



Production

ISSN: 0103-6513

production@editoracubo.com.br

Associação Brasileira de Engenharia de

Produção

Brasil

Alem, Douglas; Morabito, Reinaldo  
Modelos de programação estocástica no planejamento da produção de empresas  
moveleiras  
Production, vol. 25, núm. 3, julio-septiembre, 2015, pp. 657-677  
Associação Brasileira de Engenharia de Produção  
São Paulo, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=396742062014>

- ▶ Como citar este artigo
- ▶ Número completo
- ▶ Mais artigos
- ▶ Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe , Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

# Modelos de programação estocástica no planejamento da produção de empresas moveleiras

Douglas Alem<sup>a\*</sup>, Reinaldo Morabito<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, SP, Brasil, dougepai@yahoo.com.br

<sup>b</sup>Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil.

## Resumo

Esse trabalho aborda um problema de planejamento da produção típico de empresas moveleiras de pequeno porte, em que as demandas e os tempos de preparação dos estágios gargalos são variáveis aleatórias que podem ser aproximadas por um conjunto discreto e finito de cenários ponderados pelas correspondentes probabilidades de ocorrência. O problema com múltiplos cenários é modelado via programação estocástica de dois estágios com recurso. Para controlar a variabilidade dos custos de segundo estágio é proposto um modelo de recurso restrito que gera, progressivamente, um conjunto de soluções menos sensíveis às variações dos cenários, conforme a variabilidade é restringida a uma tolerância dada. Experiências numéricas indicam que, em muitas situações, não é muito dispendioso assegurar soluções aversas ao risco com bons níveis de serviço.

## Palavras-chave:

Planejamento da produção. Indústria moveleira. Programação estocástica. Aversão ao risco. Recurso restrito.

## 1. Introdução

O planejamento da produção de muitas empresas é realizado exclusivamente com dados supostamente conhecidos e determinísticos. Entretanto, na realidade, muitas informações futuras e dados importantes para o planejamento da produção estão sujeitos às incertezas por várias razões, dentre as quais se destacam (Ben-Tal & Nemirovski, 2000; Beyer & Sendhoff, 2007):

- Alguns dados (demandas futuras, custos, retornos etc.) podem não existir no momento em que os problemas são resolvidos, fazendo com que seja necessário utilizar métodos de previsão, que estão sujeitos a erros.
- Alguns dados não podem ser medidos exatamente, como parâmetros físicos e técnicos que são conhecidos apenas dentro de um intervalo de confiança ou dado certo grau de acurácia, como tempos de processamento e de preparação de equipamentos.

Em empresas moveleiras típicas do setor, a realidade não é diferente. O gerente de produção utiliza informações sobre as carteiras de pedidos dos clientes, quantidade de produtos estocados e sua experiência

para decidir o tamanho dos lotes de produção semanal. Caso ocorra a chegada de novos pedidos ou algum imprevisto (quebra de algum equipamento, ausência de funcionários etc.), a decisão é reavaliada num espaço de tempo menor. Em geral, a quantidade de produtos a serem produzidos  $X_i$  é obtida pela equação  $X_i = l_i - D_i$ , em que  $l_i$  é a quantidade de produto  $i$  atualmente em estoque e  $D_i$  é a sua demanda. Embora  $l_i$  possa ser facilmente determinado (uma simples verificação no estoque, por exemplo), a quantidade  $D_i$  é baseada numa expectativa de venda que nem sempre ocorre. Como é comum que empresas típicas de pequeno porte não possuam um histórico organizado dos pedidos dos clientes e nem das ordens de produção efetivadas, utilizar métodos de previsão baseados em séries históricas para estimar as demandas futuras, em geral, não é possível na prática, o que compromete a acurácia da expectativa de venda.

Determinada a quantidade de produtos a serem produzidos pelo planejamento da produção, é necessário verificar se há capacidade disponível para a produção dos lotes, levando-se em consideração

tempos de produção e de preparação de máquinas e equipamentos. Comumente, tempos de produção são relativamente fixos e conhecidos, pois a maior carga de trabalho recai sobre máquinas automáticas. Entretanto, operações de preparação de máquinas são, muitas vezes, manuais e, portanto, dependentes da habilidade e da experiência do funcionário, motivo pelo qual os tempos de tais operações são difíceis de serem estimados na prática. Tipicamente, o planejamento da produção leva em consideração tempos médios ou situações de pior caso que podem gerar planos conservadores e pouco eficazes. Por um lado, utilizar somente valores médios e ignorar a variação do tempo de muitas atividades pode superestimar a capacidade de máquinas e de funcionários – acarretando atrasos na linha de produção ou mesmo gerando planos infactíveis na prática. Por outro lado, adotar planos baseados em situações pessimistas ou de pior caso pode subestimar a capacidade de produção, ocasionando uma contratação desnecessária de turnos e/ou funcionários extras.

Particularmente no contexto do planejamento da produção de empresas moveleiras, as incertezas inerentes do processo – principalmente demandas e tempos de preparação – costumam ser “desprezadas”, seja pela adoção de uma expectativa de venda sem ou com pouca acurácia, seja pela estimativa equivocada dos tempos de preparação. Analisando essas questões, o presente trabalho propõe estudar problemas de planejamento da produção típicos de empresas moveleiras de pequeno porte inseridas num ambiente incerto, considerando ainda a possibilidade de controlar a variabilidade do custo total esperado via incorporação de uma medida de risco adequada. Do ponto de vista teórico, uma contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de modelos de programação estocástica e aversão ao risco para problemas de planejamento da produção em empresas moveleiras, que podem ser estendidos para outros contextos industriais. Do ponto de vista prático, uma contribuição deste estudo é discutir vários resultados que podem auxiliar o tomador de decisões a lidar com as incertezas no seu dia a dia, tornando as suas estratégias de produção mais competitivas no mercado. Alguns estudos anteriores que abordaram aspectos do planejamento da produção na indústria de móveis são, por exemplo, os de Foronda & Carino (1991), Carnieri et al. (1994), Morabito & Arenales (2000), Gramani & França (2006), Rangel & Figueiredo (2008), Santos et al. (2011) e Alem & Morabito (2013b). A maior parte desses estudos teve enfoque determinístico e foco nas operações de corte de placas e suas integrações no planejamento da produção em empresas moveleiras. Em particular, Alem & Morabito (2013b) estudaram um problema

combinado de planejamento da produção e corte de estoque com custos de produção e demandas de produtos incertos. Porém a técnica de otimização robusta utilizada considera os parâmetros incertos como variáveis aleatórias num suporte estabelecido a priori e otimiza-se o problema numa perspectiva de pior caso intervalar, o que é diferente da abordagem por programação estocástica de dois estágios com recurso aqui utilizada. Além disso, o modelo de planejamento da produção proposto em Alem & Morabito (2013b) e em outros estudos anteriores é diferente do modelo aqui empregado, porque considera que o processo de corte de placas é o gargalo de produção, que os tempos e custos de preparação dos equipamentos de corte e furação podem ser desprezados e que a linha de montagem é limitante. Um dos primeiros trabalhos que se preocupou com questões de robustez em problemas de programação estocástica foi apresentado por Mulvey et al. (1995). Nesse artigo, os autores propõem uma metodologia baseada em programação estocástica (abordagem por cenários) e programação por metas, que foi designada pelos autores *otimização robusta*. A motivação inicial dessa metodologia era desenvolver modelos de programação matemática cujas soluções permanecessem “próximas” da solução ótima e “quase” factíveis para quaisquer realizações das variáveis aleatórias. Soluções desses tipos seriam consideradas *robustas* em relação à otimalidade e à factibilidade. Posteriormente, Vladimiro & Zenios (1997) propuseram uma metodologia semelhante para incorporar condições de robustez diretamente pela satisfação das restrições em problemas de programação estocástica; tal metodologia ficou conhecida por recurso restrito ou restrições de recurso. A principal diferença entre a metodologia de Mulvey et al. (1995) e Vladimiro & Zenios (1997) é que o modelo do primeiro trabalho emprega a noção de otimização multiobjetivo para otimizar (indiretamente) o conflitante critério de robustez e custo, enquanto o modelo com recurso restrito do segundo trabalho adota uma medida de risco para reduzir a variabilidade das decisões de segundo estágio. Ainda, ambos os modelos podem ser provados matematicamente equivalentes (Ahmed & Sahinidis, 1998).

