etapa 3: Lenguaje usado por los estudiantes en el desarrollo de la actividad

¿Qué lenguaje específico utilizan los estudiantes?

Lenguaje previo (Términos y expresiones usadas para referirse a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

Figura, sucesión, construcción geométrica, polígono regular, hexágono, longitud, medida, interior, vértice, punto medio, lado, proceso.

Lenguaje emergente (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica):

Hexágono interior, hexágono exterior, decrecimiento, tamaño, achicando, (hexágono) grande, microscópica, pequeño, (hexágono) exterior, variable, tamaño, achicando (la medida de sus lados irá disminuyendo), área, perímetro, dentro, microscópica (figura), indefinidamente, gráfica, función, indefinida, sucesión, infinitamente hacia dentro, razón, círculo, diámetro, circunferencia, fractal, ángulo, fórmula, trigonometría.

Etapa 4: Situaciones problema Emergentes

De acuerdo a los desarrollos presentados por los estudiantes, encontramos que la mayoría de ellos atendió las dos consignas planteadas en la situación, sin embargo un estudiantes propuso un nuevo problema a partir de la situación inicial: Tenemos una sucesión de hexágonos continua hacia afuera.

Etapa 5a: Afirmaciones que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Siempre el hexágono interior va a ser más pequeño que el exterior y sus lados sean la mitad del hexágono del hexágono antes definido.

Para que el proceso de construcción continúe indefinidamente, todo depende de sus variables (como pueden ser sus medidas).

El proceso de tomar un pentágono de un tamaño, este se irá achicando, es decir, la medida de sus lados irá disminuyendo hasta llegar a un punto que no se puede sacar más distancias.

A medida que existan más hexágonos dentro del inicial, el área de estos irá decreciendo a medida que avanza. Lo mismo ocurre con sus perímetros y la longitud de sus lados…

Si el proceso de construcción continuara llegaría un momento que la figura deberá ser microscópica ya que el hexágono se construye con los puntos medios del anterior como estos son medidas numéricas siempre existirá la mitad de un número por más pequeño que sea.

Si el proceso de construir indefinidamente, la cantidad de hexágonos irá creciendo con hexágonos cada vez más pequeños, la cantidad de hexágonos crece indefinidamente.

Si el hexágono grande mide 1metro de lado (a)…entonces el lado del hexágono inmediatamente menor será($\frac{\sqrt{3}}{2}$) y el que vendrá será $\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}$ y el otro $\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{8}\sqrt{3}$, y el otro $\frac{3}{8}\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{16}$ y así sucesivamente".

La figura será indefinida veces y cada vez el lado de cada hexágono disminuirá a la mitad. Si el lado fuera un metro el siguiente sería la mitad y así sucesivamente.

Se puede calcular el área de alguno de los hexágonos dibujados en el interior. Se forman triángulos entre cada hexágono dibujado…. También se puede hacer una función algebraica que determine la medida de los triángulos en cuestión.

Se crearán infinitos triángulos bajo la razón 6(n-1) el perímetro de los hexágonos bajará mediante la misma fórmula.

El segundo hexágono tendrá distinta área siempre menor que el hexágono menor al hexágono n°1.

Cada vez los hexágonos serán más grandes, el primero siempre será el más pequeño, da una sensación de que fueran un círculo y los hexágonos generan.

Al continuar agregando hexágonos regulares, el hexágono regular el cual se empezó versus los que están dentro de él, van disminuyendo su tamaño, mientras más hexágonos, cada hexágono va disminuyendo sus medidas. El diámetro de las circunferencias es cada vez más pequeño.

El Proceso de construcción continúa indefinidamente al ser un fractal.

La imagen representa un fractal el cual estará indefinidamente repitiéndose no con el mismo tamaño pero si la figura.

Todos los hexágonos van presentando un decrecimiento que puede ser establecido por medio de una función.

Etapa 5b: Argumentos que realizan los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

En general los estudiantes hacen afirmaciones basados en aspectos visuales e intuitivos, sin embrago presentan también argumentos con características variacionales:

Si el proceso de construcción continuara llegaría un momento que la figura deberá ser microscópica ya que el hexágono se construye con los puntos medios del anterior como estos son medidas numéricas siempre existirá la mitad de un número por más pequeño que sea.

