



Boletim de Ciências Geodésicas
ISSN: 1413-4853
bcg_editor@ufpr.br
Universidade Federal do Paraná
Brasil

DO NASCIMENTO GUIMARÃES, GABRIEL; BLITZKOW, DENIZAR
PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DA GEODÉSIA: UMA ABORDAGEM
CONCEITUAL

Boletim de Ciências Geodésicas, vol. 17, núm. 4, octubre-diciembre, 2011, pp. 607-624
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=393937722007>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DA GEODÉSIA: UMA ABORDAGEM CONCEITUAL

Geodetic Boundary Value Problem: A conceptual approach

GABRIEL DO NASCIMENTO GUIMARÃES¹
DENIZAR BLITZKOW¹

¹Departamento de Engenharia de Transportes da
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - EPUSP
LTG - Laboratório de Topografia e Geodésia
gabrielguimaraes33@hotmail.com; dblitzko@usp.br

RESUMO

Um dos problemas da Geodésia é determinar o campo de gravidade externo às massas, além da superfície limitante, bem como a variação temporal do mesmo. Stokes propôs no século XVIII uma formulação para a solução desse problema, porém implicava em algumas dificuldades. A formulação proposta por Molodensky em meados do século XX abriu uma nova perspectiva para a solução do problema. Ao longo dos anos, na Geodésia, a relevância do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) tem sido reconhecida como base teórica para essa disciplina. Além disso, o PVCG ganhou novo impulso com a era espacial e com o passar dos anos algumas alternativas foram elaboradas (super determinado, misto, solução de Brovar). Este trabalho tem como objetivo retratar as formulações de Stokes e Molodensky, bem como as principais alternativas do PVCG.

Palavras-chave: Geodésia; Problema de Valor de Contorno; Superfície limitante.

ABSTRACT

One of the Geodesy's problems is to determine the masses external gravity field, beyond the boundary surface, as well as the temporal variation. Stokes proposed a formulation in the 18th century to solve this problem, however some problems were implied. The formulation proposed by Molodensky in the middle of the -20th century opened a new perspective to solve this problem. Throughout the years, in Geodesy, the relevance of the Boundary Value Problem of Geodesy (BVPG) has been recognized as a theoretical basis for that discipline. In addition, the BVPG gained new impulse with the spatial era and in the meantime, many alternatives

Bol. Ciênc. Geod., sec. Comunicações/Trab. Técnicos, Curitiba, v. 17, nº 4, p.607-624, out-dez, 2011.

have been developed (overdetermined, mixed, Brovar's solution). This paper aims at presenting Stokes' and Molodensky's formulations as well as the main BVPG alternatives.

Keywords: Geodesy; Boundary Value Problem; Boundary surface.

1. INTRODUÇÃO

A componente altimétrica sempre foi uma das preocupações da Geodésia. Com efeito, o advento da era espacial tornou possível obter as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) que podem ser transformadas em coordenadas geodésicas (φ, λ, h). Anteriormente, as componentes planimétricas eram estabelecidas a partir da triangulação e poligonação e a componente altimétrica por meio de nívelamento geométrico, o que ocasionava uma dicotomia entre as redes planimétrica e altimétrica. Hoje, a altitude elipsoidal também pode ser determinada a partir de observações de satélites e está referenciada a um modelo geométrico utilizado para os cálculos geodésicos (elipsoide) e que não possui um significado físico. Isso faz com que essa componente não atenda a uma pequena quantidade de tarefas da Engenharia. Logo, percebe-se a necessidade de uma altitude adequada às exigências usuais.

O estabelecimento de um referencial altimétrico está associado à definição e à realização do mesmo. A escolha de uma superfície de referência adequada juntamente com um sistema de altitude constitui a definição de um referencial altimétrico. A realização pode ser conduzida através da determinação do nível médio dos mares durante um determinado período a partir de observações maregráficas. Além disso, deve-se efetuar correções referentes à carga oceânica e atmosférica, ao movimento da crosta terrestre e às marés oceânicas. Na Geodésia, as altitudes se classificam segundo a sua determinação, a aplicação e o modelo matemático ou físico considerado na sua definição. Desse modo, elas se distinguem em altitudes com característica geométrica e altitudes com característica física. Além do auxílio das técnicas espaciais, a altitude de um ponto também é obtida a partir de um procedimento conhecido como nívelamento. Esse pode ser barométrico, trigonométrico ou geométrico.

Listing, em 1873, caracterizou a forma da Terra como sendo um geoide. A superfície geoidal é equipotencial do campo de gravidade coincidente com o nível médio dos mares não perturbado em um dado instante. Uma das preocupações da Geodésia é o estudo do geoide e sua determinação realizada por meio do conhecimento do campo de gravidade que envolve a distribuição de massa e o efeito rotacional da Terra e que permite deduzir a sua forma. Para se determinar a função potencial do referido campo é necessário envolver o que se denomina de “Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG)” (FREITAS; BLITZKOW, 1999).