Embora alguns autores ainda utilizem o termo otimização robusta ou *programação estocástica robusta* para designar tal metodologia, mais recentemente há uma tendência de se usar o termo *programação com aversão ao risco (risk-averse programming)*, para aludir à adoção de medidas de controle de robustez (ou medidas de risco) em modelos de programação estocástica (Schultz & Tiedemann, 2006; Gollmer et al., 2008; Kuhn & Schultz, 2009; Alonso-Ayuso et al., 2014; Pousinho et al., 2011, 2012; Guigues & Sagastizábal, 2012; entre outros).

É importante elaborar medidas de risco apropriadas para reduzir a variabilidade e ainda manter a tratabilidade computacional do modelo matemático. Basicamente, uma medida de risco pode ser vista como uma função que penaliza a variabilidade entre as decisões de segundo estágio, considerando múltiplos cenários distintos. Por exemplo, há vários trabalhos que utilizam o modelo clássico de média-variancia de Markowitz (1959) para balancear expectância e variancia (Mulvey et al., 1995; Yu & Li, 2000; Leung & Wu, 2004; Leung et al., 2007; Khor et al., 2008), mas o modelo de otimização resultante com função objetivo do tipo média-variancia é um problema de programação quadrática não linear convexo, que pode ainda conter variáveis de decisão inteiras ou binárias, o que resultaria num problema computacionalmente intratável, dependendo das dimensões dos dados de entrada. Para evitar formulações não lineares, Konno & Yamazaki (1991) propuseram uma medida de risco alternativa à média-variancia de Markowitz, que se popularizou em finanças como MAD (desvio médio-absoluto). Outra opção de linearização foi apresentada no trabalho de Yu & Li (2000). O leitor interessado em mais detalhes sobre medidas de risco pode consultar, por exemplo, Schultz & Tiedemann (2006), Gollmer et al. (2008), Kuhn & Schultz (2009), Alonso-Ayuso et al. (2014), Alem (2011) e Alem & Morabito (2013a).

Modelos de programação estocástica com aversão ao risco têm sido largamente utilizados desde o trabalho pioneiro de Mulvey et al. (1995), com aplicações em expansão de capacidade (Laguna, 1998), planejamento agregado (Leung & Wu, 2004; Aghezzaf et al., 2010), *revenue management* (Lai & Ng, 2005; Lai et al., 2007), planejamento da produção em múltiplas plantas (Leung et al., 2007), programação de frota de ônibus (Yan & Tang, 2009), produção de toras de madeira (Zanjani et al., 2009), cadeia de suprimentos num contexto de manufatura ágil (Pan & Nagi, 2010), fornecimento de gás natural (Aouam et al., 2010), processamento de sinal (Ukkusuri et al., 2010), planejamento e programação da produção e processos em indústrias químicas e refinarias de petróleo (Suh & Lee, 2001; Jia & Ierapetritou, 2004; Khor et al., 2008; Li & Ierapetritou, 2008), dentre outras aplicações.

O restante deste artigo está organizado da seguinte maneira: a seção 2 descreve brevemente o processo de produção de empresas moveleiras de pequeno porte. A seção 3 desenvolve dois modelos baseados em programação estocástica para o problema de planejamento da produção sob incertezas: o primeiro é um programa dito neutro ao risco, enquanto o segundo incorporar uma medida de robustez. A seção 4 discute os resultados numéricos e, finalmente, a

seção 5 apresenta as considerações finais e algumas direções para trabalhos futuros.

## 2. Processo de produção de empresas moveleiras de pequeno porte

O processo de produção de uma empresa moveleira de pequeno porte é composto, basicamente, pelos estágios descritos a seguir.

*Setor de corte primário:* Esse setor, em geral, é composto por poucos funcionários que operam uma máquina seccionadora, na qual placas de algum tipo de material (madeira, MDF, MDP etc.) são cortadas nas peças que irão compor o móvel. As máquinas seccionadoras mais sofisticadas podem cortar uma quantidade de placas bem maior por unidade de tempo, além de produzirem também cortes mais trabalhados.

*Setor de corte secundário:* É composto por um conjunto de serras menores, que são utilizadas para o processo de aparo das sobras, corte de peças que foram processadas de forma agrupada e ainda são usadas para cortar peças menores. Nesse setor também são feitos os vincos nas peças que são encaixadas em outras na montagem de um determinado móvel. Esse setor pode também ser usado para processar pedidos inesperados ao longo do horizonte de planejamento, de forma a não comprometer a produção da máquina seccionadora principal, por exemplo.

*Setor de furação:* Esse setor é composto por furadeiras (manuais e automáticas), sendo que a maior carga de serviço é realizada pelas máquinas automáticas. Nesse setor são feitos os furos nas peças para a posterior montagem do móvel. A maior parte das furadeiras utilizadas pode ser operada por apenas uma pessoa e tem capacidade para furar peças com um tamanho limite de espessura e largura. Além disso, são comuns furadeiras que só podem furar uma peça por vez.

*Setor de montagem:* Esse setor é formado por diversas máquinas, como lixadora e prensa. Nele, as peças são montadas e preparadas para a pintura. É o setor que agrega o maior número de funcionários.

*Setor de pintura:* É formado por um conjunto de máquinas que operam interligadas. O conjunto é operado por um número relativamente baixo de funcionários, em geral. O papel deles no processo de produção é preparar o conjunto, efetuando a limpeza das máquinas, a carga das tintas e o monitoramento do processo de pintura das peças do móvel.

Na indústria de móveis, a maneira específica de se cortar as placas é denominada *padrão de corte bidimensional*, pois existem duas dimensões (comprimento e largura) relevantes para o processo

de corte. Na literatura, o planejamento do corte de algum tipo de matéria-prima visando otimizar os efeitos desse processo (como minimizar a perda advinda do corte de placas de madeira) é conhecido como *problema de corte de estoque*. Há vários fatores que concorrem na elaboração de um padrão de corte, como a facilidade de processamento do padrão e a tecnologia da empresa. Em empresas moveleiras é comum a utilização de padrões de corte guilhotinados, i.e., padrões produzidos por cortes paralelos a um dos lados da matéria-prima retangular que a divide em dois novos retângulos (Morabito & Arenales, 2000; Rangel & Figueiredo, 2008; Santos et al., 2011).

Neste trabalho, apenas os processos de corte e furação são considerados no desenvolvimento do modelo de planejamento da produção da empresa moveleira, uma vez que tais processos comumente se alternam como gargalos do sistema produtivo em questão, principalmente porque os tempos de preparação associados a essas atividades são relevantes. No estágio de corte, por exemplo, o ajuste inicial das placas que serão cortadas na seccionadora, a rotação das placas para serem cortadas segundo cortes guilhotinados e a troca das serras desgastadas são exemplos de operações executadas manualmente pelos funcionários. No estágio de furação, é necessário instalarem-se diferentes brocas para furar peças com espessuras distintas e verificar a profundidade dos furos para evitar o rompimento das peças, tarefas que também são realizadas manualmente pelos funcionários da empresa. Como todas essas atividades dependem da habilidade e da experiência do funcionário, os tempos totais de preparação são elevados, daí a importância de contabilizá-los no modelo de planejamento.

### 3. Planejamento da produção em empresas moveleiras via programação estocástica

#### 3.1. Modelo de dois estágios com recurso

Neste trabalho, os tempos de preparação e as demandas são considerados como variáveis aleatórias com realizações discretas segundo distribuições de probabilidades conhecidas em  $(\Omega, \mathcal{F}, \Pi)$ , em que  $\Omega = \{1, 2, \dots, s-1, s, \dots, S\}$  é o conjunto de possíveis estados da natureza ou cenários equipado com uma  $\sigma$ -álgebra de eventos  $\mathcal{F}$  e com uma medida de probabilidade  $\Pi$  (Shapiro et al., 2009). Definidas as variáveis aleatórias, é importante decidir sobre os estágios do modelo de programação estocástica. De acordo com o paradigma dos modelos de dois

estágios, as decisões são executadas antes e depois da realização das variáveis aleatórias. Assim, definem-se as decisões anteriores à realização das variáveis aleatórias como *here-and-now*, em contrapartida às decisões feitas após o conhecimento das variáveis aleatórias, designadas por *wait-and-see*.