… cada vez el lado de cada hexágono disminuirá a la mitad. Si el lado fuera un metro el siguiente seria la mitad.

Utilizan argumentos algebraicos para justificar la construcción de una secuencia de medidas asociadas a los elementos de los hexágonos.

Mientras más hexágonos, cada hexágono va disminuyendo sus medidas.

Usa el hecho de la figura ser un fractal para argumentar la infinitud del proceso de construcción de hexágonos.

Argumentan la posibilidad de construir indefinidamente los hexágonos con el hecho de que medidas numéricas siempre pueden dividirse.

Etapa 6: Concepciones de los estudiantes y los procedimientos que usan.

¿Cuáles son sus concepciones respecto de los objetos estudiados?

Previas: En relación a los objetos matemáticos involucrados en el enunciado de la actividad tales como hexágono regular, sucesión, construcción, interior (de una figura), vértice, lado, punto medio, proceso, medida, los estudiantes tienen las concepciones clásicas y una buena comprensión de ellos, de hecho esto les permite abordar la actividad sin tener dificultades relacionadas con conocimientos previos.

Emergentes: Fractal: lo mencionan dos estudiantes del grupo de estudio, tienen concepciones confusas asociadas a este objeto geométrico y la percepción de que la figura representa un fractal proviene del proceso (infinito) de construcción sin considerar la propiedad visual de auto similitud, sin embargo esta confusión no obsta para los objetivos de la investigación. Expresan además el concepto de "función del fractal", sin que quede claro la concepción que tienen del mismo.

Función: la mayoría de los estudiantes usa funciones para expresar las áreas o longitudes de figuras o segmentos y caracterizar las formas de decrecimiento de estas cantidades. Muestran un buen dominio del álgebra involucrada en los cálculos sin embargo, salvo en pocos casos, hacen interpretaciones erradas de las relaciones entre las variables involucradas, logrando modelos que no interpretan adecuadamente el proceso. Asociado al concepto de función reconocen variables pero en la interpretación de la función como modelo, muestran no considerar su variación dentro de un proceso dinámico, quedándose únicamente con la relación biunívoca estática pre imagen-imagen.

Los estudiantes en su mayoría hablan de decrecimiento y crecimiento (expresado en distintos términos) para describir lo que ocurre en el proceso de construcción de hexágonos y elementos asociados a éstos. Descubren como elementos variables, las medidas asociadas a los perímetros, áreas, radios de circunferencias, etc., mostrando tener una idea clara de estos conceptos.

Los estudiantes realizan procesos de visualización pues atribuyen propiedades a los objetos geométricos en sus representaciones gráficas "A medida que existan más hexágonos dentro del inicial, el área de estos irá decreciendo…". En su mayoría los estudiantes construye funciones para relacionar los hexágonos con expresiones numéricas que describan su forma de decrecimiento, sin embargo las funciones que encuentran están mal calculadas y no modelan efectivamente el proceso. De manera particular, E3 enuncia el procedimiento de construir funciones como un procedimiento general y plantea la posibilidad de usar funciones trigonométricas para efectuar ciertos cálculos. E8 valida como procedimiento de construcción de hexágonos el presentado en el enunciado de la actividad pues "…como estos son medidas numéricas siempre existirá la mitad de un número por más pequeño que sea.", expresando de manera implícita el hecho que los hexágonos llegarán a ser muy pequeños; este es el único caso en que un estudiante muestra un procedimiento basado en elementos abstractos y da una razón teórica para justificar el procedimiento de construcción de los hexágonos.

Un número menor de estudiantes hacen algunos cálculos, descomponen las figuras y encuentran un patrón de construcción de los hexágonos,

E30 encuentra los primeros términos de un patrón aritmético y no llega a determinar una fórmula algebraica general. Los estudiantes en su mayoría reconocieron que el proceso de construcción de hexágonos es infinito. Esto fue expresado mediante diferentes argumentaciones discursivas.