Existe uma relação direta entre o conceito de altitude e o PVCG, a qual deve ser analisada tanto do ponto de vista geométrico quanto físico. Contudo, deve-se

levar em conta a superfície eleita como origem para as medições altimétricas, além do seu significado como superfície de referência do campo de gravidade. Ademais, é necessário considerar os efeitos seculares e periódicos sobre as observações maregráficas na materialização da superfície de referência (BLITZKOW; CAMPOS; FREITAS, 2007).

2. A TEORIA DO POTENCIAL

A atração física que um determinado corpo exerce sobre objetos próximos a ele é o resultado da força gravitacional. Isaac Newton formulou a Lei Universal da Gravitação em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687, que descreve também as Leis de Newton – leis do movimento dos corpos celestes, base da mecânica clássica.

Duas partículas se atraem mutuamente com uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separam:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2} \quad (1)$$

onde G é a constante universal da gravitação, cujo valor no Sistema Internacional (SI) é:

$$G = (6,67384 \pm 0,00080) * 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

É conveniente, para evitar possível ambiguidade, considerar uma das partículas como “atrativa” e outra como “atraída”, atribuindo massa unitária à última. Desta forma:

$$F = G \frac{m}{l^2} \quad (2)$$

e expressa a atração gravitacional, gerada pela partícula de massa m , que atua sobre uma massa unitária situada a uma distância l . O potencial gravitacional de atração ou newtoniano é uma função escalar definida por:

$$V = G \frac{m}{l} \quad (3)$$

No caso de um sistema discreto de partículas:

$$V = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \quad (4)$$

Introduzindo um sistema de coordenadas cartesianas, considerando o potencial de atração V, as correspondentes derivadas parciais de primeira ordem são (GEMAEL, 1999):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(x - x'_i)}{l_i^3}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(y - y'_i)}{l_i^3}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(z - z'_i)}{l_i^3}\end{aligned}\quad (5)$$

e as de segunda ordem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i^3} - 3G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(x - x'_i)^2}{l_i^5} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i^3} - 3G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(y - y'_i)^2}{l_i^5} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i^3} - 3G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(z - z'_i)^2}{l_i^5}\end{aligned}\quad (6)$$

somando membro a membro a equação (6) tem-se:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 3 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i^3} - 3 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i^3} = 0 \quad (7)$$

ou, simplesmente:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (8)$$

A equação (8) é conhecida como equação de Laplace. Ela traduz o fato de que o laplaciano do potencial gravitacional é nulo fora das massas atrativas. Por essa razão ela é denominada função harmônica, pois satisfaz a equação de Laplace em todos os pontos no exterior do corpo.

3. O PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DA GEODÉSIA

O conhecimento de valores de uma determinada variável sobre uma superfície limitante e a partir daí, a determinação de uma função que se relacione àquela

variável, conduz ao que é chamado de “problema de valor de contorno” (BLITZKOW, 1996). Em suma, no PVC o que se busca determinar é uma função para um dado corpo.

O problema de valor de contorno é determinar o campo de gravidade externo às massas sendo que a superfície limitante é desconhecida. Stokes propôs uma formulação para obter o potencial perturbador em função da anomalia de gravidade sobre a superfície geoidal. Entretanto, essa proposição implica em algumas dificuldades, pois é um problema interno às massas. Uma nova formulação do problema fundamental da Geodésia foi proposta por Molodensky. Trata-se de um problema externo às massas que utiliza a superfície física como limite. Com isso não é necessário o conhecimento, mesmo que aproximado, de um modelo de distribuição de densidade no interior da crosta entre a superfície física e o geoide. No entanto, essa superfície não tem o mesmo significado físico que a superfície geoidal, pois não é uma superfície equipotencial.

A teoria do potencial apresenta três problemas de valor de contorno:

- Primeiro problema (Dirichlet): a partir do conhecimento dos valores de uma função T sobre uma superfície S , determina-se essa função T de tal maneira que ela seja harmônica no interior ou no exterior de S quando são conhecidos os valores que a função assume sobre a superfície:

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & r > R \\ T = \bar{T} & r = R \end{cases} \quad (9)$$

- Segundo problema (Neumann): a partir do conhecimento dos valores da derivada normal da função T sobre a superfície S , $\partial T / \partial r$, determina-se a função T de modo que ela seja harmônica interna ou externamente a S :

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & r > R \\ \frac{\partial T}{\partial r} = -\delta_g & r = R \end{cases} \quad (10)$$

- Terceiro problema (Hilbert): a partir dos valores da combinação linear da função T com sua derivada normal sobre a superfície S , determina-se a função T nas condições anteriores:

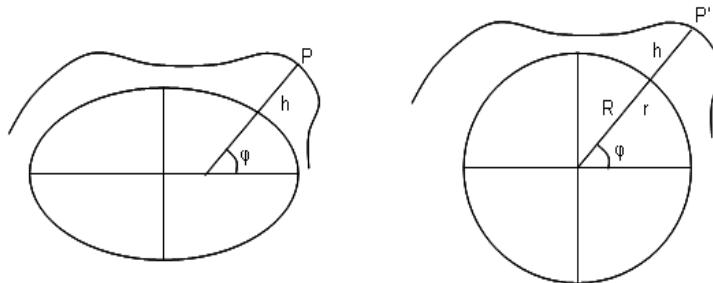
$$\begin{cases} \Delta T = 0 & r > R \\ \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r} T = -\Delta g & r = R \end{cases} \quad (11)$$