Para o problema proposto neste trabalho, é razoável que os níveis de produção de cada produto em cada período do horizonte de planejamento ( $X_{it}$ ) sejam decididos antes da realização das variáveis aleatórias. Consequentemente, a frequência de utilização de cada padrão de corte em cada período ( $Y_{jt}$ ) e a programação das preparações de cada padrão em cada período ( $Z_{jt}$ ) também devem ser determinadas antes das variáveis aleatórias tornarem-se conhecidas. Então, tem-se que as variáveis  $X_{it}$ ,  $Y_{jt}$  e  $Z_{jt}$  (ver definições adiante) são as decisões de primeiro estágio do problema. Após o conhecimento das variáveis aleatórias é possível adaptar-se a solução obtida pelas ações de segundo estágio de estocar ( $I_{it}^+$ ) ou atrasar ( $I_{it}^-$ ) a produção de cada produto em cada período e utilizar horas extras em cada período ( $O_t$ ), adotando as variáveis  $I_{it}^+$ ,  $I_{it}^-$  e  $O_t$  (ver definições adiante) como decisões de segundo estágio.

Sejam os conjuntos de produtos, padrões de corte, peças e períodos indexados por  $i$ ,  $j$ ,  $p$  e  $t$ , respectivamente. A menos que se afirme o contrário, admite-se que o índice  $i$  é válido para todo o conjunto I, o índice  $j$  é válido para todo o conjunto J, e assim por diante para  $p$  e  $t$ . Seja também o conjunto de possíveis cenários indexado por  $s \in \Omega$ . Supõe-se que “produto  $i$ ” quer dizer “produto do tipo  $i$ ”, como um armário de três portas. De forma similar, “padrão de corte  $j$ ” refere-se a “padrão de corte do tipo  $j$ ”, como um padrão que utiliza uma placa de 20 mm de espessura e tamanho 2,75 × 1,83 m, para produzir determinado conjunto de peças. Da mesma forma, “peça  $p$ ” significa “peça do tipo  $p$ ”, como uma base de criado de 600 mm de largura por 437 mm de altura. Considere-se também a seguinte notação para os parâmetros e variáveis de decisão do modelo:

#### 3.1.1. Parâmetros determinísticos

- $c_{it}$  - Custo de produzir uma unidade do produto  $i$  no período  $t$ .
- $h_{it}^+$  - Custo de estocar uma unidade do produto  $i$  no período  $t$ .
- $h_{it}^-$  - Custo de falta/atraزو de uma unidade do produto  $i$  no período  $t$ .
- $c_{0t}$  - Custo de horas extras no período  $t$ .
- $w_{jt}$  - Custo da placa usada no padrão de corte  $j$  no período  $t$ .
- $a_{pj}$  - Quantidade de peças  $p$  no padrão de corte  $j$ .

- $r_{pi}$  - Quantidade de peças  $p$  necessárias para compor uma unidade do produto  $i$ .
- $v_j^l$  - Tempo de preparação da máquina seccionadora para produzir o padrão de corte  $j$  no período  $t$ .
- $\delta_{pj}$  - Função indicadora igual a 1, se  $a_{pj} > 0$ , e igual a 0, caso contrário.
- $v_p^l$  - Tempo de preparação da furadeira para furar a peça  $p$  no período  $t$ .
- $C_t$  - Capacidade regular (em unidades de tempo) de ambos os estágios de produção (corte e furação) no período  $t$ .
- $C_t^E$  - Capacidade extra (em unidades de tempo) de ambos os estágios de produção no período  $t$ .
- $I_{it}^{\max}$  - Nível máximo permitido de estoque do produto  $i$  no período  $t$ .
- $M$  - Número suficientemente grande.

### 3.1.2. Parâmetros estocásticos

- $\pi_s$  - Probabilidade de ocorrência do cenário  $s$  (definido em  $\Pi$ ).
- $d_{its}$  - Demanda do produto  $i$  no período  $t$  no cenário  $s$ .
- $\phi_{js}^l$  - Tempo de preparação da máquina seccionadora para cortar o padrão de corte  $j$  no cenário  $s$ .
- $\phi_{ps}^l$  - Tempo de preparação da furadeira para furar a peça  $p$  no cenário  $s$ .

### 3.1.3. Variáveis de decisão de primeiro estágio

- $X_{it}$  - Quantidade do produto  $i$  produzida no período  $t$ .
- $Y_{jt}$  - Frequência com que o padrão de corte  $j$  é utilizado no período  $t$  (i.e., número de placas cortadas no padrão  $j$  no período  $t$ ).
- $Z_{jt}$  - Variável binária igual a 1, se a máquina seccionadora está preparada para produzir o padrão de corte  $j$  no período  $t$ , e igual a 0, caso contrário.

### 3.1.4. Variáveis de decisão de segundo estágio

- $I_{its}^+$  - Quantidade do produto  $i$  estocada ao final do período  $t$  no cenário  $s$ .
- $I_{its}^-$  - Quantidade do produto  $i$  em atraso ao final do período  $t$  no cenário  $s$ .
- $O_{ts}$  - Quantidade de horas extras utilizadas no período  $t$  no cenário  $s$ .

O problema de planejamento da produção em empresas moveleiras sob incertezas pode ser formulado como um problema de otimização inteira mista em dois estágios. O objetivo do problema do primeiro estágio (1) é minimizar a soma dos custos de produção

e aquisição de matéria-prima do primeiro estágio e os custos esperados do problema do segundo estágio levando-se em conta todos os cenários  $s \in \Omega$ , sujeito às restrições referentes às variáveis de primeiro estágio (2) a (4):

$$\text{Min } \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} c_{it} \cdot X_{it} + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} w_{jt} \cdot Y_{jt} + Q(X, Y, Z, \xi) \quad (1)$$

$$\text{S.t.: } \sum_{j \in J} a_{pj} \cdot Y_{jt} \geq \sum_{i \in I} r_{pi} \cdot X_{it}, \quad i \in I, t \in T \quad (2)$$

$$Y_{jt} \leq M \cdot Z_{jt}, \quad j \in J, t \in T \quad (3)$$

$$Y_{jt} \geq 0; \quad Z_{jt} \in \{0, 1\}, \quad j \in J, \quad t \in T. \quad (4)$$

em que  $\xi = [\xi_s]$ ,  $\xi_s = \{d_{its}, \phi_{js}^l, \phi_{ps}^l\}$  é o vetor aleatório associado ao cenário  $s \in \Omega$  e  $Q(X, Y, Z, \xi)$  é o valor ótimo do seguinte problema de segundo estágio:

$$\begin{aligned} Q(X, Y, Z, \xi) = \text{Min } & \sum_{s \in \Omega} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \pi_s \cdot [h_{it}^+ I_{its}^+ + h_{it}^- I_{its}^-] \\ & + \sum_{s \in \Omega} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \pi_s \cdot co_i \cdot O_{ts} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{S.t.: } & X_{it} + I_{i(t-1)s}^+ - I_{its}^+ + I_{its}^- - I_{i(t-1)s}^- = d_{its}, \\ & i \in I, t \in T, s \in \Omega \end{aligned} \quad (6)$$

$$I_{its}^+ \leq I_{it}^{\max}, \quad i \in I, t \in T, s \in \Omega \quad (7)$$

$$\sum_{j \in J} (v_j^l \cdot Y_{jt} + \phi_{js}^l \cdot Z_{jt}) \leq C_t + O_{ts}, \quad t \in T, s \in \Omega \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P} \sum_{j \in J} (v_p^l \cdot a_{pj} \cdot Y_{jt} + \phi_{ps}^l \cdot \delta_{pj} \cdot Z_{jt}) \leq C_t + O_{ts}, \\ t \in T, s \in \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

$$O_{ts} \leq C_t^E, \quad t \in T, s \in \Omega \quad (10)$$

$$O_{ts} \geq 0, \quad t \in T, s \in \Omega; \quad I_{its}^+, I_{its}^- \geq 0, \quad i \in I, t \in T, s \in \Omega \quad (11)$$