En este particular hicieron referencia a la construcción de hexágonos inscritos y a que fue realizada mediante la unión de los puntos medios del hexágono circunscrito anterior, lo que muestra que comprendieron los procedimientos constructivos. A este respecto, los estudiantes sostuvieron que "siempre existirá otro hexágono inscrito, construido en los puntos medios del hexágono circunscrito anterior".

DISCUSION

Una mirada sistémica a los elementos recogidos en los recuadros de las distintas categorías de análisis, nos muestra que los estudiantes hacen un buen uso del lenguaje en el que está expresada la actividad propuesta (lenguaje previo) cuando utilizan formas de visualización para interpretar el proceso de construcción de la figura. En este lenguaje expresan adecuadamente sus análisis y realizan afirmaciones que muestran la emergencia de conceptos pre variacionales cuando describen los fenómenos de decrecimiento de áreas, de longitudes y otros elementos expresados mediante un lenguaje emergente que muestra que han comprendido adecuadamente la actividad planteada. Aunque surgen algunos elementos que confunden la claridad de las concepciones iniciales cuando se refieren al concepto de fractal, este hecho es aislado y no obsta para tener una clara interpretación de sus producciones. En este sentido las producciones de los estudiantes en su generalidad revelan un buen grado de comprensión, hecho que permite hacer un adecuado análisis y detectar las manifestaciones emergentes de pensamiento variacional. Las afirmaciones de los estudiantes respecto a los procesos de decrecimiento y crecimiento y las formas de representación gráfica, textual y funcional de los mismos, muestran un nivel básico de pensamiento variacional que emerge al enfrentarse al estudio y descripción de la figura mostrada y su forma de construcción.

Algunos elementos que se apreciaron en las producciones estudiantiles expuestas en las textualidades, y otras complementarias, reflejan que los estudiantes tuvieron diversas visiones respecto a la construcción de los hexágonos. En algunas producciones se expresa que este proceso se podrá continuar hasta que un lado del hexágono llegue a cero y siga manteniendo la forma de hexágono, lo que indica claramente un pensamiento variacional emergente. Otros estudiantes sostuvieron que la longitud del lado será próxima a cero pero no llegará a serlo mostrando la emergencia de un proceso de convergencia y, por lo tanto la manifestación de un proceso variacional. La afirmación "las dimensiones de algunos hexágonos serán microscópicas" también revela la emergencia de un pensamiento variacional que conduce a pensar en la definición $\varepsilon-\delta$ de los procesos de convergencia. Otra afirmación destacable desde el punto de vista de los objetivos de la investigación es "…la medida de sus lado se hará tan pequeña hasta un punto que "no se puedan sacar más distancias".

Una situación nueva la propuso un estudiante al mencionar que el proceso de construcción de hexágonos es “infinito hacia dentro”, con la posibilidad que el proceso de construcción podría generar una sucesión de hexágonos hacia “afuera del primero”; esta afirmación revela una apertura de pensamiento de los estudiantes que miraron desde otra perspectiva la construcción de la figura.

Una consideración especial en esta discusión, la tiene el hecho de no usar simulaciones computacionales en la investigación, lo que se explica en la decisión de no agregar elementos externos al pensamiento puro de los estudiantes que pudieran interferir en los resultados de nuestra investigación. Sin embargo en la utilización de los resultados del presente trabajo, para la organización de actividades docentes, se pueden encontrar complementos importantes en Garcia, M y Benitez, A., (2011), que destacan, en el contexto de la resolución de problemas, las competencias necesarias para el trabajo con TIC y las competencias matemáticas entre las cuales mencionan: identificar las variables presentes en el problema; establecer relaciones entre las variables del problema; utilizar un modelo matemático para representar el problema entre otras, que son típicas del pensamiento variacional.