Tais problemas não apresentam solução única, pois infinitas distribuições de massa podem gerar o mesmo potencial. O terceiro problema tem relevância para a Geodésia, uma vez que a determinação do potencial perturbador de certa forma se relaciona a ele. A anomalia de gravidade é representada como uma combinação linear entre o potencial perturbador e sua derivada normal e é expressa por uma equação diferencial conhecida como “equação fundamental da Geodésia”:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T \quad (12)$$

A Figura 1 representa um ponto P no espaço com coordenadas geodésicas (h, φ, λ) referidos ao elipsoide e um ponto P' com coordenadas esféricas (r, φ, λ) referidos à esfera, sendo $r = R$. Essa aproximação consiste em calcular o ponto P' como se fosse o ponto P . Isso pode ser conduzido a partir de uma linearização envolvendo o potencial perturbador e quantidades similares. Segundo Moritz 1980, o erro em função do não achatamento da esfera, que é de 0,3% pode ser negligenciado. Isso é usualmente permitido, por consequência, a aproximação esférica é utilizada na fórmula de Stokes (e.g. GOLDANI; QUINTAS, 2010) e (e.g. TOCHO et al., 2008), em soluções práticas do problema de Molodensky e também na colocação por mínimos quadrados (e.g. SOUZA; SÁ, 2008).

Figura 1 – Aproximação esférica.
Fonte: Adaptado de Moritz (1980).



3.1 A Formulação de Stokes

A concepção clássica do PVCG é devida a Stokes. A fórmula ou integral de Stokes publicada em 1849 é considerada a de maior importância para a Geodésia. O problema clássico pode ser resolvido em termos do potencial perturbador por meio da referida integral, que numa aproximação esférica assim se expressa: (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2005).

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (13)$$

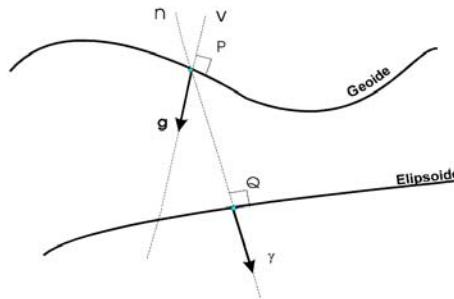
onde o vetor anomalia de gravidade (Figura 2) é definido por:

$$\Delta g = \bar{g}(P) - \bar{\gamma}(Q) \quad (14)$$

$\bar{g}(P)$ = vetor gravidade num ponto P da Terra real

$\bar{\gamma}(Q)$ = vetor gravidade num ponto Q da Terra normal

Figura 2 – Vetores \bar{g} e $\bar{\gamma}$.
Fonte: Blitzkow (1996).



e a função de Stokes $S(\psi)$ é dada por:

$$S(\psi) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6 \operatorname{sen}\frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos\psi - 3 \cos\psi \ln\left(\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\psi}{2}\right) \quad (15)$$

Considerando o teorema de Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad (16)$$

chega-se a:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (17)$$

onde N é a ondulação geoidal.

A fórmula de Stokes na sua forma original equações (13) e (17) somente se aplica a um elipsoide de referência que (1) tenha o potencial de gravidade U_0 sobre o elipsoide igual ao potencial W_0 sobre o geoide; (2) cuja massa seja numericamente igual à massa da Terra; e (3) com mesma velocidade angular (ω) (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2005).

3.2 A Formulação de Molodensky

O desconhecimento de um modelo de distribuição de densidade no interior da crosta terrestre levou Mikhail Molodensky, em 1945, a propor a superfície física como superfície limitante. Neste caso, substitui-se o conceito de geoide pelo quase-geoide. A anomalia de gravidade e as deflexões da vertical referem-se à superfície física e não mais à superfície geoidal. Além disso, as anomalias de altura tomam lugar antes ocupado pelas ondulações geoidais e a superfície limitante agora não possui um significado físico, não sendo equipotencial. A fórmula de Gauss, equação (18), bem como as identidades de Green estão entre as equações básicas na teoria do potencial e integram a fundamentação matemática para a formulação “moderna” do PVCG.

$$\iiint_v \operatorname{div} F dv = \iint_S F_n dS \quad (18)$$

onde v é o volume delimitado pela superfície S , F_n é a projeção do vetor F na superfície externa normal n e $\operatorname{div} F$ é a chamada divergência do vetor F .

A partir das seguintes relações (maiores detalhes em HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$F_n = \frac{\partial V}{\partial n} \quad \text{e} \quad F = \nabla V \quad (19)$$

chega-se a integral de Gauss para o potencial:

$$\iiint_v \nabla V dv = \iint_S \frac{\partial V}{\partial n} dS \quad (20)$$

As identidades de Green são derivadas a partir da equação 18. A terceira identidade aplicada ao potencial de gravidade W , para um ponto sobre a superfície da Terra S ($p = 2\pi$) e após algumas transformações (HEISKANEN; MORITZ, 1967) chega-se:

$$-2\pi W + \iint_S \left[W \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial n} \right] dS + 2\pi\omega^2 (x^2 + y^2) + 2\omega^2 \iiint_v \frac{dv}{l'} = 0 \quad (21)$$

onde S é a superfície física da Terra; l é a distância entre o ponto fixo P e o elemento da superfície dS ; n a normal à superfície, orientada para fora de S ; (ω) é a velocidade angular; l' é a distância entre o ponto P e o elemento do volume dv ; $\partial W / \partial n$ a componente do vetor \vec{g} normal a S .

