



Boletim de Ciências Geodésicas

ISSN: 1413-4853

bcg\_editor@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná  
Brasil

CAVAGNOLI SEVERO, TIAGO; DE SOUZA, SÉRGIO FLORÊNCIO; TOMIO  
MATSUOKA, MARCELO; KRUGER GEHLEN, ALEKSEI  
ESTUDO DAS CORREÇÕES GRAVIMÉTRICAS PARA ALTITUDES FÍSICAS  
APLICADAS AOS DESNÍVEIS DA RAAP  
Boletim de Ciências Geodésicas, vol. 19, núm. 3, julio-septiembre, 2013, pp. 472-497  
Universidade Federal do Paraná  
Curitiba, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=393937731008>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal

Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

## **ESTUDO DAS CORREÇÕES GRAVIMÉTRICAS PARA ALTITUDES FÍSICAS APLICADAS AOS DESNÍVEIS DA RAAP**

*Study of gravity corrections for physics heights applied to the  
height differences of RAAP*

TIAGO CAVAGNOLI SEVERO  
SÉRGIO FLORÊNCIO DE SOUZA  
MARCELO TOMIO MATSUOKA  
ALEKSEI KRUGER GEHLEN

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Programa de Pós-Graduação em Sensoriamento Remoto  
Laboratório de Pesquisas em Geodésia – Instituto de Geociências  
Av. Bento Gonçalves, 9500, CEP 91501-970,  
Cx. Postal 15001, Porto Alegre, RS, Brasil  
{tiago.c.severo, sergio.florencio, tomiomatsuoka, alekseighlen}@gmail.com

### **RESUMO**

A adoção de uma rede altimétrica consistente constitui uma importante necessidade dentro da modernização do sistema geodésico nos contextos brasileiro e sul-americano. Atualmente na Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP) do Brasil aplica-se aos desníveis observados uma correção aproximada devido o não paralelismo das superfícies equipotenciais de forma a reduzir este erro, porém esta condição não assegura um significado físico para as altitudes. Buscando apresentar uma solução unívoca para a realização de sistemas altimétricos adota-se as altitudes físicas, as quais são fundamentadas no conhecimento do potencial da gravidade ( $W$ ), baseado em importantes condições definidoras de um sistema vertical moderno. O presente trabalho tem como objetivo determinar e avaliar a magnitude das correções das altitudes dinâmica, ortométrica de Helmert e normal em uma linha de nivelamento pertencente à RAAP situada na região nordeste do estado do Rio Grande do Sul em um trajeto que possui 1.179,73 m de desnível. Os resultados obtidos na correção dos desníveis observados para as altitudes dinâmicas,

ortométricas e normais são respectivamente de -20,45; 11,79 e 4,19 centímetros, sendo o sistema de altitude normal o mais compatível à atual rede altimétrica brasileira, pois as correções para este tipo de altitude possuem a maior aproximação ao termo corretivo aplicado aos desníveis da RAAP, dentre os sistemas avaliados.

**Palavras-chave:** Altitudes Físicas; Sistemas Altimétricos; Geopotencial.

### ABSTRACT

The adoption of a consistent altimetric network constitutes an important need within the modernization of the geodetic system in Brazilian and South American contexts. At present the Altimetric High Precision Network (RAAP) of Brazil an approximated correction is applied to the leveling increments, due to non-parallelism of equipotential surfaces in order to reduce this error; however, this condition does not guarantee a physical meaning for the heights. Searching for a univocal solution for the realization of altimetric systems, physics heights are adopted, based on the knowledge of the gravity potential ( $W$ ), and on important conditions for defining a modern vertical system. This study aims at determining and evaluating the magnitude of the correction of dynamic height, Helmert orthometric height and normal height in a leveling line which belongs to the RAAP located in the northeastern region of the state of Rio Grande do Sul in a path that has 1.179,73 m of gap. The results obtained in the correction of the leveling increments observed for dynamic height, orthometric height and normal height are respectively -20,45; 11,79 and 4,19 cm, being the normal height system the most compatible to the current Brazilian altimetric network, as the corrections for this kind of altitude are closely related to the correction term applied to the height differences of RAAP, among the systems evaluated.

**Keywords:** Physics Heights; Height Systems; Geopotential.

### 1. INTRODUÇÃO

O Brasil, assim como diversos outros países, vem desenvolvendo esforços com o intuito de modernizar seu sistema de referência altimétrico, revisando a definição e realização do mesmo. Nos trabalhos de Luz (2004); Kingdon *et al.* (2005); Amos *et al.* (2005); Featherstone e Kuhn (2006); Christie (1994); Kouba (2006); Véronneau e Héroux (2007), são abordadas questões altimétricas como o modelo de altitudes adotado e a sua vinculação a um *datum* vertical nos seus respectivos contextos locais, sendo em alguns destes trabalhos, propostas soluções para o problema da definição de um novo referencial vertical na área estudada.

Sistemas altimétricos podem ser interpretados de forma genérica como um sistema unidimensional métrico no qual quantifica a separação de duas superfícies de referência que definem o sistema, segundo uma determinada direção específica. Dessa forma, segundo Blitzkow *et al.* (2004) pode-se considerar de maneira geral, dois tipos fundamentais de altitudes: as não vinculadas ao campo da gravidade

terrestre, conhecidas como altitudes geométricas; e as ligadas ao conceito físico do potencial de atração da gravidade, chamadas altitudes físicas.

A atual rede altimétrica brasileira apresenta características as quais não satisfazem importantes requisitos de um sistema vertical moderno, como o significado físico das altitudes e o vínculo ao geopotencial global (BURŠA *et al.*, 2002; IHDe, 2007). As metodologias clássicas aplicadas na implantação tanto da rede de nivelamento, que carece do acompanhamento de observações gravimétricas e dos preceitos atuais para controle de qualidade, quanto do *Datum* Vertical, vinculado as observações maregráficas convencionais durante um período limitado de tempo e reduzido a uma determinada época (LUZ *et al.*, 2007 *apud* PALMEIRA e FREITAS, 2010), necessitam ser revisadas de forma a se adequarem à definição de um sistema altimétrico para América do Sul, conforme apresentado por Drewes *et al.* (2002).

Visando contribuir dentro do contexto apresentado, o presente trabalho tem como objetivo determinar e avaliar a magnitude das correções das altitudes dinâmica, ortométrica de Helmert e normal em uma linha de nivelamento pertencente à RAAP (Rede Altimétrica de Alta Precisão), auxiliando nos estudos para a definição de um sistema altimétrico compatível com o Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) atual.

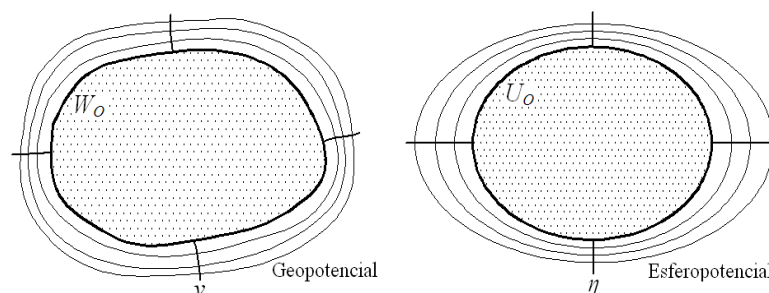
## 2. GEOPOTENCIAL E ALTITUDES

O processo de nivelamento geométrico via métodos ópticos ou opto/eletrônicos de medição proporciona diferença geométrica de altitude entre dois pontos. As diferenças de altitudes medidas variam de acordo com o campo de gravidade na região, além das irregularidades topográficas. As quantidades observadas ( $\delta n$ ) correspondem às distâncias existentes entre as superfícies equipotenciais do campo de gravidade terrestre. O somatório dos desníveis permite conhecer a diferença de altura entre os pontos extremos de interesse (FREITAS e BLITZKOW, 1999). A realização do processo de nivelamento geométrico deve ser efetuada sobre a superfície definida pelo horizonte local do eixo óptico do instrumento, posicionando as miras graduadas de forma com que estas estejam alinhadas com o vetor da força de gravidade nos correspondentes pontos.

Se um circuito fechado de nivelamento geométrico for mensurado, ou seja, uma linha de nivelamento que inicia em um ponto *A* e termina no mesmo ponto *A*, a soma dos desníveis parciais deve ser nula, pois a altitude da estação inicial é a mesma altitude da estação de término do circuito ( $H_A = H_A$ ). Entretanto, devido à presença inevitável de erros nos processos de medições, na prática dificilmente esta condição é obedecida. Mesmo que se tomem medidas para a redução desses erros, como a instalação do nível a igual distância das miras, minimizando a influência da curvatura terrestre e da refração atmosférica (TORGE, 2001, p. 206-210), o nivelamento geométrico conduzirá a diferentes altitudes para um ponto qualquer, nivelado a partir de percursos distintos, sendo que uma das causas é atribuída ao não paralelismo das superfícies equipotenciais. (HEISKANEN e MORITZ, 1967).