As restrições (2) asseguram que a demanda interna de todos os tipos de peças seja satisfeita. Essas restrições integram os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque, uma vez que relacionam as variáveis  $X_{it}$ , que definem o tamanho dos lotes do produto  $i$  no período  $t$ , e as variáveis  $Y_{jt}$ , que definem a quantidade de placas cortadas, segundo o padrão de corte  $j$  no período  $t$ . As restrições (3) garantem que só pode haver produção do padrão de corte  $j$  no período  $t$  se a máquina seccionadora estiver preparada para cortá-lo. As restrições (4) referem-se ao domínio das variáveis de decisão de primeiro estágio. A função objetivo de segundo estágio (5) visa minimizar a soma dos custos esperados de estoque, atraso e horas extras, levando em conta todos os cenários

$s \in \Omega$ . Note que o custo aleatório de segundo estágio  $Q(X, Y, Z, \xi)$  assume um dado nível de produção ( $X$ ), configuração de padrão de corte ( $Y$ ) e preparação de máquinas ( $Z$ ). As restrições (6) fazem o balanceamento da produção de móveis para cada realização  $s$ . Sem perda de generalidade, admite-se que os estoques e atrasos iniciais (i.e., em  $t = 0$ ) são nulos. Os estoques são limitados superiormente, devido a restrições de espaço físico para o armazenamento dos produtos finais, como indicado em (7).

As restrições de capacidade (8) e (9) asseguram que os estágios de corte e furação são limitados para cada período  $t$  e cada cenário  $s$ . Em ambos os estágios são considerados os tempos de produção e de preparação e é possível utilizarem-se horas extras, caso a capacidade regular no período  $t$  seja insuficiente. A mesma variável de preparação  $Z_{jt}$  foi usada em ambos os estágios para sincronizá-los, i.e., a máquina de furação precisa ser preparada para processar uma peça  $p$  somente se o estágio de corte anterior tiver gerado pelo menos uma peça  $p$ . Matematicamente, definiu-se uma função indicadora  $\delta_{pj} \in \{0, 1\}$  (dado de entrada do problema) para sincronizar a preparação, de tal forma que  $\delta_{pj} = 1$  se o padrão de corte  $j$  contém pelo menos uma peça  $p$ , e  $\delta_{pj} = 0$  caso contrário. Note-se que  $Z_{jt} = 0$  indica que a máquina seccionadora não está preparada para cortar o padrão de corte  $j$  no período  $t$  e, portanto, a preparação da furadeira é desnecessária. Por outro lado,  $Z_{jt} = 1$  indica que a máquina seccionadora está ativada, então é preciso analisar se o padrão  $j$  gera uma peça  $p$  para ser furada no próximo estágio ou não. No primeiro caso,  $\delta_{pj} = 1$ , então a preparação é ativada na restrição (9). No segundo caso, i.e., se o padrão  $j$  não gera uma peça  $p$  para ser furada no próximo estágio, então  $\delta_{pj} = 0$ . Isso significa que a preparação da máquina de furação não será considerada na restrição 9, pois  $\varphi_{ps}^{II} \cdot \delta_{pj} \cdot Z_{jt} = 0$ .

As restrições (10) garantem que a quantidade máxima de horas extras utilizadas na máquina seccionadora e na furadeira seja respeitada em cada período  $t$  e cenário  $s$ . Finalmente, as restrições (11) referem-se ao domínio das variáveis de decisão de segundo estágio. O modelo (1) a (11) será designado de risco neutro (RN), em contrapartida ao modelo com recurso restrito apresentado na próxima seção.

### 3.2. Valor esperado de informação perfeita e valor da solução estocástica

Os paradigmas dos modelos determinísticos e estocásticos são distintos e, por essa razão, deve-se ter certo cuidado na comparação entre as respectivas soluções, para não se ignorar as diferenças entre

eles. Primeiro, enquanto o valor ótimo do modelo determinístico corresponde a um único custo mínimo, o valor ótimo do modelo estocástico refere-se a uma composição de custos mínimos, um para cada cenário, ponderados pelas probabilidades desses cenários, e que é comumente denominado custo mínimo esperado. Além disso, o modelo determinístico gera um único plano de produção (volume de produção, estoque e atrasos, desperdício de material, número de preparações e horas extras), ao passo que o modelo determinístico de dois estágios gera planos de produção dependentes dos cenários. O fato de uma única decisão do modelo determinístico corresponder a  $S$  possíveis decisões no modelo estocástico (variáveis de segundo estágio) faz com que os modelos estocásticos sejam atraentes em muitos contextos. Tradicionalmente, para se avaliar a melhoria que modelos estocásticos produzem em relação a soluções obtidas com aproximações determinísticas, recorre-se a análise do Valor Esperado de Informação Perfeita (*Expected Value of Perfect Information - EVPI*) e do Valor da Solução Estocástica (*Value of Stochastic Solution - VSS*).

O EVPI é obtido pela diferença entre o Valor do Problema Estocástico (*Recourse Problem - RP*) e o valor esperado das soluções *wait-and-see* (WS), i.e.,  $EVPI = RP - WS$ . Na literatura de programação estocástica, é usual designar RP como o valor do problema recurso, enquanto WS representa o valor esperado  $WS = \sum_s \pi_s WS_s^*$ , em que  $WS_s^*$  é o valor do problema *wait-and-see* de cada cenário  $s \in \Omega$ , i.e., é o valor ótimo do problema (1) a (11) para cada cenário  $s \in \Omega$ . Segundo Birge & Louveaux (1997), o EVPI mede o quanto o decisor estaria disposto a pagar em troca de informação perfeita e precisa sobre o futuro. Para Kall & Wallace (1994), o EVPI também representa quanto se esperaria ganhar se fosse possível determinar de antemão o valor das variáveis aleatórias. Para esses mesmos autores, o EVPI é importante porque mostra se é importante considerar a aleatoriedade do problema ou não. Não necessariamente, valores elevados para essa medida indicam a necessidade de se resolver o problema estocástico. Por outro lado, quando o EVPI é baixo, tem-se a indicação de que não é tão importante considerar a aleatoriedade do problema e, portanto, aproximações podem funcionar bem.

O VSS pode ser considerado como o custo de ignorar a aleatoriedade dos parâmetros na escolha de uma decisão (Birge & Louveaux, 1997). Seu cálculo supõe que, em vez de resolver o problema estocástico RN (1) a (11), o decisor prefira resolver um problema de Valor Esperado (*Expected Value Problem - EV*), que consiste em substituir todas as variáveis aleatórias do problema estocástico pelos respectivos valores esperados. Uma pergunta que advém da possibilidade

de se usar a solução do problema EV é: quanto boa ou ruim é ela em comparação à solução RP? Para responder a essa pergunta, define-se o resultado esperado com a utilização da solução do problema EV, ou apenas EEV (*Expectation of the Expected Value Problem*). O EEV é obtido fixando-se as variáveis de primeiro estágio encontradas pelo problema EV no problema estocástico RP. O resultado exprime como as variáveis de decisão de segundo estágio são escolhidas otimamente em função das variáveis de primeiro estágio do problema EV. Finalmente, define-se o valor da solução estocástica como a diferença entre RP e EEV, i.e., VSS = EEV - RP.

Pode-se também definir o problema EV em função do cenário mais provável, ou de pior caso, e o problema EEV é obtido de forma análoga. Em todas as situações, determinar VSS auxilia na comparação entre o problema estocástico e estratégias determinísticas aproximadas. Quanto maior for o valor de VSS, maior é o ganho em considerar o problema estocástico em detrimento da estratégia aproximada adotada. Similarmente, se o valor for muito baixo (menor do que uma tolerância definida pelo decisão), o ganho de se resolver o problema estocástico em vez do problema EV é desprezível e, portanto, pode-se utilizar a estratégia aproximada de valor esperado.