CONCLUSIONES

Los estudiantes usan un lenguaje que involucra conceptos tales como variable, función, crecimiento, decrecimiento y otros términos que indican la emergencia de un pensamiento pre variacional, toda vez que las definiciones que manejan, son correctas. Las formas de argumentación de sus afirmaciones son más bien visuales y están en un nivel básico y contienen ciertos elementos dinámicos, sin embargo entrando en una etapa de argumentación formal, se ve disminuida la concepción dinámica mostrada en la etapa de visualización y, después de sus cálculos, no logran plasmar la concepción dinámica mostrada en la etapa anterior y sólo logran representar mediante fórmulas algebraicas las funciones que determinan. En particular, los estudiantes no destacan en sus producciones la existencia de covariaciones, más bien los procesos, como los describen, son una secuencia discreta de estados que no se relacionan entre sí significativamente. Sin embargo el uso del lenguaje y las correctas concepciones de los elementos previos que demuestran tener, sería una base importante para estimular el desarrollo del pensamiento variacional de manera formal.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Universidad Católica del Maule, a través del proyecto de investigación PMI-UCM1310.

REFERENCIAS

Anacona, M., “La historia de las matemáticas en la educación matemática”, Rev. Ema, ISSN 0122-5057, (en línea), 8(1), (fecha de consulta Marzo 12, 2015; http://funes.uniandes.edu.co/1516/), 8(1), 28-33 (2003)

Arcavi, A.,…Y en matemáticas, los que instruimos, ¿qué construimos?, http://www.sinewton.org/numeros/, Números, ISSN: 0212-3096, (en línea), 38, 39-56 (1999)

Arcavi, A., The role of visual representations in the learning of mathematics.doi: 10.1023/A:1024312321077, Educational Studies in Mathematics, (en línea), 52 (3), 215-241 (2003)

Bagni, G., Historical Roots of limit notion. Development of its representation registers and cognitive development, doi: 10.1080/14926150509556675, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, (en línea), 5(4), 453-468 (2005)

Blanton, M., Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry: Proceedings of a Conference by Usiskin, Andersen & Zotto, pp. 45-61. Information Age Pub., Chicago, USA (2010)

Bishop, A. J., Space and geometry, Acquisition of mathematics concepts and processes by Lesh & Landau, pp 125–203. Academic Press Pub., New York, USA (1983)

Cantoral, R. y otros cinco autores, Desarrollo del Pensamiento Matemático, 1a edición, 5-225. Editorial Trillas, México D.F., México (2005)

Cantoral, R. y Farfán, R. M., “Matemática Educativa: Una visión de su evolución”, Rev. Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, ISSN: 2007-6819, (en línea), 6(1), 27-40, 2003. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33560102. Acceso: 22 de Mayo (2015)

Cantoral, R., Farfán, R., Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis, https://thales.cica.es/epsilon/, Rev. Épsilon, ISSN: 1131-9321, (en línea), 42(14-3), 353-369, (1998)

Carlson, M., Sally Jacobs, Coe, E., Sean Larsen, y Hsu, E., Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. . http://doi.org/10.2307/4149958, Journal for Research in Mathematics Education, (en línea), 33(5), 352–378 (2002)

Duval, R., Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales, 1a edición traducción al español a cargo de M. Vega, 1-314, Universidad del Valle Grupo de Educación Matemática, Cali, Colombia, (1999)

Ferrante J., El Análisis Matemático que nos enseñaron nuestros maestros, http://www.edutecne.utn.edu.ar/geptecne/geptecne.html, Universidad Tecnológica Nacional. (En la web: acceso: 2 de Septiembre de 2015), edUTecNe, Argentina (2009)

Font, V. y Godino, J. D., La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores, http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/538/430, Educ. Matem. Pesq., ISSN: 1983-3156, (en línea), 8(1), 67-98 (2006)

Font,V., Godino, J. D. y Gallardo, J., The emergence of objects from mathematical practices, doi: 10.1007/s10649-012-9411-0, Educational Studies in Mathematics, (en línea), 82, 97-124 (2013)

Garcia, M y Benitez, A., Competencias Matemáticas Desarrolladas en Ambientes Virtuales de Aprendizaje: el Caso de MOODLE, doi: 10.4067/S0718-50062011000300005, Form. Univ., (en línea), 4(3), 31-42 (2011)