As superfícies equipotenciais do campo de gravidade descrevem superfícies de nível nas quais o valor do potencial gravimétrico é constante. O comportamento destas depende do modelo terrestre adotado, podendo ser a Terra real (geopotencial) ( $W$ ) ou a Terra normal (esferopotencial) ( $U$ ), representados na Figura 1. O espaçamento das superfícies equipotenciais da Terra real varia com a latitude ( $\varphi$ ) e também de acordo com a distribuição de massas na crosta terrestre, tendo como sua superfície de referência ( $W_0$ ) o Geóide (equipotencial que melhor se ajusta ao nível médio dos mares). O esferopotencial varia apenas de acordo com a latitude, sendo o elipsóide de revolução (modelo matemático definido por parâmetros geométricos e físicos, com distribuição de massa homogênea) a superfície de referência ( $U_0$ ) deste modelo.

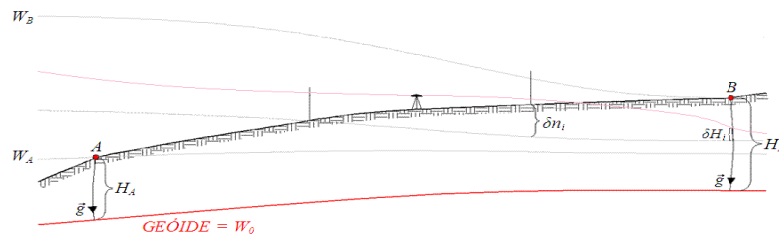
Figura 1 - Superfícies equipotenciais do campo de gravidade real e normal.



As linhas de força, perpendiculares às equipotenciais, descrevem o vetor da gravidade em um determinado ponto. Se estas são perpendiculares as linhas equipotenciais da gravidade real, denominam-se linhas de prumo ou verticais ( $v$ ), sendo medidos sobre estas linhas de força os valores da gravidade real. O campo de gravidade normal, descrito de forma apenas teórica, determina a linha normal ( $\eta$ ), onde se calculam os valores da gravidade normal ou teórica. O entendimento das diferentes linhas de força e campos da gravidade é essencial para a compreensão das altitudes, pois são estes os conceitos definidores das mesmas.

Na Figura 2 é mostrado o nivelamento geométrico entre dois pontos  $A$  e  $B$ , os quais são considerados suficientemente distantes, necessitando de diversas seções de nivelamento para conectá-los. A cada seção nivelada, os pontos de ré e vante estarão em diferentes superfícies equipotenciais. Assim, a soma de todos os desníveis ( $\delta n$ ) fornecerá a diferença geométrica de altitude entre os pontos  $A$  e  $B$ , a qual não será igual à diferença de altitude ortométrica ( $\delta H$ ) (distância contada sobre a vertical entre as superfícies física e do geóide) nos mesmos pontos. Isso ocorre, pois o espaçamento entre as superfícies equipotenciais não são constantes, gerando diferentes desníveis ( $\delta n_i \neq \delta H_i$ ) entre as mesmas superfícies equipotenciais.

Figura 2 - A soma dos desníveis parciais ( $\delta n_i$ ) entre os pontos  $A$  e  $B$  não será igual à soma das parcelas ( $\delta H_i$ ) entre as mesmas superfícies equipotenciais sobre a vertical do ponto  $B$ , devido o não paralelismo das superfícies equipotenciais.



A distinção das altitudes nivelada e ortométrica pode ser compreendida quando estas são relacionadas ao potencial da gravidade  $W$ . A equação (1) mostra que a gravidade ( $g$ ) é o gradiente vertical negativo do  $W$  em uma porção infinitesimal de  $H$  (HEISKANEN e MORITZ, 1967).

$$g = -\frac{\partial W}{\partial H} \quad (1)$$

Pode-se explicitar  $g$  como a grandeza física que relaciona o potencial e a altitude ortométrica, tratando a força da gravidade como o resultado de uma mudança de potencial em uma separação finita e isolando na mesma equação o potencial  $W$  (equação 2).

$$-\delta W = g \delta H \quad (2)$$

Assim, partindo-se do pressuposto que  $\delta n_i$  e  $\delta H_i$  possuem diferentes magnitudes, porém estão entre as mesmas superfícies equipotenciais, e que desta forma possuem iguais diferenças de potencial, chega-se a  $-\delta W = g \delta n_i = \bar{g} \delta H_{B,i}$ , onde  $g$  é o valor da gravidade sobre a estação de nivelamento na seção nivelada e  $\bar{g}$  a força da gravidade, medida na vertical da estação  $B$  (MEYER *et al.*, 2006), mostrando que a gravidade deve ser diferente nestes dois pontos. Dessa maneira, relacionam-se no contexto apresentado, as altitudes niveladas e ortométricas a partir de:

$$\delta H_{B,i} = \frac{g}{\bar{g}} \delta n_i \neq \delta n_i \quad (3)$$

onde as mesmas altitudes diferem apenas por um fator multiplicativo resultante da razão entre os valores da gravidade obtidos na superfície física onde determinou-se

o desnível, e sua correspondente na mesma equipotencial sobre a vertical do ponto no qual deseja-se determinar a altitude ortométrica.

Os sistemas altimétricos requerem o estabelecimento de uma definição unívoca e com significado físico. Nesse âmbito os sistemas de altitudes físicas devem ser baseados em números geopotenciais ( $C$ ). Este valor físico é calculado pela diferença de potencial entre a superfície de referência da Terra real, o Geóide ( $W_0$ ), e de um ponto de interesse  $W_P$ , sendo definido como uma “medida natural de altitude”, mesmo que este não apresente dimensões de comprimento. Conforme descrito por Heiskanen e Moritz (1967), o número geopotencial é dado por:

$$C = W_0 - W_P = \int_0^P g dn = \sum_{i=0}^P g_i \delta n_i \quad (4)$$

No entanto, o uso dos números geopotenciais como definição de altitudes é pouco intuitivo, devido ao difícil entendimento prático do potencial e, portanto, da unidade a qual esta grandeza é medida (distância ao quadrado dividida pelo tempo ao quadrado). A transformação de números geopotenciais para medidas de altitudes requer a divisão deste por um valor específico da gravidade, o qual definirá os diferentes tipos de altitudes físicas. Assim, todos os sistemas de altitudes natural/físico são baseados neste princípio (FEATHERSTONE *et al.*, 2006). A busca de uma solução unívoca para a altitude de um ponto  $P$  pode ser definida por meio de uma altitude científica ( $H^C$ ), onde  $G$  é o valor particular de gravidade considerado.

$$H^C = \frac{C}{G} \quad (5)$$

A partir da abordagem já exposta, onde se estabeleceu a importância das definições de gravidade e de potencial da gravidade como os principais elementos caracterizadores das altitudes, serão apresentadas neste contexto, os tipos altitudes físicas mais empregados na definição de sistemas altimétricos.

## 2.1 Altitude Dinâmica

O sistema de altitudes dinâmicas ( $H^D$ ) é estreitamente relacionado com o sistema de números geopotenciais. Como esta altitude é dada pela simples divisão de  $C$  por um valor constante de gravidade normal ( $\gamma_0$ ), o qual é calculado sobre o campo normal (esferopotencial), para alguma latitude arbitrária, iguais valores desta altitude materializam superfícies equipotenciais, preservando assim, as mesmas características nos dois sistemas com exceção da grandeza física medida. Conforme Heiskanen e Moritz (1967), a altitude dinâmica é calculada a partir de:

$$H^D = \frac{C}{\gamma_0} \quad (6)$$

O uso prático da altitude dinâmica não é recomendado pelo fato desta carecer de qualquer significado geométrico, sendo uma quantidade puramente física (Jekeli, 2000). Isso pode ser entendido pelo fato dos valores de altitudes neste sistema variarem com relação à gravidade de referência  $\gamma_0$  arbitrada, sujeitando um mesmo ponto a ter diferentes altitudes dinâmicas, dependendo do valor de  $\gamma_0$  utilizado.

A determinação das altitudes dinâmicas em uma linha de nivelamento é realizada através da aplicação da correção dinâmica ( $CD$ ), apresentada na equação (7), conforme Heiskanen e Moritz (1967). Esta corrige os desníveis brutos para altitudes dinâmicas em uma seção nivelada entre os pontos  $A$  e  $B$ , apresentados na Figura 2, onde  $g_i$  é o valor médio da gravidade entre as estações de nivelamento na seção nivelada,  $\delta n_i$  é o desnível bruto medido em cada seção, e  $\gamma_0$  é o valor constante da gravidade normal para alguma latitude arbitrária.

$$CD_{AB} = \sum_{i=A}^B \frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n_i \quad (7)$$

A correção dinâmica aplicada aos desníveis brutos pode ter valores elevados se a escolha de  $\gamma_0$  aplicada não for representativa na região onde se realizou a operação de nivelamento (Torge, 2001). Recomenda-se então para aplicações locais o uso da latitude média da região para o cálculo de  $\gamma_0$ . Para áreas com dimensões continentais, como o Brasil, a adoção de altitudes dinâmicas se tornaria inviável pela elevada magnitude de correções que deveriam ser aplicadas.