### 3.3. Um modelo de programação estocástica com recurso restrito

O modelo RN (1) a (11) é neutro em relação ao risco, i.e., o interesse é num desempenho de longo prazo, sem considerar as flutuações específicas de uma variável aleatória. Todavia, quando é importante reduzir a dispersão das variáveis aleatórias para gerar soluções de segundo estágio mais próximas uma das outras, deve-se incorporar uma medida de variabilidade apropriada ao modelo. Neste trabalho, utilizou-se a medida conhecida por UPM (*upper partial mean*, de acordo com Ahmed & Sahinidis, 1998) dentro de um modelo de recurso restrito. Matematicamente, a medida UPM – designada por  $\Delta$  neste trabalho – é definida da seguinte maneira:

$$\Delta = \sum_{s \in \Omega} \pi_s \cdot \Delta_s, \text{ com } \Delta_s = \left[ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (\bar{h}_{it}^+ \cdot I_{its}^+ + \bar{h}_{it}^- \cdot I_{its}^-) + \sum_{t \in T} c o_t \cdot O_{ts} \right]_+ - \left[ \sum_{s \in \Omega} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \pi_s \cdot (\bar{h}_{it}^+ \pi_s \cdot I_{its}^+ + \bar{h}_{it}^- \pi_s \cdot I_{its}^-) - \sum_{s \in \Omega} \sum_{t \in T} \pi_s \cdot c o_t \cdot O_{ts} \right]_+ \quad (12)$$

em que  $[.]_+$  denota a parte positiva do número real.

O modelo geral de dois estágios com recurso restrito é obtido pela introdução de uma restrição que limita a variabilidade das decisões de segundo estágio, de acordo com uma tolerância  $\Delta^{\max}$ . O modelo

estocástico com restrição de recurso (RR) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Min} & \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} c_{it} \cdot X_{it} + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} w_{jt} \cdot Y_{jt} + \sum_{s \in \Omega} \pi_s \left[ \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (\bar{h}_{it}^+ \cdot I_{its}^+ + \bar{h}_{it}^- \cdot I_{its}^-) + \sum_{t \in T} c o_t \cdot O_{ts} \right] \\ \text{S.t.: Restrições (6) - (11)} \\ \Delta_s & \geq \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (\bar{h}_{it}^+ \cdot I_{its}^+ + \bar{h}_{it}^- \cdot I_{its}^-) + \sum_{t \in T} c o_t \cdot O_{ts} - \sum_{z \in \Omega} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \pi_z \cdot (\bar{h}_{it}^+ \cdot I_{itz}^+ + \bar{h}_{it}^- \cdot I_{itz}^-) - \\ & \sum_{z \in \Omega} \sum_{i \in I} \pi_z \cdot c o_i \cdot O_{iz}, \quad s \in \Omega \\ & \sum_{s \in \Omega} \pi_s \cdot \Delta_s \leq \Delta^{\max} \\ & \Delta_s \geq 0, \quad s \in \Omega \end{aligned} \quad (13)$$

Note-se que a primeira restrição de (13) é simplesmente a linearização da medida UPM apresentada em (12). Basicamente, o desvio  $\Delta_s$  penaliza a diferença positiva entre o custo de cada cenário e o valor esperado, no intuito de gerar soluções menos sensíveis (ou mais estáveis) às variações dos diferentes cenários. Para gerar tais soluções, basta decrementar progressivamente o parâmetro  $\Delta^{\max}$ . Quanto menor  $\Delta^{\max}$ , mais avesso ao risco é o decisão e mais robusta é a solução, no sentido de que o custo dos cenários estará mais próximo do custo total esperado. Se  $\Delta^{\max}$  for um número suficientemente grande, a terceira restrição de (13) não tem efeito sobre a robustez da solução e, nesse caso, RR e RN são equivalentes. Para uma tolerância  $\Delta^{\max}$  suficientemente pequena, RR pode ainda gerar soluções infactíveis.

## 4. Experiências computacionais

Nesta seção, são apresentados os resultados dos experimentos computacionais com os modelos matemáticos estocásticos RN (1) a (11) e RR (13). Os objetivos dos experimentos computacionais são: (1) testar o desempenho dos modelos; e (2) analisar a redução da variabilidade dos custos de segundo estágio do modelo RR. Os modelos foram codificados no Sistema de Modelagem Algébrica GAMS (Rosenthal, 2008) e resolvidos pelo pacote computacional ILOG-CPLEX 11.0 (ilog, 2008) com parâmetros de resolução *default*, num *notebook* Core 2 Duo 4, 4.0 GB de RAM, 2.0 GHz, sob plataforma Windows Vista. Os dados utilizados referem-se a um exemplo real de uma empresa moveleira típica do setor, considerando-se três produtos, oito períodos do horizonte de planejamento, 49 peças e 81 padrões de corte guilhotinados. O leitor interessado nos detalhes dos dados de entrada pode consultar Alem (2011). Vale destacar que todos os exemplares foram resolvidos até a obtenção do certificado de otimalidade.

### 4.1. Geração dos cenários

Na literatura científica, há diversas maneiras de gerar os cenários associados à realização das variáveis aleatórias [veja, e.g., Dupacová et al. (2000) para

uma revisão dos métodos de geração de cenários em contextos multiestagiados]. Neste trabalho, foram adotadas duas formas: a primeira é baseada na construção de uma árvore de cenários, a partir da combinação dos parâmetros estocásticos (demandas, tempos de preparação da serra e tempos de preparação da furadeira) como, por exemplo, no trabalho de Ma et al. (2010). A segunda forma consiste, basicamente, na enumeração de algumas realizações discretas e equiprováveis como, por exemplo, nos trabalhos de Geng et al. (2009) e Pan & Nagi (2010).

Para construir a árvore de cenários, associou-se cada variável aleatória a três possíveis realizações, baixa, média ou alta, que foram posteriormente quantificadas com base nos correspondentes valores médios das variáveis aleatórias, como exemplificado a seguir. As realizações associadas às demandas nos cenários baixos (B), médios (M) e altos (A) foram geradas aleatoriamente de acordo com uma distribuição uniforme discreta nos intervalos  $[0,7d_{it}; 0,95d_{it}]$ ,  $[0,95d_{it}; 1,05d_{it}]$  e  $[1,05d_{it}; 1,3d_{it}]$ , respectivamente, em que  $d_{it}$  é o valor médio da variável aleatória. As realizações associadas aos tempos de preparação foram geradas de maneira análoga, segundo uma distribuição uniforme contínua, nesses casos. As demandas não inteiras foram arredondadas para o menor inteiro maior que o valor fracionário. Combinando as realizações dos parâmetros estocásticos, tem-se a árvore de cenários apresentada na Figura 1. Como são três variáveis aleatórias e três possíveis realizações para cada um, 3<sup>3</sup> cenários foram gerados. As probabilidades associadas aos 27 cenários da árvore ilustrada na Figura 1 foram calculadas pela regra do produto, supondo-se independência estatística entre as variáveis aleatórias e considerando-se as probabilidades de todas as variáveis aleatórias nos cenários B, M e A iguais a 25, 50, 25% (situação moderada), respectivamente. A probabilidade do cenário 1 (Baixa-Baixo-Baixo), por exemplo, foi obtida da seguinte maneira:  $\pi_B^I$  (probabilidade da demanda ser baixa)  $\times \pi_B^{II}$  (probabilidade do tempo de preparação da serra ser baixo)  $\times \pi_B^{III}$  (probabilidade do tempo de preparação da furadeira ser baixo) =  $\pi_B^I \pi_B^{II} \pi_B^{III} = 0,25^3 = 0,015625$ . Cabe ressaltar que outras distribuições de probabilidade poderiam ser usadas para gerar as realizações das variáveis aleatórias, mas a metodologia empregada neste trabalho pode ser validada independentemente da distribuição utilizada.

#### 4.2. Resultados do modelo estocástico RN

Nas análises, considerou-se o nível de serviço tipo II (ou taxa de atendimento da demanda) para analisar a demanda não atendida no último período  $T$  em cada cenário  $s$ :  $B_s = 1 - l_{Ts}/d_s$ , em que  $l_{Ts} = \sum_i l_{its}$  e

$d_s = \sum_{i,t} d_{its}$ . A Tabela 1 resume os resultados obtidos para cada cenário. Os termos apresentados na Tabela 1 referem-se às probabilidades  $\pi_s$ ; ao custo total de estoque  $IC_s$ ; ao volume total de estoque  $l_{s+}^+$ ; ao custo com demanda perdida  $BC_s$ ; à demanda não atendida no último período  $T$ ,  $l_{Ts}^-$ ; ao custo total de hora extra  $CO_s$ ; às horas extras totais utilizadas  $O_s$ ; e ao nível de serviço  $B_s$ . Ao final da tabela têm-se os custos de primeiro estágio: produção (PC) e aquisição de matéria-prima (TC), assim como o volume total de produção (X), a quantidade de placas cortadas (Y) e número de preparações realizadas (Z). O custo total esperado e o tempo de execução do algoritmo *branch-and-cut* para resolver o exemplar até a otimalidade também são mostrados. Além disso, os valores entre parênteses mostram a quantidade total produzida ao longo do horizonte de planejamento X e a correspondente quantidade de placas que foram utilizadas Y.