Esse conceito retrata a determinação da forma da Terra S a partir de medidas de g e W . A combinação do nivelamento com medidas de gravidade em um ponto P resulta no potencial de gravidade W , a menos de uma constante W_0 .

$$W = W_0 - \int_0^P g dh \quad (22)$$

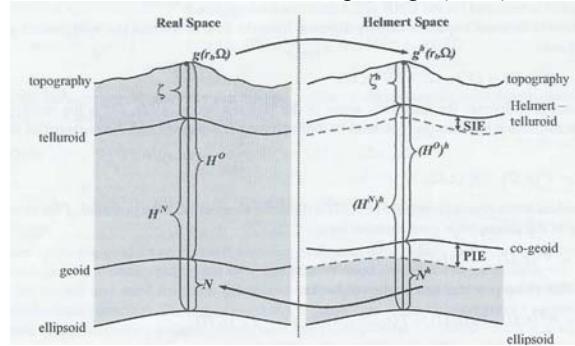
As incógnitas a serem determinadas são S e W , já que a componente normal $\partial W / \partial n$ do vetor gravidade \vec{g} é determinada por medidas de gravimetria e sua direção estabelecida por coordenadas astronômicas. A equação (18) caracteriza-se por uma forma integral não-linear, impondo sua linearização para uma solução. Detalhes acerca da linearização podem ser encontrados em (HEISKANEN; MORITZ, 1967) e (BLITZKOW, 1996). Após o processo de linearização tem-se a seguinte equação (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$T - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cos \beta \right] T d\Sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{1}{l} [\Delta g - \gamma (\xi \tan \beta_1 + \eta \tan \beta_2)] \cos \beta d\Sigma \quad (23)$$

sendo T a incógnita, ξ e η as componentes do desvio da vertical e β_1 e β_2 os ângulos de inclinação do terreno em relação à horizontal respectivamente segundo um perfil norte-sul e leste-oeste. O ângulo β representa a inclinação máxima.

A equação (23) retrata o PVCG segundo a concepção de Molodensky. Para tanto, algumas considerações devem ser enfatizadas para a compreensão do problema. A Figura 3 ilustra as quantidades envolvidas no espaço real e de Helmert, onde SIE (*Secondary Indirect Effects*) são os efeitos indiretos secundários e PIE (*Primary Indirect Effects*) os efeitos indiretos primários.

Figura 3 – Quantidades envolvidas no espaço real e de Helmert.
Fonte: SHGEO software package (2005).



A anomalia de altura ζ pode ser considerada como a distância entre a superfície física e a superfície do teluroide. Ela é obtida por meio da seguinte equação:

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \quad (24)$$

A altitude normal H_{norm} substitui a altitude ortométrica H e a anomalia de altura ζ a ondulação geoidal N .

$$h = H_{norm} + \zeta \quad (25)$$

Além disso, a superfície de referência utilizada passa a ser o teluroide (HIRVONEN 1960, 1961). Trata-se de uma superfície cujo potencial normal U em um dado ponto Q é igual ao potencial de gravidade W em todos os pontos P da superfície física, $W_P = U_Q$. Sendo assim o referido teluroide passa a ser denominado de teluroide de Marussi. A altitude normal H_{norm} é obtida a partir do número geopotencial C :

$$H_{norm} = \frac{C}{\gamma Q_0} \left[1 + (l + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \frac{C}{a \gamma Q_0} + \left(\frac{C}{a \gamma Q_0} \right)^2 \right] \quad (26)$$

onde o potencial perturbador T é obtido pela solução da equação (23) e a anomalia de gravidade pela (14). No caso da ζ ser plotada a partir do elipsoide, resultará em uma superfície denominada por Molodensky de quase-geoide. A partir da Figura 3

obtêm-se as seguintes relações após considerar as curvaturas das diferentes linhas de campo:

$$h = H_{norm} + \zeta$$

$$h = H + N$$

$$N - \zeta = H_{norm} - H$$

A equação (23) pode ser aplicada ao geoide desde que um adequado processo de regularização cuide da remoção das massas externas do mesmo. Nestas condições, ao invés do teluroide adota-se como superfície aproximada a do elipsoide. Por outro lado, $\beta_1 = \beta_2 = \beta = 0$ e $\partial / \partial n = \partial / \partial h$. Assim a equação (26) reduz-se a:

$$T - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \frac{1}{l} \right] T dE = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\Delta g}{l} dE \quad (27)$$

O fato de não conter as componentes da deflexão ζ e η , faz com que a equação (27) se torne mais simples que a (23). No caso de uma aproximação esférica, a solução da (27) é dada simplesmente pela integral de Stokes. Tal fato é verdadeiro, uma vez que a fórmula de Stokes expressa T em termos de Δg .