## 2.2 Altitude Ortométrica de Helmert

A distância contada desde a superfície do geóide até o ponto na superfície física da Terra ao longo da linha vertical é definida como altitude ortométrica ( $H$ ) do ponto (Freitas e Blitzkow, 1999), conforme apresentado na Figura 3. Esta altitude é definida por (Heiskanen e Moritz, 1967) pela equação (8), no qual  $\bar{g}$  é o valor médio da força da gravidade ao longo da vertical do ponto na superfície terrestre, até sua projeção sobre o geóide. Nota-se que a equação obtida em (3) apresenta o mesmo resultado que (8), considerando que em (3),  $C_B$  pode ser calculado pelo somatório do produto entre gravidade e desníveis observados em uma linha de nivelamento conectando um ponto sobre  $W_0$  até o ponto  $B$  conforme a equação (4).

$$H = \frac{C}{\bar{g}} \quad (8)$$

Dada à impossibilidade de se obter  $\bar{g}$  no interior da crosta terrestre, a altitude ortométrica tem um caráter puramente teórico, não podendo ser obtida a menos de hipóteses simplificativas sobre a densidade do material que compõe a litosfera (TENZER *et al.*, 2005). Existem diversos métodos de redução gravimétrica, os



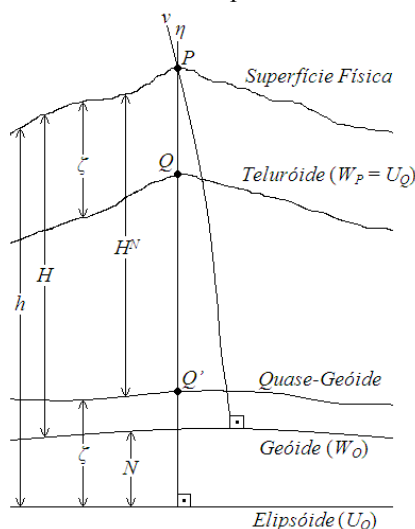
quais variam segundo o tratamento dado as massas topográficas externas ao geóide (HWANG e HSIAO, 2003; TENZER *et al.*, 2005) determinando os distintos tipos de altitude ortométrica.

A forma mais simples de determinação da altitude ortométrica utiliza a redução gravimétrica simplificada de Poincaré-Prey, sendo esta conhecida como altitude ortométrica de Helmert (FILMER *et al.*, 2010). A redução de Poincaré-Prey aplica uma série de simplificações com respeito às massas externas ao geóide, como a negligência do efeito do terreno e variações de densidade nas massas topográficas (TENZER *et al.*, 2005). A aproximação de  $\bar{g}$  nesta redução é dada por Heiskanen e Moritz (1967):

$$\bar{g} = g_P + 0,0424(H_P) \quad (9)$$

onde  $g_P$  (Gals) é o valor da gravidade observada no ponto  $P$  sobre a superfície terrestre, e  $H_P$  (km) é a altitude ortométrica de  $P$  (Figura 3).

Figura 3 – Medidas relacionadas às superfícies altimétricas de referência.



Altitudes ortométricas podem também ser calculadas a partir das correções ortométricas ( $CO$ ) aplicadas aos desníveis mensurados, conforme Heiskanen e Moritz (1967):

$$CO_{AB} = \sum_{i=A}^B \frac{g_i - \gamma_O}{\gamma_O} \delta n_i + \frac{\bar{g}_A - \gamma_O}{\gamma_O} H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma_O}{\gamma_O} H_B \quad (10)$$

onde a redução de Poincaré-Prey, dada na equação (9) deve ser aplicada anteriormente para determinar o valor médio da gravidade nos pontos  $A$  ( $\bar{g}_A$ ) e  $B$  ( $\bar{g}_B$ ).

$\bar{g}_B$ ), os quais possuem respectivamente altitudes ortométricas  $H_A$  e  $H_B$ . O primeiro termo da equação (10) a direita da igualdade representa a correção dinâmica, enquanto os termos adicionais são acrescentados para a correção ortométrica. Dessa forma o valor de  $\gamma_0$  não mais influenciará no valor das correções obtidas, apesar de estar presente em (10).

### 2.3 Altitude Normal

Com a intenção de contornar o problema da determinação da gravidade real média ao longo da vertical ( $\bar{g}$ ), em 1945 Molodensky (Molodensky *et al.*, 1962) propôs a concepção do sistema de altitudes normal. Este consiste na substituição de  $\bar{g}$  pelo valor médio da gravidade normal medida sobre a linha normal entre o telúroide e o elipsóide de referência ( $\bar{\gamma}$ ), conforme apresentado por Heiskanen e Moritz (1967) em (11).

$$H^N = \frac{C}{\bar{\gamma}} \quad (11)$$

A superfície conhecida como telúroide pode ser melhor entendida se imaginarmos um ponto  $P$  localizado na superfície terrestre, o qual possui certo potencial  $W_P$  e também certo potencial normal  $U_P$ , sendo em geral ( $W_P \neq U_P$ ). Existirá um ponto  $Q$ , ao longo da normal, onde ( $W_P = U_Q$ ), assim esta superfície será definida pelos pontos onde o potencial normal  $U$  no ponto  $Q$  é igual ao potencial  $W$  no ponto  $P$  (HOFMANN-WELLENHOF e MORITZ, 2005), indicando que o telúroide não representa uma superfície equipotencial, pois normalmente pontos na superfície física possuem diferentes  $W_P$ .

A distância contada entre os pontos  $P$  e  $Q$  representa a anomalia de altitude  $\zeta$ . Esta mesma distância contada a partir do elipsóide de referência, materializa o quase-geóide, sendo esta superfície igualmente não definidora de uma equipotencial. Dessa forma, a altitude normal ( $H^N$ ) do ponto  $P$ , pode ser definida como a distância entre o quase-geóide e a superfície física, contada sobre a linha normal passante pelo ponto  $P$ , conforme apresentado na Figura 3.

A correção aplicada aos desníveis brutos para a correção normal (CN), dada na equação (12) por Heiskanen e Moritz (1967), é similar à apresentada em (10), onde se realiza a correção ortométrica. Para o cálculo de (12) é necessário o conhecimento prévio das altitudes normal nas estações inicial  $H_A^N$  e final  $H_B^N$  da seção nivelada. Assim como para a altitude ortométrica, a correção normal independe do valor de  $\gamma_0$  escolhido como referência.

$$CN_{AB} = \sum_{i=A}^B \frac{g_i - \gamma_0}{\gamma_0} \delta n_i + \frac{\bar{\gamma}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A^N - \frac{\bar{\gamma}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B^N \quad (12)$$

Ainda para os pontos inicial (*A*) e final (*B*) deve-se determinar o valor médio da gravidade normal  $\bar{\gamma}$  entre a estação observada e seu correspondente no quase-geóide ao longo da linha normal (equivalente a média de  $\gamma$  realizada sobre a linha normal entre o teluróide e o elipsóide de referência). Para tanto, calcula-se primeiramente o valor da gravidade normal  $\gamma$  correspondente aos pontos *A* e *B* a partir da equação (13) dada por Moritz (1980).

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (13)$$

O valor de  $\gamma$  é dependente de parâmetros do elipsóide de referência e da latitude ( $\varphi$ ) do ponto de interesse. Sendo  $e^2$  a primeira excentricidade do elipsóide, definida por seus semi-eixos  $a$  e  $b$ ; e  $k$  dado por ( $k = (b \gamma_p / a \gamma_e) - 1$ ), onde  $\gamma_e$  e  $\gamma_p$  são a gravidade normal no equador e nos pólos respectivamente, para o elipsóide de referência.

A fórmula para calcular  $\bar{\gamma}$  deriva da correção de segunda ordem ar-livre da gravidade (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$\bar{\gamma} = \gamma \left[ 1 - (1 + \alpha + m - 2\alpha \sin^2 \varphi) \frac{H^N}{a} + \frac{(H^N)^2}{a^2} \right] \quad (14)$$

na qual  $m$  representa a relação entre a força centrífuga no equador e a gravidade normal equatorial; e  $\alpha$  é o achatamento do elipsóide de referência.

A determinação de  $\bar{\gamma}$  dispensa qualquer hipótese sobre distribuição de densidade de massas ou correções no terreno, tornando o sistema de altitudes normal, uma alternativa à utilização da altitude ortométrica. Porém faz-se a ressalva que o quase-geóide, diferentemente do geóide, não materializa uma superfície equipotencial.