Como era de se esperar, nos cenários 1 a 9 de baixa demanda, os níveis de serviço atingem o máximo valor de 100%, uma vez que toda a demanda é atendida até o final do horizonte de planejamento. Nesses casos, os níveis acumulados de estoque atingem os maiores valores também. As horas extras são utilizadas principalmente nos cenários nos quais o tempo de preparação da furadeira é alto. Ainda, o tempo de preparação da serra parece não ter muita influência sobre as outras decisões de segundo estágio, como pode ser analisado nos cenários 3, 6 e 9, que representam o pior caso em relação ao tempo de preparação da serra. Nesses cenários, os estoques são igualmente muito elevados, mas não há evidências de que esses cenários consumam mais capacidade do que os cenários 2, 5 e 8, cujo tempo de preparação de serra é moderado. Já nos cenários de demanda média 10 a 18, os estoques têm uma redução média de 67%, assim como os níveis de serviço, que são deteriorados em média 5%. Além disso, há um aumento na utilização das horas extras, principalmente nos cenários mais pessimistas para o tempo de preparação da furadeira.

Nos cenários de demanda alta 19 a 27, os estoques decrescem ainda mais, cerca de 85% em relação à média estocada nos cenários de demanda média. Como consequência das altas demandas, as perdas de demanda são intensificadas e o nível de serviço tem o pior desempenho, em média, 81,5%. Nesses cenários não são observadas variações significativas nos níveis de horas extras utilizadas. Esses resultados sugerem que a variação da demanda tem maior impacto no problema estocástico e, portanto, os cenários 19 a 27 são os mais pessimistas, independentemente dos tempos de preparação.

Com o objetivo de investigar a sensibilidade do modelo RN em relação aos valores das probabilidades,

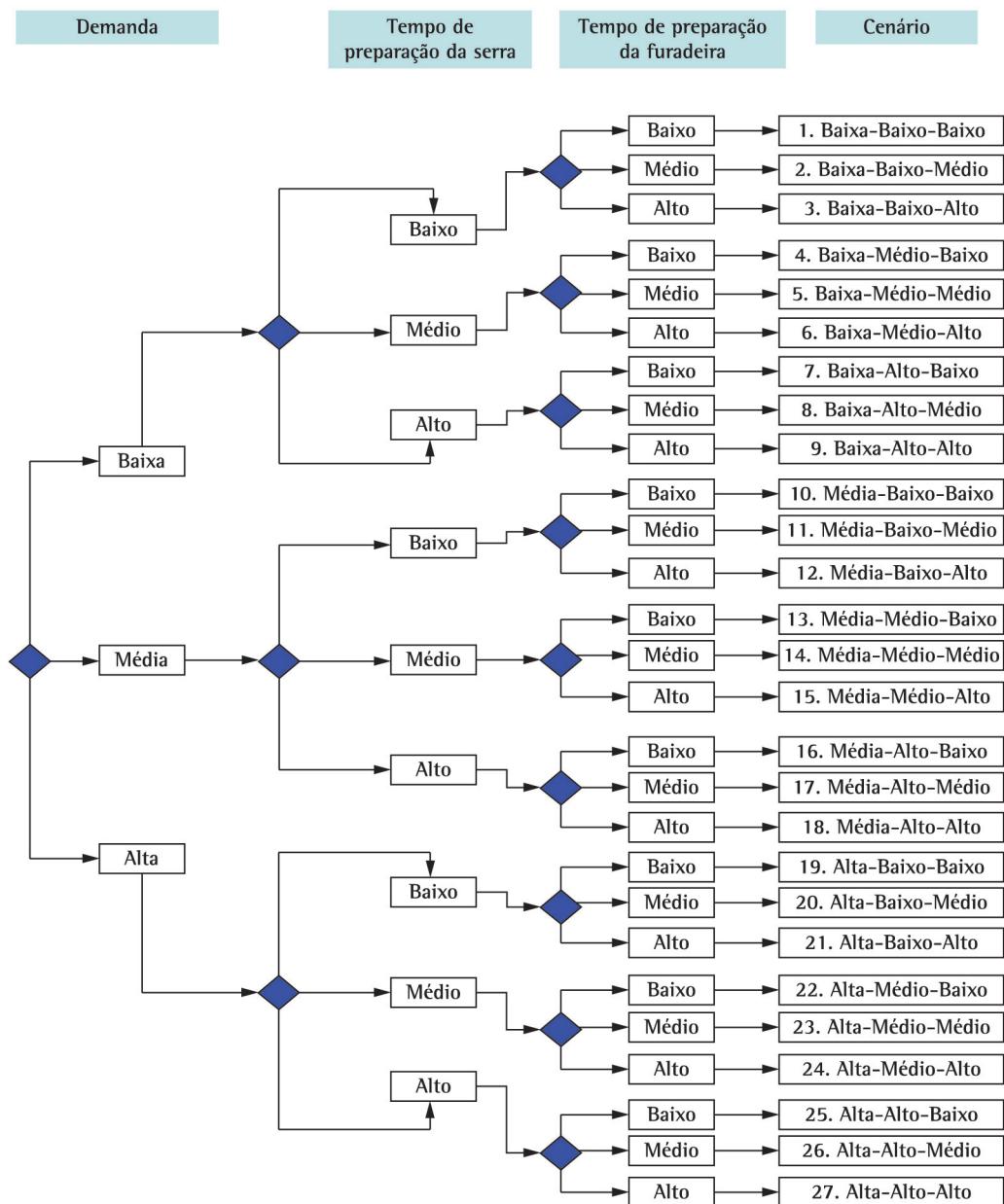


Figura 1. Árvore de cenários composta por três realizações referentes a três variáveis aleatórias independentes: demanda, tempo de preparação da seccionadora e tempo de preparação da furadeira. Fonte: Alem (2011).

especialmente porque estimativas precisas são difíceis de serem determinadas, três situações diferentes foram testadas: a) *Equiprobabilidade*: Nesse caso, as probabilidades dos cenários (B, M e A) foram consideradas 1/3, tornando os 27 cenários equiprováveis; b) *Otimista*: No caso otimista, as probabilidades de ocorrência das demandas e dos tempos de preparação nos cenários (B, M e A) são

0,6, 0,3, 0,1 e 0,5, 0,4, 0,1, respectivamente; c) *Pessimista*: No caso pessimista, as probabilidades de ocorrência das demandas e dos tempos de preparação nos cenários (B, M e A) são 0,1, 0,3, 0,6 e 0,1, 0,4, 0,5, respectivamente.

Os resultados sugerem que ambas as variáveis de primeiro e segundo estágios (e seus respectivos custos) praticamente não se modificaram com as diferentes

**Tabela 1.** Resultados de um exemplar real do modelo estocástico RN na situação moderada, na qual as probabilidades das demandas e tempos de preparação nos cenários Baixo, Médio e Alto são 25, 50 e 250%, respectivamente.