Godino, J.D., y Batanero, C., Significado institucional y personal de los objetos, http://rdm.penseesauvage.com/Significado-institucional-y.html, Rev. Recherches en Didactique des Mathématiques, ISSN: 0246-9367, (en línea), 14(3), 325-355, (1994). Acceso: 8 de mayo (2015)

Godino, J.D. y Batanero, C., Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education, Mathematics Education as a research domain: a search for identity by A. Sierpinska & J. Kilpatrick , pp 177-195, Kluwer, Dordrecht, Netherlands (1998)

Godino, J. D., Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Universidad de Granada Documento de trabajo del curso de doctorado" Teoría de la educación Matemática". (En la web: http: //www. ugr. es/local/jgodino/Departamento de Didáctica de la Matemática, acceso: 7 de septiembre del 2015), Universidad de Granada, España (2003)

Godino, J. D., Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Universidad de Granada Documento de trabajo del curso de doctorado" Teoría de la educación Matemática". (En la web: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf, acceso: 8 de septiembre del 2015), Universidad de Granada, España (2010)

Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V., The Onto-semiotic approach to research in mathematics education,doi: 10.1007/s11858-006-0004-1, ZDM. The International Journal on Mathematics Education, (en línea), 39(1), 127-135 (2007)

Godino, J. D., Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Actas de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM-IACME), 111-132, Recife- Brasil, 26 al 30 de junio (2011)

Grozdev, S., T. Terzieva. Development of variational thinking skills in Programming teaching, Proceedings of the Anniversary International Conference, Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications, December 10-12, Plovdiv- Bulgaria (2010)

Hjalmarson, M. A. y Lesh, R., Design research. Engineering, systems, products, and processes for innovation, in Handbook of international research in mathematics education by L. D. English (Ed.), pp 520-534 Routledge Pub., London, UK (2008)

Isoda, M., The development of the language of function: An application of Van Hiele's levels. 20th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, 105-112, Valencia- España, july 8-12 (1996)

Lesh, R. y Sriraman, B., Mathematics Education as a design science, doi: 10.1007/BF02655858, Mathematics Education, (en línea), 137(6), 490-505 (2005)

Maury, E., Palmezano, G., Cárcamo, S., Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria, Escenarios, 10(1), 7-16 (2012)

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, 1a edición, 6-186, editorial M. Schmidt, Bogotá, Colombia (2006)

Molfino, V. V., y Buendía, A. G., El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización, http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273319425002, Rev. Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, ISSN: 1850-6666, (en línea), 5(1), 27-41 (2010). Acceso: 8 de Abril (2015)

Mendoza, M., Significando el Paso al Límite en Estudiantes que Inician Cálculo. Tesis de Grado (Maestría), Departamento de Matemática, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, Honduras (2013)

Torregrosa, G. y Quesada, H., Coordinación de procesos cognitivos en geometría. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500205. Rev. Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, ISSN: 1665-2436, (en línea), 10(2), 275-300, 2007. Acceso: 20 de Mayo (2015)

Vasco, C. E., Objetivos específicos, indicadores de logros y competencias ¿y ahora estándares?, http://die.udistrital.edu.co/publicaciones/articulos_en_revistas_no_indexadas/objetivos_especificos_indicadores_logros_y). Rev. Educación y cultura, ISSN: 0120-7164, (en línea), 62, 33-41, 2003, Acceso: 23 de mayo (2015)

Vasco, C. E., Didáctica de las Matemáticas. Artículos Selectos. 1a edición, 9-155, editorial Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia (2006)

Wittmann, E. C., Mathematics education as a ‘design science’, doi: 10.1007/BF01273911, Educational Studies in Mathematics, (en línea), 29(4), 355-374 (1995)

Warren, E., Miller, J., y Cooper, T. J., An exploration of young students' ability to generalise function tasks. 34th. Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia, pp. 752-759, Adelaide-Australia, july 3-7 (2011)

Zorn, P., Judson, T., Kota, O., Okabe, T., Kiuchi, T., y Becker, J., TSG 3: The Teaching and Learning of Calculus by H. Fujita et al., pp. 300-302. Kluwer Academic Publisher., Dordrecht, Netherlands (2004)