#### 2.4 Relação das altitudes ortométrica e normal

Conforme Heiskanen e Moritz (1967) a separação entre geóide e quase-geóide e conseqüentemente a diferença entre as altitudes ortométrica e normal é dada por Heiskanen e Moritz (1967) na equação (15), onde ( $N$ ) é a altura geoidal, sendo esta contada pela reta perpendicular ao elipsóide, deste ponto até o geóide, conforme mostrado na Figura 3.

$$H - H^N = \zeta - N = \frac{\bar{\gamma} - \bar{g}}{\bar{\gamma}} H \quad (15)$$

Na mesma figura pode se extrair a relação entre as altitudes normal e ortométrica com respeito à altitude elipsoidal ( $h$ ), sendo esta uma altitude de característica puramente geométrica contada do elipsóide até a superfície física

sobre a reta perpendicular ao elipsóide de referência. Dessa forma o sinal de aproximado nas equações (16) e (17) se da ao fato que as diferentes altitudes são medidas em diferentes linhas.

$$H \approx h - N \quad (16)$$

$$H^N \approx h - \zeta \quad (17)$$

A partir da equação (15) nota-se que o conhecimento da separação entre as superfícies de referência da altitude ortométrica e normal é dependente do tratamento de  $\bar{g}$ , sendo o mesmo problema encontrado na determinação da altitude ortométrica rigorosa. A precisão alcançada na investigação do comportamento de  $g$  ao longo da vertical até o geóide é dependente das condições de topografia e complexidade geológica da região analisada. Assim uma área plana, baixa e com densidade de massas homogêneas alcançará uma precisão em  $\bar{g}$  maior que regiões acidentadas, altas e geologicamente complexas (FLURY e RUMMEL, 2009a), tornando importante a adoção de modelos fisicamente compatíveis com as características da área de interesse.

A correta redução do valor da gravidade até o geóide, e por consequência na determinação de  $\bar{g}$ , requer o conhecimento do gradiente vertical da gravidade ( $\partial g / \partial H$ ), dado pela equação de Bruns (18) (BRUNS, 1878 *apud* HEISKANEN e MORITZ, 1967), onde  $G$  é a constante universal de Newton, e  $\omega$  é a velocidade angular da Terra.

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2 \quad (18)$$

Porém a determinação deste gradiente requer o conhecimento da curvatura média das superfícies equipotenciais ( $J$ ) e da densidade das massas topográficas externas ao geóide ( $\rho$ ). Esta situação é contornada com a aplicação do gradiente normal da gravidade ( $\partial \gamma / \partial h$ ), onde na equação (18) substitui-se o campo da Terra real pelo campo normal, na correspondente altura elipsoidal ( $h$ ) do ponto no qual se deseja realizar a redução gravimétrica. Se  $\rho=0$ , então assume-se não existir massas externas ao elipsóide de referência, levando a concepção do gradiente normal ar-livre (equação 19), conforme Heiskanen e Moritz (1967).

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\gamma J - 2\omega^2 \quad (19)$$

Numericamente, se negligenciado a variação de ( $\partial \gamma / \partial h$ ) com a latitude, e  $J$  for aproximado ao valor médio de curvatura das superfícies do esferopotencial, então, o

valor da redução ar-livre ( $F$ ), para  $H$  em metros, é dado por Heiskanen e Moritz (1967) pela equação:

$$F = -\frac{\partial \gamma}{\partial h} H = 0,3086 H_{[mgal]} \quad (20)$$

Uma aproximação um pouco mais realista da redução de  $g$  até a sua projeção no geóide pode ser obtida a partir da contribuição do platô de Bouguer, sendo o objetivo deste modelo, remover completamente o efeito das massas topográficas sobre o geóide (Hofmann-Wellenhof e Moritz, 2005). Assumindo a área próxima a uma estação  $P$  onde se deseja reduzir  $g$ , como plana, horizontal e com densidade de massas homogênea, pode se tratar a atração ( $A_B$ ) dessa massa sobre  $P$  como a atração de um cilindro de raio infinito e de altura  $H$  conforme apresentado em Heiskanen e Moritz (1967).

$$A_B = 2\pi G \rho H \quad (21)$$

Se o valor de densidade padrão for utilizado ( $\rho = 2,67 \text{ g cm}^{-3}$ ), e  $H$  for expresso em metros, a equação (21) torna-se:

$$A_B = 0,1119 H_{[mgal]} \quad (22)$$

A remoção da atração do platô de Bouguer é conhecida como redução Bouguer incompleta. A combinação deste processo com a redução ar-livre ( $F$ ) realiza a redução Bouguer completa (equação 23) da gravidade na superfície física até o geóide (Hofmann-Wellenhof e Moritz, 2005).

$$g_B = g - A_B + F = g + 0,1967 H \quad (23)$$

Se a altitude ortométrica de Helmert for analisada em um contexto de separação geóide e quase-geóide o termo ( $\bar{\gamma} - \bar{g}$ ) pode ser aproximado pelo valor negativo da anomalia de gravidade Bouguer ( $\Delta g_B$ ) dado em Heiskanen e Moritz (1967):

$$\bar{\gamma} - \bar{g} = -\Delta g_B = -(g_B - \gamma) \quad (24)$$

onde  $g_B$  é a gravidade real reduzida ao geóide ( $W_O$ ) pela redução Bouguer completa, e  $\gamma$  é a gravidade normal sobre o elipsóide de referência ( $U_O$ ). Se o valor de  $\bar{\gamma}$  no denominador da equação (15) for considerado um valor constante ( $\sim 981 \text{ gals}$ ) então se obtém (25):

$$(\zeta - N)_{[m]} = -\Delta g_{B[mgal]} H_{[m]} \quad (25)$$

As anomalias Bouguer são geralmente negativas sobre os continentes, sendo então, a diferença ( $\zeta - N$ ) positiva nestas áreas (HEISKANEN e MORITZ, 1967). Regionalmente o valor das anomalias Bouguer dependerá da altitude média da região, decrescendo aproximadamente 0,1 gal a cada 1000 m de elevação média no terreno (HEISKANEN e MORITZ, 1967), porém localmente este valor tende a se manter constante quando utilizado um valor de  $\rho$  único para a região, levando a separação ( $\zeta - N$ ) ser diretamente proporcional a altitude.

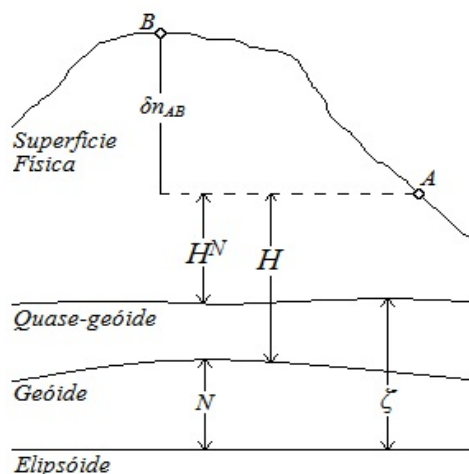
As correções obtidas para as altitudes ortométrica ( $CO$ ) e normal ( $CN$ ) são somadas aos desníveis brutos ( $\delta n$ ) de forma que este apresente as características específicas de cada uma das altitudes citadas. Em uma linha nivelada conectando dois pontos  $A$  e  $B$  a diferença de altitude ortométrica e normal entre estas estações é dada pela subtração dos valores de  $CO$  e  $CN$  nas expressões (26) e (27) respectivamente.

$$\delta H_{AB} = \delta n_{AB} + CO_{AB} \quad (26)$$

$$\delta H_{AB}^N = \delta n_{AB} + CN_{AB} \quad (27)$$

Dessa forma se  $CO$  for maior que  $CN$  em uma linha nivelada, constata-se que o valor da ondulação geoidal ( $N$ ) será menor que a anomalia de altitude ( $\zeta$ ). Isso pode ser mais bem compreendido na Figura 4. Pode-se então esperar em áreas sobre os continentes, correções ortométricas com valores maiores que correções normais para os desníveis brutos.

Figura 4 – Relação da anomalia de altitude e ondulação geoidal com as altitudes normal e ortométrica.