Cenário (s)	$\pi_s(\%)$	IC <sub>s</sub>	$I^* = \sum_{i,t} I^*_{i,t,s}$	BC <sub>s</sub>	$I^-_{i,s} = \sum_{i,t} I^-_{i,t,s}$	OC <sub>s</sub>	O <sub>s</sub>	B <sub>s</sub> (%)
1. Baixa-Baixo-Baixo	1,56	27258	3131	0	0	0	0	100,0
2. Baixa-Baixo-Médio	3,13	21678	2717	0	0	29	493	100,0
3. Baixa-Baixo-Alto	1,56	26717	2813	0	0	552	9295	100,0
4. Baixa-Médio-Baixo	3,13	26208	2925	0	0	0	0	100,0
5. Baixa-Médio-Médio	6,25	23714	2677	0	0	19	316	100,0
6. Baixa-Médio-Alto	3,13	27011	2918	0	0	548	9223	100,0
7. Baixa-Alto-Baixo	1,56	31255	2874	0	0	0	0	100,0
8. Baixa-Alto-Médio	3,13	27252	3090	0	0	0	0	100,0
9. Baixa-Alto-Alto	1,56	28002	2705	0	0	528	8884	100,0
10. Média-Baixo-Baixo	3,13	6712	834	165280	163	0	0	94,2
11. Média-Baixo-Médio	6,25	6987	985	233583	155	31	521	94,4
12. Média-Baixo-Alto	3,13	7030	975	159802	138	608	10242	95,0
13. Média-Médio-Baixo	6,25	7280	957	149932	160	0	0	94,2
14. Média-Médio-Médio	12,5	6807	954	169981	142	0	0	94,9
15. Média-Médio-Alto	6,25	7139	934	168725	145	597	100,0047	94,8
16. Média-Alto-Baixo	3,13	7512	968	115131	134	0	0	95,1
17. Média-Alto-Médio	6,25	6521	927	206286	165	9	155	94,1
18. Média-Alto-Alto	3,13	7020	896	114982	138	635	10692	95,0
19. Alta-Baixo-Baixo	1,56	1409	206	898490	641	0	0	80,6
20. Alta-Baixo-Médio	3,13	1090	165	757576	573	8	141	82,3
21. Alta-Baixo-Alto	1,56	414	22	961246	682	577	9709	79,6
22. Alta-Médio-Baixo	3,13	503	61	795375	602	0	0	81,6
23. Alta-Médio-Médio	6,25	1958	217	652827	528	2	30	83,5
24. Alta-Médio-Alto	3,13	1018	143	885985	625	517	8708	81,0
25. Alta-Alto-Baixo	1,56	1138	140	789059	597	0	0	81,7
26. Alta-Alto-Médio	3,13	807	120	844174	586	39	651	82,0
27. Alta-Alto-Alto	1,56	815	128	894661	620	600	100,0093	81,1
Média	-	11528	1314	331967	252	196	3304	92,0

Custo esperado: 473384; PC: 95913 (X = 2667); TC: 82337 (Y = 6347); Z: 364; Tempo: 47 segundos.

configurações de probabilidade. Porém, o custo total esperado é alterado significativamente: em relação à situação moderada, os custos totais das situações equiprovável, otimista e pessimista são 10% maior, 30% menor e 54% maior, respectivamente. Esse aparente paradoxo entre solução e valor de solução é devido aos custos de segundo estágio, pois a variação das probabilidades ocasiona uma alteração na contribuição de cada cenário no custo total esperado. Por exemplo, os custos do cenário 27 (cenário mais pessimista) nas situações moderada, equiprovável, otimista e pessimista são iguais a 343691, 343691, 348261 e 343658, respectivamente. Porém, a contribuição real desses custos leva em consideração a probabilidade do cenário 27 nas quatro situações, i.e., 1,56, 3,70, 0,100 e 15,0%, o que resulta nos seguintes custos de segundo estágio do cenário 27: 5361, 12716, 348 e 51549, respectivamente. Esses resultados mostram que, estruturalmente, a solução do modelo RN não é sensível às variações nos valores das probabilidades dos cenários, embora o valor ótimo da função objetivo seja sensível.

#### 4.3. Análise do EVPI e VSS

Para se calcular o EVPI foram resolvidos os 27 problemas *wait-and-see*. Tais soluções são ilustradas na segunda coluna da Tabela 2 ( $WS_s^*$ ), assim como o valor esperado de utilizar tais soluções, i.e.,  $WS = \sum_s \pi_s WS_s^*$ . As últimas linhas fornecem a solução final ( $WS$ ), as soluções do modelo estocástico (1) a (11) (RP), o EVPI e o seu respectivo valor relativo dado por  $EVPI\% = (EVPI/RP) \times 100\%$ . Todas as configurações de probabilidades foram analisadas. Primeiramente, convém ressaltar que as soluções *wait-and-see* têm um desempenho semelhante às soluções RP, no sentido de que o custo total dos primeiros cenários 1 a 9 é o mais baixo, seguido do custo dos cenários 10 a 18 e, finalmente, do custo dos últimos cenários, 19 a 27, como era de se esperar. Para resolver todos os problemas até a prova de otimalidade, foram necessários 97 segundos (com média de 3,62 e desvio padrão de 2,90).

Os valores absolutos do EVPI indicam que as situações mais pessimistas geram os maiores EVPI: EVPI

Tabela 2. Resultados dos problemas *wait-and-see* e valor esperado da informação perfeita (EVPI) para o exemplar analisado.

Cenário (s)	$\pi_s WS^*$	Moderado	Equiprovável	Otimista	Pessimista
		$\pi_s WS^*$	$\pi_s WS^*$	$\pi_s WS^*$	$\pi_s WS^*$
1. Baixa-Baixo-Baixo	154179	2409	5710	23127	154
2. Baixa-Baixo-Médio	160510	5016	5945	19261	642
3. Baixa-Baixo-Alto	157552	2462	5835	4727	788
4. Baixa-Médio-Baixo	156216	4882	5786	18746	625
5. Baixa-Médio-Médio	159450	9966	5906	15307	2551
6. Baixa-Médio-Alto	154596	4831	5726	3710	3092
7. Baixa-Alto-Baixo	149069	2329	5521	4472	745
8. Baixa-Alto-Médio	156533	4892	5798	3757	3131
9. Baixa-Alto-Alto	153206	2394	5674	919	3830
10. Média-Baixo-Baixo	188911	5903	6997	14168	567
11. Média-Baixo-Médio	191505	11969	7093	11490	2298
12. Média-Baixo-Alto	188224	5882	6971	2823	2823
13. Média-Médio-Baixo	188726	11795	6990	11324	2265
14. Média-Médio-Médio	189572	23696	7021	9099	9099
15. Média-Médio-Alto	188970	11811	6999	2268	11338
16. Média-Alto-Baixo	186005	5813	6889	2790	2790
17. Média-Alto-Médio	190531	11908	7057	2286	11432
18. Média-Alto-Alto	186796	5837	6918	560	14010
19. Alta-Baixo-Baixo	225875	3529	8366	5647	1355
20. Alta-Baixo-Médio	219851	6870	8143	4397	5276
21. Alta-Baixo-Alto	228454	3570	8461	1142	6854
22. Alta-Médio-Baixo	221722	6929	8212	4434	5321
23. Alta-Médio-Médio	215990	13499	8000	3456	20735
24. Alta-Médio-Alto	223717	6991	8286	895	26846
25. Alta-Alto-Baixo	222927	3483	8257	1115	6688
26. Alta-Alto-Médio	220944	6904	8183	884	26513
27. Alta-Alto-Alto	223622	3494	8282	224	33543
WS	189066	189024	173029	205312	189066
RP	473384	521941	327891	732024	473384
EVPI	284318	332917	154862	526712	284318
EVPI (%)	189066	189024	173029	205312	189066

(pessimista = 526712) > EVPI (equiprovável = 332917) > EVPI (moderada = 284318) > EVPI (otimista = 154862). Isso ocorre porque, nas situações mais pessimistas, os cenários cujos parâmetros estocásticos possuem os maiores desvios em relação aos valores nominais têm probabilidades mais elevadas. Assim, a aleatoriedade dos cenários mais desfavoráveis ganha mais importância do que a aleatoriedade dos cenários mais favoráveis, o que se reflete no EVPI. Além disso, esses resultados também confirmam o efeito que as probabilidades têm sobre o EVPI: a diferença entre o EVPI obtido no cenário otimista e aquele obtido no cenário pessimista representa mais de 240% do menor valor obtido (154862). Esses resultados indicam que seria possível poupar uma quantia considerável de dinheiro – em todas as situações – se a informação perfeita sobre as variáveis aleatórias pudesse ser disponibilizada. Além disso, os valores elevados para o EVPI também indicam que a aleatoriedade desempenha um papel importante no problema.