4. IMPORTANTES CONSIDERAÇÕES DO PVCG

É sabido que a determinação do campo de gravidade da Terra a partir de dados terrestres está relacionada com a formulação dos problemas de valor de contorno. Várias versões do PVCG podem ser formuladas. Isso dependerá do tipo de dados, além do tipo e da quantidade de funções desconhecidas. Ademais, os dados ditos “clássicos”, tais como, potencial de gravidade e coordenadas astronômicas combinados com dados de satélites, contribuem para novas versões do PVCG, como: misto, super determinado (HECK, 1997) e a solução de Brovar (HECK, 2011). Vale salientar que atualmente o PVCG ainda é fonte de estudos na Geodésia (VAL'KO, et al. 2008), (ARDALAN; KARIMI; BILKER-KOIVULA, 2010) e (FERREIRA, 2010). Nos próximos parágrafos será apresentada uma revisão conceitual dos três problemas clássicos: livre ou vetorial livre, escalar livre e fixo, além do PVCG gravimétrico fixo.

O modelo físico-matemático do PVCG pode ser formulado da seguinte forma (HECK, 1988), (BLITZKOW 1996), (HECK, 1997):

(1) A Terra é assumida como um corpo rígido, não deformável, com velocidade uniforme ao redor de um eixo fixo no espaço. Toda a massa de atração está localizada no interior da superfície de contorno, no caso, a superfície física. O potencial gravitacional newtoniano é gerado a partir da atração dos elementos de

massa atuando sobre uma partícula teste, sendo este regular no infinito e que satisfaça a equação de Laplace no exterior às massas e a equação de Poisson no interior.

(2) A fim de descrever as posições no espaço, além de quantidades como o vetor gravidade, introduz-se à Terra um referencial fixo, com origem O no seu centro de massa. O eixo x adjacente no plano do Meridiano Internacional de Referência, o eixo z na direção do eixo de rotação orientado para o norte e por fim o eixo y jacente no plano do equador completa o sistema dextrógiro. O vetor de gravidade \vec{g} é representado pela equação:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\vec{g} \quad (28)$$

(3) A superfície de contorno S é suficientemente suave. Além disso, assume-se que tanto W quanto g sejam conhecidos sobre o contorno de forma contínua.

(4) Como incógnitas têm-se o potencial de gravidade W no exterior das massas e a geometria da superfície de contorno S .

4.1 O PVCG “Livre”

Antes do advento das técnicas espaciais, era impossível determinar como um todo a geometria da superfície terrestre com alta precisão. O estabelecimento de redes globais tri-dimensionais a partir de medidas de distâncias, ângulos horizontais, azimutes e distâncias zenitais não era possível devido à dificuldade da refração vertical. Perante essa situação originou-se a formulação do PVCG Livre, também conhecido como problema de Molodensky.

Trata-se de um problema de valor de contorno não linear “livre” ou “vetorial livre”, onde a “qualificação livre” está ligada ao fato do vetor posição ser uma incógnita. Não existe informação com relação à superfície de contorno. As observações que se têm são: W , g , Φ e Λ . Entretanto, a aplicação do PVCG livre possui a restrição de que o vetor posição está relacionado às observações que são basicamente coordenadas astronômicas; estas não possuem uma distribuição requerida e não atendem a precisão exigida (o erro é da ordem de $\sim 0,3'' \equiv 10\text{m}$).

4.2 O PVCG “Escalar livre”

No passado a dificuldade na determinação das componentes horizontais do vetor posição levou ao desenvolvimento de um PVCG escalar livre. De fato, a informação proveniente da posição horizontal na superfície não pode ser extraída a partir de soluções do chamado PVCG clássico. Nos levantamentos geodésicos, as coordenadas geográficas (φ, λ) eram derivadas dos métodos de poligonação e triangulação, a partir de medidas de ângulos e distâncias. A coordenada altimétrica (altitude elipsoidal), geralmente não era conhecida. Tal fato se deve à razão de não

se realizar regularmente o nivelamento geométrico nas triangulações e poligonações. O que se executa é o nivelamento trigonométrico, obtendo assim a altitude ortométrica. Contudo, para se obter a altitude elipsoidal era necessário conhecer a altura geoidal, sendo que esta não figura no problema de Molodensky. Com isto a opção foi de se utilizar o PVCG escalar livre, uma vez que se conhecem as coordenadas geográficas em todos os pontos $P \in S$.

Ressaltando a diferença deste com o problema livre: neste, as coordenadas planimétricas da posição de P são conhecidas sobre a normal em Q , sendo somente necessário conhecer $(h(\varphi, \lambda))$ para fixar a superfície desconhecida. Além disso, para suprir a falta de informação, duas quantidades do campo de gravidade são medidas: (W, g) . Ao passo que no outro, não se conhece nada sobre a posição P , sendo que 4 grandezas são medidas: W, g, Φ e Λ .