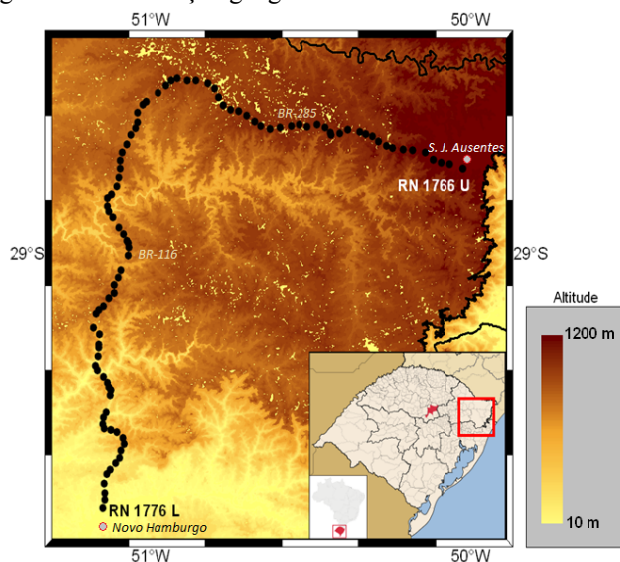
Conforme Sjöberg (2006) em regiões de grande elevação e terreno acidentado, os efeitos de correção topográfica e de variação lateral de densidades das massas podem ter magnitudes da mesma ordem que o termo relacionado à anomalia Bouguer na modelagem da separação geóide e quase-geóide. Assim, a relação obtida a partir da anomalia Bouguer, nesta separação, pode apresentar inconsistências na representação da realidade física em regiões montanhosas. Estudos como Marti (2005) e Flury e Rummel (2009a) mostram que a separação das superfícies é reduzida se a contribuição das massas topográficas for considerada.

### 3. INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA

Para o cálculo das correções dinâmica, ortométrica de Helmert, e normal, utilizou-se os seguintes dados: desníveis observados corrigidos de erros sistemáticos, que compõem linhas niveladas pertencentes à RAAP, à qual compõe o Sistema Geodésico Brasileiro, obtidas junto ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE); e valores da gravidade sobre os desníveis observados, cedidos pelo Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas (IAG).

O experimento foi realizado em uma linha de nivelamento situada na região nordeste do estado do Rio Grande do Sul (Figura 5), desenvolvida ao longo das BR-116 e BR-285 desde o município de Novo Hamburgo até o município de São José dos Ausentes. O trajeto nivelado possui 1.179,73 m de desnível, compreendido entre as RRNN 1776L e 1766U em uma extensão de aproximadamente 308 km.

Figura 5 – Localização geográfica das RRNN na área de estudo.



O desnível calculado a partir dos dados de nivelamento observados (brutos) difere em 13,62 cm do desnível obtido a partir dos memoriais descritivos das RRNN, que compõem a rede de nivelamento ajustada e corrigida de termo aplicado aos desníveis observados (equação 28), o qual atenua o erro causado pelo não paralelismo das superfícies equipotenciais, manifestado pela falta de dados gravimétricos disponíveis.

$$C_o = -\frac{H_m(C_1 \sin 2\varphi_m + 2C_2 \sin 4\varphi_m)\Delta\varphi}{(1 + C_1 \sin^2 \varphi_m + C_2 \sin^2 2\varphi_m)} \quad (28)$$

Nesta equação  $H_m$  é a altitude média da seção de nivelamento considerada;  $\varphi_m$  a latitude média da seção;  $\Delta\varphi$  representa a diferença de latitudes entre os extremos da seção; e  $C_1$  e  $C_2$  são os coeficientes do campo de gravidade normal, respectivamente com valores de 0,0053023655 e -0,0000059 (Pina *et al.* 2006). Esta aproximação considera o potencial da Terra normal, que como já visto, varia apenas com a latitude.

A correção apresentada na equação (28) vincula as altitudes da RAAP a um tipo de referência conhecida como normal-ortométrica. Este tipo de altitude substitui completamente o uso do potencial da Terra real ( $W$ ), pelo uso do esferopotencial ( $U$ ). Dessa forma, os números do geopotencial ( $C$ ) são substituídos pelos números do potencial normal ( $C^N$ ) (Filmer *et al.* 2010). Existem inúmeros tipos de correções normal-ortométrica, podendo-se citar Bomford (1980) além de Amos e Featherstone (2009). Neste trabalho a correção normal-ortométrica será denotada como ( $CNO$ ).

Pode-se verificar a influência do ajustamento simultâneo da RAAP (IBGE, 2011) sobre as altitudes das RRNN se comparados os desníveis obtidos a partir dos memoriais descritivos, nos quais foram aplicados  $CNO$  e ajustados, com os desníveis observados e corrigidos para a altitude normal-ortométrica. Esta análise é apresentada na Figura 6, que mostra a discrepância entre os desníveis determinados pelos dois métodos (memorial descritivo e  $CNO$  sobre dados observados) para cada seção nivelada na área de estudo. A soma dos desníveis ajustados difere em 10,48 cm dos desníveis corrigidos para a altitude normal-ortométrica aplicada à RAAP. A discrepância média obtida para cada seção nivelada é de 1,1 mm e o desvio padrão de 3,1 mm.

Como já apresentado, os desníveis ajustados diferem respectivamente em 13,62 cm e 10,48 cm dos desníveis observados (brutos), e dos desníveis corrigidos pela equação 28. Assim, percebe-se a grande influência do ajustamento na determinação das altitudes das RRNN, à medida que a aplicação da  $CNO$  sobre os dados observados reduz a diferença para os desníveis advindos das altitudes ajustadas em apenas 3,14 cm, na comparação com os dados observados.



Figura 6 – Diferença dos desníveis obtidos após o ajustamento simultâneo da RAAP e desníveis observados corrigidos do não paralelismo das equipotenciais.



### 3.1 Cálculo da Correção Dinâmica

Conforme apresentado na equação (7), aplica-se aos desníveis um termo corretivo dependente da média da gravidade observada entre cada par de vértices que compõem um desnível ( $g_i$ ), e do valor escolhido para a gravidade normal ( $\gamma_0$ ). O valor de  $\gamma_0$  influenciará na magnitude da correção dinâmica, porém isso faz sentido se for entendido que a altitude dinâmica não possui cunho geométrico, tornando importante na aplicação da correção dinâmica, informar o valor da gravidade normal utilizado. No presente trabalho a gravidade normal da latitude de  $29^\circ$  (latitude média da região do experimento), foi utilizada. O cálculo de  $\gamma_0$  é realizado a partir equação (13), empregando parâmetros referenciados ao elipsóide GRS80 (*Geodetic Reference System 1980*).

### 3.2 Cálculo da Correção Ortométrica

A correção da altitude ortométrica aplicada aos desníveis observados depende do conhecimento prévio das altitudes ortométricas nos vértices inicial e final da linha nivelada, sendo possível obter esses valores se for conhecido os números geopotenciais ( $C$ ) nos mesmos vértices. Como estes valores não são disponibilizados para a região de estudo considerou-se o valor de  $C$  para a RN 1776L (início do nivelamento efetuado) como sendo o produto da sua altitude constada no seu memorial do IBGE e de seu valor da gravidade medido em campo. O valor de  $C$  para o vértice final (RN 1766U) foi calculado a partir do valor de  $C$  do ponto inicial conforme a equação (29).

$$C_{1766U} = \sum_{i=1776L}^{i=1766U} g_i \delta n_i \quad (29)$$

Conhecidos os valores de  $C$  para os vértices inicial ( $A$ ) e final ( $B$ ) da linha nivelada, calcula-se os valor de  $H$  nestes vértices a partir da definição da altitude

ortométrica apresentada na equação (8). A determinação de  $\bar{g}$  nas estações inicial e final da linha nivelada foi realizada através da redução de Poincaré-Prey (equação 9), sendo por consequência, a correção da altitude ortométrica de Helmert efetuada no experimento.

### 3.3 Cálculo da Correção Normal

De forma similar à correção ortométrica, as altitudes normais dos pontos inicial e final da linha nivelada foram calculados a partir dos  $C$  dos mesmos, utilizando a equação básica da altitude normal (equação 11). A determinação dos valores de  $\gamma$  e posteriormente os valores de  $\bar{\gamma}$  para as RRNN, são realizadas respectivamente pelas equações (13) e (14). Os parâmetros relativos ao elipsóide GRS80, disponíveis em Moritz (1980) e Hofmann-Wellenhof e Moritz, (2005), foram empregados para a determinação dos valores da gravidade normal. Dessa forma, a correção normal pode ser aplicada aos desníveis observados a partir da equação (12).