As condições para a solução do PVCG escalar livre são assim enunciadas (HECK, 1989a):

“Combinando as forças, gravitacional e centrífuga, o potencial de gravidade W é determinado no exterior de S .

$$\nabla^2 W = 2\omega^2 \quad (29)$$

E, além disso, deve-se admitir que W (a menos de uma constante W_0) e o módulo do vetor gravidade $\|g\|$ sejam fornecidos na forma de uma função contínua, que seja suficientemente suave sobre a superfície S . Admite-se também que as coordenadas geográficas estejam vinculadas a um elipsoide de referência.”

Seja um elipsoide, com mesma velocidade angular e mesma massa da terra real, na qual, o potencial U_0 , constante sobre a superfície, seja igual ao potencial W_0 sobre a superfície geoidal e com seu centro no centro de massa da terra. Esta figura de referência é denominada de terra normal. A esta vincula-se o potencial de gravidade normal U e o vetor gravidade normal γ .

Logo, esse PVC pode ser reformulado em termos de “pequenas” quantidades elegendo o potencial normal U e uma superfície limite conveniente Σ com $Q \in \Sigma$. Os pontos $P \in S$ e $Q \in \Sigma$ devem satisfazer uma correspondência biunívoca. Uma definição do teluroide consistente com a informação que é inserida no PVCG escalar livre é dada fixando P e Q ao longo da mesma normal passando por P (HECK, 1989a).

Consequentemente, o vetor da posição é expresso pela diferença de altitudes elipsoidais, chamada de “anomalia de altura”.

$$\zeta = h - H_{norm} \quad (30)$$

Analogamente, pode-se transformar a observação sobre a superfície física em “anomalia de potencial” ΔC e “anomalia de gravidade” $\Delta \gamma$. Para tanto, é necessário linearizar, pois ambas as anomalias dependem de funções não-lineares. A série de Taylor conduz à forma linearizada (HECK, 1989a). Outros detalhes acerca deste problema podem ser encontrados em (SACERDOTE; SANSÒ, 1986).

4.3 O PVCG “Fixo”

Essa alternativa do PVCG possui uma estreita relação com a era espacial. O advento da mesma propiciou a determinação de coordenadas em um referencial tridimensional geocêntrico. O surgimento de várias técnicas, aliado ao desenvolvimento tecnológico, colaboraram para que se alcançassem alta precisão no posicionamento. São algumas destas técnicas: LLR, SLR e GNSS. O completo conhecimento da geometria da superfície limite (φ, λ, h) faz com que somente uma incógnita permaneça indeterminada, o potencial de gravidade externo às massas atrativas. Para tanto, assume-se que o módulo do vetor gravidade $\|g\|$ seja conhecido de forma contínua e suficientemente suave sobre toda a superfície S . O problema continua sendo não linear, sendo que a não linearidade se deve exclusivamente da norma a ser aplicada no vetor g . A escolha de um potencial de referência U permite linearizar em função do potencial perturbador (HECK, 1991).

Um aspecto relevante tanto na escolha do PVCG escalar livre quanto no fixo é que, em ambos, a altitude empregada H_{norm} não possui sentido físico e sim matemático. Isso implicará na determinação do quase-geoide e não do geoide. Em termos geométricos, a diferença entre geoide e quase-geoide é que o primeiro é uma superfície equipotencial do campo de gravidade, enquanto o segundo não. Tal escolha pode afetar trabalhos relacionados ao fluxo de água, como a transposição de rios, construção de hidrelétricas, etc.

4.4 O PVCG “Gravimétrico Fixo”

O lançamento de satélites com o objetivo de explorar o comportamento dos oceanos, sobretudo aqueles com tecnologia por radar, contribuiu de forma significativa para o estudo de mais um PVCG, o chamado problema gravimétrico fixo.

A altimetria por radar tem auxiliado nas pesquisas sobre circulação oceânica e suas variações espaços-temporais, sendo que vários satélites têm colaborado para isso. Os mais recentes, JASON-1, JASON-2 e ENVISAT (*Environmental Satellite*), possuem uma precisão da medida de 2, 1 e 3 cm, respectivamente (CHELTON et al., 2001). O princípio da medida está associado em determinar uma distância R (*Range*) entre o satélite e a superfície do oceano. Para tanto, um pulso curto de radiação de microondas é transmitido do satélite até a superfície por um aparelho denominado de altímetro, sendo que parte dessa radiação é refletida de volta para o

sensor. A distância é calculada a partir do tempo de percurso do pulso (31) (CHELTON et al., 2001).

$$R = \hat{R} - \sum_j \Delta R_j \quad (31)$$

onde $\hat{R} = ct / 2$ é a distância calculada baseada na velocidade da luz no vácuo c e t é o tempo de propagação (ida e volta); ΔR_j , (com $j=1, \dots$) são as correções para as várias componentes da refração atmosférica.

Desta forma, a altura da superfície do mar (*Sea Surface Height*) é determinada pela seguinte expressão:

$$SSH = h - R \quad (32)$$

em que h é a altitude da órbita em relação a um elipsoide de referência específico do satélite altimétrico e R é a distância entre o satélite e a superfície do mar. É evidente que várias correções precisam ser realizadas até obter o valor de uma medida final. Mais detalhes podem ser encontrados em (CHELTON et al., 2001). A SSH está relacionada ao geoide por meio da seguinte expressão:

$$SSH = G + DT \quad (33)$$

sendo G o geoide e DT a dinâmica da topografia.

Com as recentes missões espaciais de baixa órbita, CHAMP (*CHAlleging Minisatellite Payload*), GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) e recentemente o GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*), a determinação do modelo geoidal nos oceanos tem sido cada vez mais precisa. A missão do satélite GOCE tem como objetivo determinar o geoide global com acurácia de 1-2 cm para uma resolução melhor que 100 km.

A diferença deste para o PVCG fixo é a superfície de contorno. Além disso, a única incógnita é o potencial de gravidade externo às massas atrativas, que pode ser determinado por meio de medidas gravimétricas a partir do auxílio de navios ou aeronaves adaptados para esse tipo de levantamento. De fato, esse também é um problema não-linear. Após a linearização (ČUNDERLÍK et al., 2008), o resultado é um PVCG gravimétrico fixo de derivada oblíqua, sendo a direção da derivada na superfície de contorno idêntica com a direção normal do vetor de gravidade normal $\gamma = gradU$ (HECK, 1989b).

5 SÍNTES DO PVCG

Apresentadas as duas formulações do PVCG e os aspectos relevantes do mesmo, a indagação que surge é saber qual a formulação a ser utilizada, ou melhor,

qual a superfície em que se trabalhará. A resposta está vinculada à possibilidade de dispor dos dados sobre a superfície conveniente. Será a partir dos mesmos que se poderá estabelecer subsídios para uma melhor determinação do geoide ou do quase-geoide. A Tabela 1 apresenta um comparativo entre os PVCG.

Tabela 1 – Grandezas do PVCG.

PVCG	Conhecido	Desconhecido	Sup. de contorno
Livre	Φ, Λ, W, g	φ, λ, h	superfície física
Escalar livre	φ, λ, W, g	h	superfície física
Fixo	$\varphi, \lambda, h, W, g$	-	superfície física
Gravimétrico fixo	$\varphi, \lambda, H, W, g$	-	superfície geoidal

Com relação às teorias de Stokes e Molodensky algumas considerações devem ser ressaltadas: Stokes propôs a determinação do geoide, enquanto Molodensky o quase-geoide; no primeiro é calculada a altura geoidal já, no segundo, a anomalia de altura. As anomalias de gravidade e as deflexões da vertical estão referidas ao nível dos mares (Stokes) e a superfície física (Molodensky). No primeiro, a superfície limitante envolve o campo de gravidade, enquanto no segundo não é uma superfície equipotencial. Por fim, a formulação de Stokes possui o problema do potencial perturbador não ser harmônico entre o geoide e a superfície da Terra, além da dificuldade das reduções topográficas.

Uma discussão do PVCG no contexto brasileiro e sul-americano diz respeito ao *datum* vertical em vista do Projeto SIRGAS (grupo de trabalho GTIII). Para a definição e a realização de um sistema de referência vertical global ou regional é necessário um modelo de gravidade da Terra baseado na combinação satelital e dados de gravimetria terrestre (marítima e aérea). O EGM2008 atende esse pressuposto. As inconsistências verticais entre os *data* locais provocados pelas tendências presentes nos dados de gravidade terrestre fazem com que o PVCG inclua valores de altitudes elipsoidais como uma nova observação. Além disso, são inseridos dados de aceleração da gravidade, deflexão da vertical e diferenças do geopotencial que permitem a unificação de um *datum* vertical global ou regional. Portanto, um sistema unificado deve compreender duas componentes: geométrica e física.

A componente com característica geométrica é dada por uma superfície de referência (elipsoide) e por altitudes elipsoidais (h). É importante que as altitudes elipsoidais estejam de acordo com a realização de um sistema de referência (ITRS - *International Terrestrial Reference System* e ITRF - *International Terrestrial Reference Frame*). Além disso, o elipsoide utilizado para derivar h a partir das coordenadas geocêntricas X, Y, Z tem que ser o mesmo empregado para estimar as ondulações geoidais ou anomalias de altura. Em relação à componente física, se a superfície de referência é baseada no geoide (altitudes ortométricas), deve-se

reduzir as medidas gravimétricas para a superfície. Caso a superfície de referência se baseie no quase-geoide (altitudes normais), está será única e consistente, porém não será uma superfície equipotencial, não possuirá significado físico. Com o objetivo de apresentar uma definição consistente, livre de ambiguidades, e correta do ponto de vista teórico, a componente física do sistema de altitudes deve ser dada em termos do número geopotencial, i.e. a superfície de referência deve ter um valor fixo para W_0 e as coordenadas verticais deverão ter os números geopotenciais referidos ao mesmo W_0 .