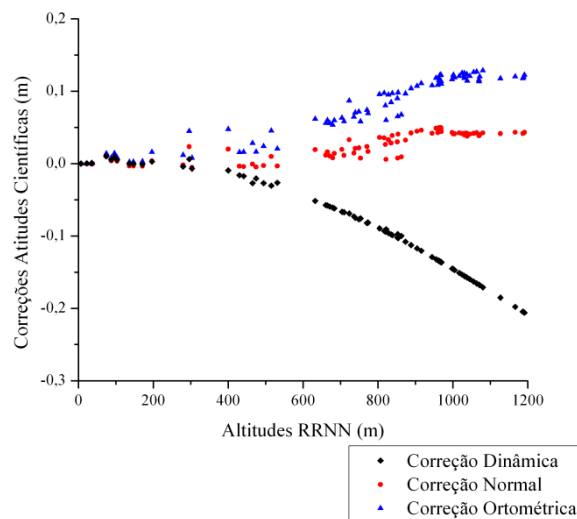
O cálculo de  $\gamma$  para as RRNN depende da latitude das mesmas, assim a precisão planimétrica da rede de nivelamento deve ser considerada. As coordenadas horizontais das RRNN utilizadas no estudo foram consultadas nos seus memoriais descritivos, sendo estas extraídas de cartas topográficas pertencentes ao mapeamento sistemático nas escalas de 1:50.000 e 1:100.000, possuindo precisão planimétrica de 25 e 50 metros respectivamente. Ainda deve-se considerar que estas cartas estão referenciadas ao sistema de referência SAD-69 (*South American Datum* 1969), sendo a transformação para o sistema GRS80 de aproximadamente 60 metros. Assim, o erro em  $\gamma$  devido a transformação de *data* e incerteza nas coordenadas extraídas das cartas para as RRNN utilizadas (~110 metros) é de aproximadamente 0,1 mGal, o que pode levar a um erro de 1 centímetro na determinação das altitudes normais.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados obtidos na correção acumulada dos desníveis observados entre as RRNN 1776L e 1766U para as altitudes dinâmicas, ortométricas e normais são respectivamente de -20,45; 11,79 e 4,19 centímetros. A maior magnitude da correção dinâmica é atribuída ao desenvolvimento da linha com relação à latitude e principalmente ao afastamento do valor da gravidade real medida nas RRNN com relação a  $\gamma_0$ . Destaca-se que neste experimento o cálculo de  $\gamma_0$  usou como referência a latitude média da região da linha nivelada, porém, se utilizada outra latitude mais afastada da área teste como referência para o cálculo de  $\gamma_0$ , a correção dinâmica teria magnitude ainda maior. As correções encontradas para as altitudes ortométrica e normal representam o afastamento das estações com relação às superfícies de referência, geóide e quase-geóide, respectivamente, conforme é desenvolvida a linha nivelada, sendo independente de  $\gamma_0$  utilizado na correção. A Figura 7 apresenta como as

correções das altitudes físicas avaliadas se comportam conforme desenvolve-se o nivelamento entre as estações inicial e final da linha.

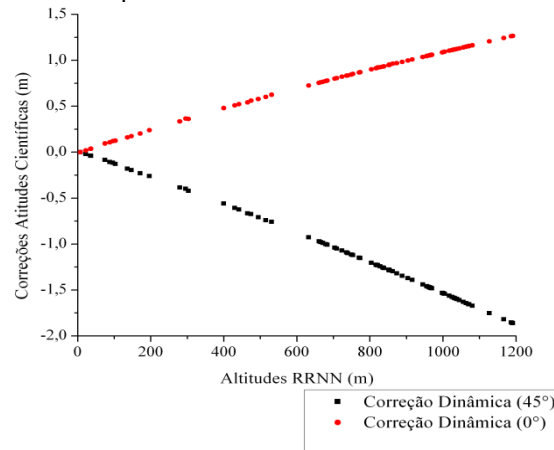
Figura 7 – Correções dinâmica, normal e ortométrica acumuladas ao longo do trajeto analisado.



Observa-se na Figura 7 que a correção dinâmica é praticamente nula na parte inicial da linha nivelada. Isso ocorre, pelo fato do valor de  $g$  medido sobre as RRNN da região inicial da linha ser muito próximo à  $\gamma_o$  calculado, fazendo com que o termo multiplicativo aos desníveis ( $\delta n$ ) na equação (7) seja aproximadamente zero, levando a  $CD \approx 0$  nos primeiros desníveis corrigidos. Conforme o valor de  $g$  nas RRNN começa a se afastar de  $\gamma_o$  a correção dinâmica passa a apresentar uma variação quase linear com relação à elevação do terreno, exceto pela ocorrência das pequenas variações do valor da gravidade na região do nivelamento, gerando diferentes valores de  $g$  para cada estação nivelada.

Dependendo do valor de  $\gamma_o$  adotado a correção dinâmica pode ser diretamente ou inversamente proporcional à altitude. Se a gravidade ( $g$ ) medida nas estações for maior que  $\gamma_o$  a correção dinâmica terá relação proporcional à altitude, aumentando conforme maiores elevações, porém, se  $g$  for menor que  $\gamma_o$  os valores de  $CD$  serão negativos e inversamente correlacionados à elevação. Na Figura 8 estão apresentadas as correções dinâmicas aplicadas à linha utilizada no experimento para  $\gamma_o$  calculado a partir das latitudes de  $0^\circ$  e  $45^\circ$ . Lembra-se que o valor da gravidade aumenta conforme também se aumenta a latitude, assim, para  $\varphi = 0^\circ$  ocorrerá  $g > \gamma_o$  enquanto  $\varphi = 45^\circ$  implicará em  $g < \gamma_o$ .

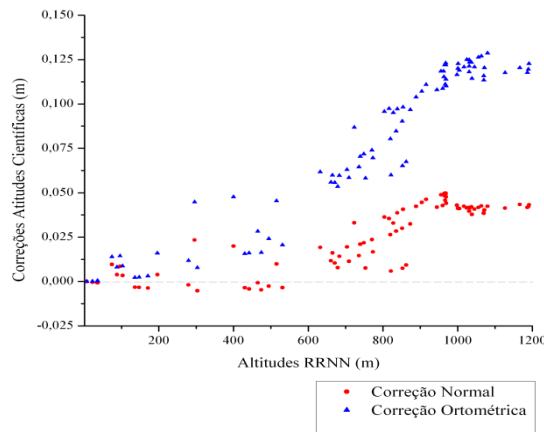
Figura 8 – Correções dinâmicas aplicada aos desníveis utilizando  $\gamma_o$  calculado a partir das latitudes de  $0^\circ$  e  $45^\circ$ .



Constata-se que diferentes valores de  $\gamma_o$  produzem diferentes altitudes dinâmicas para as RRNN da linha, porém, deve-se observar que a diferença de potencial nas estações niveladas pode ser obtida de forma direta neste tipo de altitude, a partir do conhecimento do  $\gamma_o$  utilizado no cálculo da correção dinâmica.

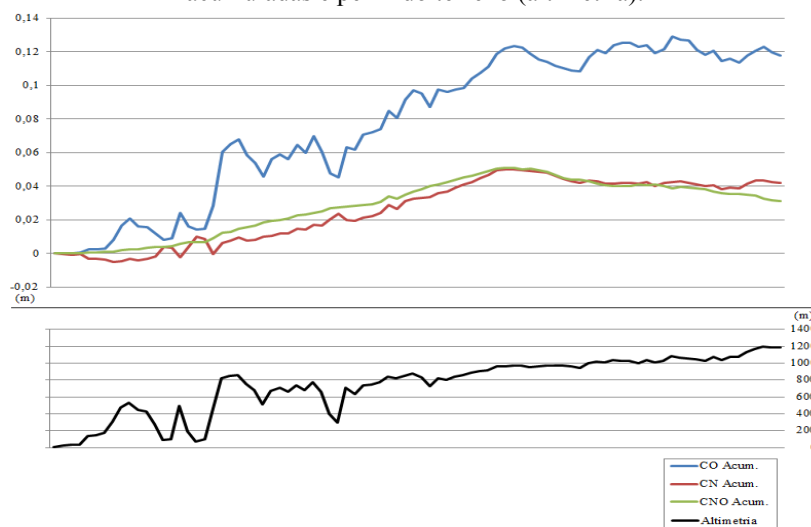
O comportamento das correções acumuladas para as altitudes ortométrica e normal estão detalhados na Figura 9. Conforme previsto para áreas sobre os continentes, a correção ortométrica é sempre maior que a correção normal, indicando que a diferença ( $\zeta - N$ ) é positiva na região teste.

Figura 9 – Detalhe do comportamento das correções normal e ortométrica.



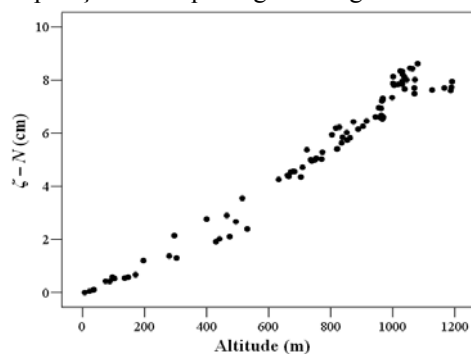
A partir das regiões menos elevadas no início do perfil nivelado, a diferença encontrada no valor das correções ortométrica e normal aumenta gradativamente, conforme a altitude é ampliada, como pode ser verificado nas Figuras 9 e 10.

Figura 10 – Correções ortométrica (*CO*), normal (*CN*), e normal-ortométrica (*CNO*) acumuladas e perfil do terreno (altimetria).



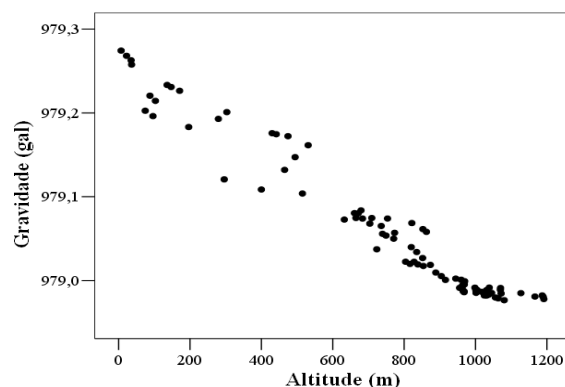
Pode-se visualizar esta relação de forma mais clara na Figura 11, mostrando que a variação da separação entre o quase-geóide e geóide dependerá apenas da altitude da região se a anomalia Bouguer for aproximadamente constante na região de estudo.

Figura 11 – Separação entre quase-geóide e geóide nas RRNN testadas.



A diferença ( $\zeta - N$ ) se estabiliza na área do nivelamento a partir de aproximadamente 1000 metros de altitude, como é observado nas Figuras 9 e 11. Isso pode ser explicado pela variação no valor da gravidade medida sobre as estações na região acima desta elevação, afetando os valores de anomalia Bouguer. A Figura 12 apresenta a relação entre elevação e gravidade ao longo da linha nivelada, sendo o valor de  $g$  sobre as RRNN linearmente correlacionado com a altitude até as estações que se encontram abaixo de aproximadamente 1000 metros. A partir deste ponto a gravidade praticamente se mantém constante, não variando com o aumento da altitude. Verifica-se então na análise realizada, que a separação geóide e quase-geóide é sensível ao valor de  $g$  observado em campo e conseqüentemente ao tratamento dado na determinação de  $\bar{g}$ .

Figura 12 – Variação de  $g$  sobre as RRNN da linha nivelada.



Devido à realização das correções para as altitudes físicas serem efetuadas diretamente sobre os desníveis observados, pode-se avaliar qual o tipo de altitude melhor caracteriza o sistema altimétrico brasileiro na região de estudo, se comparados às correções normal-ortométricas (equação 28), as quais são atualmente aplicadas à RAAP. Observa-se na Figura 10 que de forma geral as altitudes normais estão mais próximas ao sistema altimétrico atual, pois as correções para este tipo de altitude são as que mais se aproximam ao termo corretivo aplicado aos desníveis da RAAP, o qual gera o tipo de altitude normal-ortométrica empregado na rede altimétrica brasileira. Isso pode ser interpretado como se a superfície de referência das altitudes brasileiras estivesse mais próxima ao quase-geóide do que ao geóide.

A interpretação sobre qual tipo de altitude física mais se aproxima ao sistema altimétrico aplicado à RAAP deve ser realizada com cuidado se esta análise não contemplar as correções atualmente utilizadas sobre os desníveis, dado que se afirmou anteriormente que as correções normais são geralmente menores que correções ortométricas sobre os continentes. Tal afirmação pode levar a

interpretação que as altitudes da RAAP sempre estarão mais compatíveis com as altitudes normais. Todavia se valores negativos para a correção normal fossem obtidos, e valores positivos fossem encontrados para a correção ortométrica, sendo a magnitude de  $CO$  menor que a de  $CN$ , as altitudes da RAAP estariam mais próximas das altitudes ortométricas, mas ainda o quase-geóide estaria acima do geóide. Ou seja, se  $|CO| < |CN|$ , porém  $CO > CN$ , as altitudes se ajustariam mais as altitudes ortométricas e a diferença  $(\zeta - N)$  seria positiva.

Para regiões de menores elevações da linha nivelada, as altitudes da RAAP se aproximam tanto das altitudes normais quanto das ortométricas, devido à proximidade de suas superfícies de referência em baixas altitudes. Para maiores elevações percebe-se que as altitudes da RAAP começam a apresentar características mais próximas as altitudes normais.

Baseado nesse contexto é possível analisar quais superfícies de referência podem ser empregadas na determinação das altitudes físicas determinadas através de receptores GNSS (*Global Navigation Satellite System*), de forma que estas estejam compatíveis ao sistema atual de altitudes brasileiras na região avaliada. Fundamentado nas equações (16) e (17) determina-se as altitudes ortométrica e normal através do rastreo GNSS, no qual se obtém a altitude elipsoidal ( $h$ ), associado a modelos geoidais ou quase-geoidais de alta resolução.

A precisão de  $h$  advinda de observações GNSS dependerá de vários fatores como o tempo de rastreo, tipo de receptor utilizado e método de posicionamento empregado. Assim, se aplicado metodologias de maior rigor geodésico pode-se obter altitudes elipsoidais que variam de ordem decimétrica até centimétrica. Uma estimativa da precisão alcançada na componente vertical advinda do rastreo GNSS pode ser encontradas em trabalhos como Ferreira *et al.* (2006) e Flury *et al.* (2009b), os quais utilizaram dados de campanhas GNSS com objetivo de avaliar as referências altimétricas nas suas regiões de estudo com precisões de 5 cm e 1 a 2 cm, respectivamente.

Tomando as precisões de  $h$  obtidas nesses trabalhos realizou-se uma análise indicativa da superfície de referência (geoidal e quase-geoidal) adequada para a determinação das altitudes físicas através do rastreo GNSS, de forma a ser compatível à RAAP na região de estudo. Isso pode ser analisado na Figura 9 onde se verifica a partir de qual altitude média recomenda-se o uso apenas do quase-geóide como referência para determinação das altitudes físicas, considerando as diferentes precisões alcançadas na componente vertical, determinadas no rastreo GNSS.

Nesse trabalho, os experimentos mostram que para levantamentos GNSS de alta precisão ( $\sim 1$  cm) recomenda-se utilizar apenas o quase-geóide como referência na determinação das altitudes que melhor se ajustam a RAAP em regiões acima de 200 m de elevação. Para altitudes elipsoidais com precisão de 5 cm se aconselha o uso apenas do quase-geóide acima de 700 m, sendo este resultado compatível com Ferreira *et al.* (2011) que recomendou a utilização dessa superfície a partir de 800 m de elevação para o Estado do Paraná. Para posicionamentos GNSS com precisões

abaixo de 10 cm na componente vertical não se faz distinção do uso do geóide quanto do quase-geóide como referência na determinação das altitudes físicas compatíveis a RAAP a partir das altitudes elipsoidais, pois a separação ( $\zeta - N$ ) na área de estudo é sempre menor que a referida precisão em  $h$ .

## 5. CONCLUSÕES

Os experimentos realizados na avaliação de uma linha de nivelamento pertencente à rede altimétrica brasileira referem-se à aplicação das correções de altitudes físicas sobre desníveis observados pertencentes linhas da RAAP, visando apresentar e estudar as diferentes altitudes físicas, bem como identificar qual tipo de altitude mais se aproxima da atual rede vertical no Brasil.

Resultados obtidos a partir das correções dinâmicas demonstram que este tipo de altitude não apresenta significado geométrico, à medida que diferentes valores de  $\gamma_o$  conduzem a alteração no valor da altitude dinâmica de um mesmo ponto. Ainda os valores das correções para esse tipo de altitude pode se tornar elevado dependendo do valor de  $\gamma_o$  utilizado e da extensão da área onde está se realizando as correções. Dessa forma, o uso da altitude dinâmica não é recomendada no estabelecimento de uma rede altimétrica com finalidades práticas, salvo casos específicos onde a conhecimento da diferença de potencial da gravidade sobre as estações de nivelamento é necessário.

A partir da análise das correções ortométrica e normal constatou-se que as altitudes vinculadas a RAAP se ajustam melhor a superfície quase-geoidal, revelando a maior proximidade da rede às altitudes normais na área de estudo. Porém, para regiões de baixa elevação a separação ( $\zeta - N$ ) fica abaixo do patamar centimétrico, podendo a altitude ortométrica ser considerada compatível com a RAAP nestas áreas. À medida que as elevações do terreno aumentam a separação das superfícies geoidal e quase-geoidal cresce, devido à contribuição das massas topográficas. Dessa forma, em aplicações práticas como a determinação de altitudes físicas compatíveis à RAAP a partir de rastreamento GNSS, a recomendação do uso do geóide ou quase-geóide como superfícies de referência estará sujeita a precisão atingida na componente vertical advindas do posicionamento GNSS, apesar da análise mostrar a maior aderência do sistema altimétrico atual às altitudes normais.