A determinação do número geopotencial absoluto é possível a partir de restrições adequadas. Para tanto, nessa aproximação considera-se o PVCG de duas maneiras: no oceano adota-se o PVCG gravimétrico fixo, na qual o número geopotencial estimado é aquele que se melhor adapta à superfície média do mar. Nos continentes emprega-se o PVCG escalar livre (aproximação de Molodensky), desde que os dados estejam referenciados a diferentes *data* verticais. Desta forma obtém-se tantos W_{0j} quanto sistemas de altitudes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARDALAN, A. A.; KARIMI, R.; BILKER-KOIVULA, M. An overdetermined geodetic boundary value problem approach to telluroid and quasi-geoid computations. *Journal of Geodesy*, v. 84, n. 1, p. 97-104, 2010.
- BLITZKOW, D. *O problema do valor de contorno da geodésia: resultados práticos para a América do Sul*. Tese (Livre Docência) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.
- BLITZKOW, D.; CAMPOS, I. de O.; FREITAS, S.R.C. *Altitude: o que interessa e como equacionar?* Informações Espaciais II – Notas de aula, Laboratório de Topografia e Geodésia - Escola Politécnica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- CHELTON, D. B.; RIES, J. C.; HAINES, B. J.; FU, L.L.; CALLAHAN, P. S. *Satellite altimetry and earth sciences, A handbook of techniques and applications: Satellite altimetry*. In: FU, L.L.; CAZENAVE, A. (Ed.). San Diego: Academic Press, p. 1-122, 2001.
- ČUNDERLÍK, R.; MIKULA, K.; MOJZEŠ, M. Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary-value problem. *Journal of Geodesy*, v. 82, n. 1, p. 15-29, 2008.
- FERREIRA, V. G.; FREITAS, S. R. C. Análise do termo de primeira ordem das séries de Molodenskii para o problema de valor de contorno da geodésia. *Boletim de Ciências Geodésicas*, v. 16, n. 4, p. 557-574, out-dez, 2010.
- FREITAS, S. R. C.; BLITZKOW, D. Altitudes e Geopotencial. *IGeS Bulletin N.9 – International Geoid Service*, Junho 1999, Milão, p. 47-62, 1999.
- GEMAEL, C. *Introdução a Geodésia Física*. Curitiba: Editora UFPR, 1999.
- GOLDANI, D.; QUINTAS, M. C. L. Um modelo geoidal para o estado do Paraná: aplicações da integral de Stokes e de um valor do geopotencial. *Boletim de Ciências Geodésicas*, v. 16, n. 1, p. 105-124, jan-mar, 2010.

Bol. Ciênc. Geod., sec. Comunicações/Trab. Técnicos, Curitiba, v. 17, nº 4, p.607-624, out-dez, 2011.

- HECK, B. The non-linear geodetic boundary value problem in quadratic approximation. *Manuscripta Geodaetica*, v. 13, p. 337-348, 1988.
- _____. A contribution to the scalar free boundary value problem of physical geodesy. *Manuscripta Geodaetica*, v.14, p. 87-99, 1989a.
- _____. On the non-linear geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface. *Bulletin Géodésique* v.63, p. 57-67, 1989b.
- _____. *On the linearized boundary value problems of physical geodesy*. Ohio State University, Report 407. Columbus, 1991.
- _____. Formulation and linearization of boundary value problems: from observables to a mathematical model. In: SANSÒ, F.; RUMMEL, R. (Eds.). *Geodetic boundary value problems in view of the one centimeter geoid*. Berlin: Springer, (Lectures Notes in Earth Sciences, v.65) p. 121-160, 1997.
- _____. A Brovar-type solution of the fixed geodetic boundary-value problem. *Studia Geophysica et Geodaetica* v. 55, n. 3 p. 441-454, 2011.
- HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. *Physical geodesy*. San Francisco: Freeman and Co., 1967.
- HIRVONEN, R.A. *New theory of gravimetric geodesy*. Publications of the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy, Helsinki, v. 32, 1960.
- _____. The reformation of geodesy. *Journal of Geophysical Research*, v. 66, p. 1471-1478, 1961.
- HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. *Physical geodesy*. 2nd Edition, New York: Springer, 2005.
- MORITZ, H. *Advanced Physical Geodesy*. Karlsruhe: Wichman Verlag, 1980.
- SACERDOTE, F.; SANSÒ, F. The scalar boundary value problem of physical geodesy. *Manuscripta Geodaetica*, v. 11, p. 15-28, 1986.
- SHGEO SOFTWARE PACKAGE. *Reference Manual 1*. Fredericton, New Brunswick, Canada, 2005. 36 p.
- SOUZA, S. F.; SÁ, N. C. Avaliação de modelos geodálicos gravimétricos determinados com funções covariâncias planas e esféricas (estudo de caso: estado de São Paulo e adjacências). *Boletim de Ciências Geodésicas*, v. 14, n. 3, p. 331-349, jul-set, 2008.
- TOCHO, C.; MIRANDA, S.; PACINO, M. C.; FORSBERG, R. Preliminary geoid model in San Juan province: a case study in the Andes. *Boletim de Ciências Geodésicas*, v. 14, n. 3, p. 316-330, jul-set, 2008.
- VAL'KO, M.; MOJZES, M.; JANÁK, J.; PAPCO, J. Comparison of two different solutions to Molodensky's G1 term. *Studia Geophysica et Geodaetica*, v. 52, n. 1, p. 71-86, 2008.

(Recebido em agosto de 2011. Aceito em outubro de 2011.)