A adoção de um sistema altimétrico baseado em números geopotenciais para o Brasil bem como para os demais países sul-americanos, estendendo a questão à rede vertical SIRGAS (Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas), é essencial na busca de um sistema altimétrico consistente não apenas em termos locais, mas também nos âmbitos regional, nacional e principalmente continental. Assim a análise das correções para as altitudes físicas aplicadas aos desníveis da RAAP se torna importante na verificação da consistência destas correções sobre linhas niveladas, mesmo que estas estejam referenciadas a uma superfície equipotencial que não a origem  $W_O$  do sistema altimétrico brasileiro.

A possibilidade do uso do GNSS na determinação de altitudes compatíveis a rede altimétrica no Brasil requer a adoção de modelos geoidais ou quase-geoidais,



os quais forneçam respectivamente, altura geoidal ( $N$ ) e anomalia de altitude ( $\zeta$ ) com precisão de poucos centímetros, porém conceitos de altitude ortométrica ou normal devem ser aplicados as RRNN da RAAP, de forma a definir um padrão único para as altitudes.

Estudos considerando efeitos como a correção topográfica e a variação lateral de densidades das massas ainda devem ser realizados, possibilitando a determinação da altitude ortométrica e da separação ( $\zeta - N$ ) de maneira mais realista. Assim, abre-se a perspectiva de uma modelagem apropriada para a transformação entre altitudes ortométricas e normais, auxiliando na integração de dados altimétricos em países que utilizam diferentes tipos de altitudes.

O tema abordado neste trabalho representa uma das principais questões analisadas dentro da Geodésia não apenas no Brasil como de forma global atualmente. A problemática envolvida na definição e realização de sistemas altimétricos baseados em números geopotenciais ainda demandará muitos esforços para que possam ser aplicados na prática no contexto brasileiro e sul-americano. Dessa forma, a partir dos resultados obtidos neste artigo, pretende-se dar continuidade ao estudo realizado, auxiliando na discussão de alternativas para um futuro sistema altimétrico no país.

#### AGRADECIMENTOS:

Os autores agradecem ao IBGE pelo fornecimento dos dados de nivelamento da RAAP, e ao CNPq pelo apoio ao projeto mais amplo de Estudo do Geopotencial e suas implicações na determinação do Geóide e nas Altitudes Científicas (Projeto 472983/2011-3).

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMOS, M. J.; FEATHERSTONE, W. E.; BLICK, G.H. *Progress towards implementation and development of a New Zealand national vertical datum*. In: Sansò, F. (ed.) *A Window on the Future of Geodesy*, Springer, Berlin Heidelberg New York, pp. 338-343, 2005.
- AMOS, M. J.; FEATHERSTONE, W. E. *Unification of New Zealand's local vertical datums: iterative gravimetric quasigeoid computations*. *J Geodesy* 83(1):57–68, 2009.
- BLITZKOW, D.; CAMPOS, I. O.; FREITAS, S. R. C. *Altitude: O que interessa e como equacionar*. Anais do I Simpósio de Ciências Geodésicas e Tecnologia da Geoinformação, Recife, 2004.
- BOMFORD, G. *Geodesy*, 4th edn. Oxford University Press, Oxford, 1980.
- BURŠA, M.; KENYON, S.; KOUBA, J.; RADĚJ, K.; VATRT, V.; VOJTŠKOVÁ, M.; ŠIMEK, J. *World Height System Specified by Geopotential at Tide Gauge Stations*. Proceedings of IAG Symposium, Vertical Reference System, Cartagena, Columbia, pp.291-296, Springer Verlag, Berlin, 2002.
- CHRISTIE, R. R. *A new national heighting strategy for Great Britain*. *Survey Review*, vol. 32, no. 252, pp. 328-343, 1994.

- DREWES, H.; SÁNCHEZ, L.; BLITZKOW, D.; FREITAS, S. R. *Scientific Foundations of the SIRGAS Vertical Reference System*. In: Vertical Reference System - VeReS, Springer, Berlin, pp. 197-301, 2002.
- FEATHERSTONE, W. E.; KUHN, M. *Height systems and vertical datums: a review in the Australian context*. Journal of Spatial Science 51 (1): pp. 21-42, 2006.
- FERREIRA, V. F.; FREITAS, S.R.C.; HECK, B. *A separação entre o geoide e o quase geoide: uma análise no contexto Brasileiro*. Revista Brasileira de Cartografia, No. 63 Edição Especial 40 Anos, pp. 39-50, 2011.
- FILMER, M. S.; FEATHERSTONE W. E.; KUHN M. *The effect of EGM2008-based normal, normal-orthometric and Helmert orthometric height systems on the Australian levelling network*. Journal of Geodesy, v. 84, no. 8, pp. 501-513, 2010.
- FLURY, J.; RUMMEL, R. *On the geoid-quasigeoid separation in mountain areas*. Journal of Geodesy, v. 83, no. 9, pp. 829-847, 2009a.
- FLURY, J.; GERLACH, C.; HIRT, C.; SCHIRMER, U. *Heights in the Bavarian Alps: Mutual validation of GPS, levelling, gravimetric and astrogeodetic quasigeoids*. Geodetic Reference Frames, International Association of Geodesy Symposia 134, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009b.
- FREITAS, S.R.C.; BLITZKOW, D. *Altitudes e Geopotencial*. IgeS Bulletin, Milan, Special Issue for South America, 9: 47-62, 1999.
- HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. *Physical geodesy*. San Francisco and London: W. H. Freeman and Company, 364 p., 1967.
- HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. *Physical Geodesy*. SpringerWien-New York. 403 p., 2005.
- HWANG, C.; HSIAO, Y.-S. *Orthometric corrections from levelling, gravity, density and elevation data: a case study in Taiwan*. Journal of Geodesy, v. 77, no. 5-6, pp. 279-291, 2003.
- IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Ajustamento Simultâneo da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro – Relatório*. Rio de Janeiro, 62p. Disponível em: <<ftp://geoftp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/RelatorioAjustamento.pdf>>, 2011.
- IHDE, J. *Realization of a Global Vertical Reference System 2007*. In: Proceedings of the 1st IGFS Symposium Gravity Field of the Earth, Istanbul, Harita Dergisi, Special Issue 18, 2007.
- JEKELI, C. *Heights, the geopotential and vertical datums*. Report No. 459. The Ohio State University, Columbus, 2000.
- KINGDON, R.; VANÍČEK, P.; SANTOS, M.; ELLMANN, A.; TENZER, R. *Toward an improved orthometric height system for Canada*. Geomatica, vol. 59 (impresso), 2005.
- KOUBA J. *Possible specification of a local or regional vertical datum*. Geodäsie und Geoinformatik der Universität Hannover, no. 256, pp. 101-106, 2006.

- LUZ, R. T. *Possibilidades de Integração de dados Gravimétricos à Rede Altimétrica do SGB para Cálculo de Altitudes SIRGAS no Brasil*. Série em Ciências Geodésicas, vol. 4, pp. 42, 2004.
- MARTI, U. *Comparison of high precision geoid models in Switzerland*. In: Tregonig P, Rizos C (eds) *Dynamic planet*. Springer, Berlin, 2005.
- MEYER, T.H.; ROMAN, D.R.; ZILKOSKI, D.B. *What does height really mean? Part III: Height System*. Surveying and Land Information Science, vol. 66, no. 2, pp. 149-160, 2006.
- MOLODENSKY, M.; YEREMEYEV, V.; YURKINA, M. *Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth*. Israeli Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1962.
- MORITZ, H. *Geodetic reference system 1980*. Bull Géodésique, v. 54, no. 3, pp. 395-405, 1980.
- PALMEIRO, A. S.; FREITAS, S. R. C. de. *Integração de informações do SGB em um SIG, visando a realização do sistema vertical do SIRGAS*. Boletim de Ciências Geodésicas, sec. Artigos, Curitiba, v. 16, no 3, p.365-385, 2010.
- PINA, W. H.; PINHEIRO, R. R.; SANTOS, C. C. C.; DI MAIO PEREIRA, N. R.; GOLDANI, D. *Reajustamento Global da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Brasil – RAAP*. IV Conferência Nacional de Geociências, Rio de Janeiro, 2006.
- SJÖBERG, L. E. *A refined conversion from normal height to orthometric height*. Stud. Geophys. Geod., v. 50, no. 4, pp. 595-606, 2006.
- TENZER, R.; VANÍČEK, P.; SANTOS, M.; FEATHERSTONE, W. E.; KUHN, M. *Rigorous determination of the orthometric height*. Journal of Geodesy, v. 79, no. 1-3, pp. 82-92, 2005.
- TORGE, W. *Geodesy, third edition*. Walter de Gruyter, Berlin New York, pp. 206-210 e 416, 2001.
- VÉRONNEAU, M.; HÉROUX, P. *Canadian height reference system modernization: rational, status and plans*. GeoCongre, 2007.

(Recebido em abril de 2013. Aceito em julho de 2013).