O problema EV foi determinado de acordo com os valores médios. Fixando as variáveis de primeiro estágio no problema EEV, obteve-se uma solução infactível. Portanto, o problema EV não pode ser usado para aproximar o problema estocástico e VSS → ∞. Para investigar a causa da infactibilidade, foram inseridos dois conjuntos de variáveis de erro para contabilizar o excesso de estoque e de capacidade, respectivamente, nas restrições de estocagem e horas extras. Tais variáveis foram adicionadas à função objetivo com pesos suficientemente grandes (i.e., iguais a 10000). Os resultados mostraram que apenas as restrições de estoque (7) foram violadas. Diferentemente do problema estocástico, que visa balancear produção, estoques e atrasos devidos à variação dos níveis de demanda em cada cenário, os problemas EV tendem a produzir o máximo possível da demanda determinística e evitar atrasos. Dessa maneira, quando a demanda determinística é mais elevada, os níveis de produção  $X_{it}$  também são maiores, o que ocasiona uma elevação

dos níveis de estoque no problema EEV. Por essa razão, os maiores níveis de infactibilidade foram atingidos nas situações mais pessimistas.

#### 4.4. Resultados dos modelos com aversão ao risco

Um conjunto de soluções foi gerado para cada situação de designação de probabilidade, reduzindo-se a tolerância  $\Delta^{\max}$  de  $\Delta^0$  (desvio esperado do problema RN) até zero, com passo 2,5% de  $\Delta^0$  (isso significa que  $\Delta^1 = 0,975 \times \Delta^0$ ,  $\Delta^2 = 0,95 \times \Delta^0$ , ...,  $\Delta^{39} = 0,025 \times \Delta^0$ ,  $\Delta^{40} = 0$ ). Note-se que há uma tolerância inicial diferente em cada situação (moderada, equiprovável, pessimista e otimista). No total, foram resolvidos 160 exemplares RR. Os sumários dos resultados estão apresentados nas Tabelas 3 a 6, a saber: o custo total esperado (Custo), aumento relativo no valor da função objetivo em relação ao custo total do problema RN (Var%), tempo de execução do algoritmo em segundos até a obtenção do certificado de otimalidade ( $t$ ), estoque acumulado ( $I^+$ ), atraso total ( $I^-$ ), horas extras utilizadas

( $O$ ), desvio esperado ( $\Delta$ ), redução relativa do desvio esperado em relação ao desvio do problema RN (Red%) e nível de serviço ( $B\%$ ).

Em todos os problemas, o custo total esperado aumentou conforme a solução tornou-se mais robusta. Diminuindo-se progressivamente a tolerância  $\Delta^{\max}$ , o risco é sensivelmente reduzido à custa de grandes aumentos no custo total esperado. As decisões e custos de segundo estágio apresentaram comportamentos específicos para diferentes valores do fator de risco, mas as variáveis de decisão de primeiro estágio praticamente não se alteraram. As reduções máximas obtidas foram 75, 67,5, 70 e 82,5%, nas situações moderada, equiprovável, otimista e pessimista, com acréscimos nos custos esperados de 85, 65, 135 e 350%, respectivamente. Nos casos equiprovável e pessimista, as reduções foram maiores do que os acréscimos nos custos totais esperados para todos os níveis de reduções, sugerindo que o “preço da robustez” não é tão dispendioso nesses casos. Em contrapartida, nas outras situações, é mais “caro” obter soluções mais aversas ao risco, principalmente

Tabela 3. Sumário dos resultados do modelo RR na situação *moderada*.

Custo	Var%	t	$I^+$	$I^-$	O	$\Delta$	Red%	B%
473384	-	67,7	1220	222	0,706	125307	-	92,0
485815	2,63	54,8	1302	278	2,834	122174	2,5	89,9
498346	5,27	64,3	1310	287	12,6	119042	5,0	89,6
510877	7,92	56,0	1333	297	12,3	115909	7,5	89,3
523407	10,6	50,2	1334	309	12,3	112776	10,0	88,8
535938	13,2	57,8	1359	325	12,3	109644	12,5	88,2
548469	15,9	57,0	1394	333	12,3	106511	15,0	88,0
560999	18,5	56,6	1378	304	12,6	103378	17,5	89,0
573530	21,2	57,3	1382	290	7,86	100246	20,0	89,5
586061	23,8	56,5	1421	293	12,3	97113	22,5	89,4
598591	26,4	58,2	1434	303	7,10	93980	25,0	89,1
611122	29,1	64,0	1449	318	7,44	90848	27,5	88,5
623653	31,7	57,6	1463	316	8,46	87715	30,0	88,6
636184	34,4	59,1	1489	318	6,42	84582	32,5	88,5
648714	37,0	56,1	1500	314	11,5	81450	35,0	88,6
661245	39,7	58,2	1514	313	8,80	78317	37,5	88,7
673776	42,3	67,3	1533	307	14,3	75184	40,0	88,9
686306	45,0	56,0	1549	310	10,9	72052	42,5	88,8
698837	47,6	78,8	1566	307	10,2	68919	45,0	88,9
711368	50,3	59,2	1582	303	10,2	65786	47,5	89,0
723898	52,9	63,5	1596	298	9,25	62654	50,0	89,2
736429	55,6	64,9	1643	305	7,44	59521	52,5	89,0
748960	58,2	70,9	1681	309	7,44	56388	55,0	88,8
761491	60,9	66,1	1707	306	7,44	53255	57,5	89,0
774021	63,5	54,6	1749	315	7,44	50123	60,0	88,6
786552	66,2	68,8	1767	307	7,44	46990	62,5	88,9
799083	68,8	72,5	1786	313	7,44	43857	65,0	88,7
811613	71,4	70,1	1827	320	7,44	40725	67,5	88,4
824144	74,1	62,5	1873	323	7,44	37592	70,0	88,3
837870	77,0	72,3	1868	319	36,8	34459	72,5	88,5
861922	82,1	63,3	1828	319	45,9	31327	75,0	88,5

na situação otimista. Nessa situação, 22,5% de redução no desvio ocasiona um acréscimo menor do que 22% no custo total esperado; além de 22,5%, a diferença torna-se negativa. Esses resultados podem ser visualizados na Figura 2.

O volume de estoque também aumentou com a robustez da solução em todas as situações até atingir um máximo, a partir do qual teve uma leve diminuição. Como nos testes anteriores, o maior volume de estoque foi obtido na situação otimista, seguida por equiprovável, moderada e pessimista. As horas extras utilizadas não tiveram um comportamento muito bem definido. Aparentemente, para uma redução maior do que 2,5%, a situação pessimista utiliza menos horas extras do que todas as outras situações, atingindo um máximo de 21 horas quando o desvio é mínimo. Nas outras situações, as horas extras também apresentaram picos de crescimento próximos aos desvios mínimos, chegando a 75 horas na situação otimista, quando o desvio reduz 67,5% do valor inicial. Os níveis de serviço da situação otimista dominam todos os outros, enquanto o nível

de serviço da situação pessimista é dominado pelos demais. Por outro lado, na situação otimista é obtida a maior deterioração dessa medida de desempenho quando o desvio mínimo é atingido: 5,3%, contra uma média de 3,7% nas outras situações.

Para ilustrar como o modelo de recurso restrito gera soluções progressivamente mais próximas umas

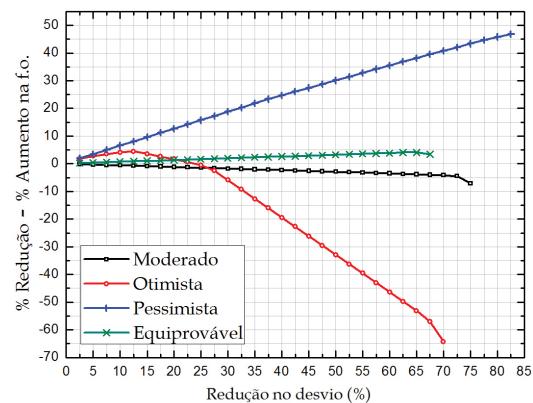


Figura 2. Diferença entre redução do desvio e aumento no valor do custo total esperado (em %) em todas as situações.

Tabela 4. Sumário dos resultados do modelo RR na situação *otimista*.

Custo	Var%	t	I <sup>+</sup>	I <sup>-</sup>	0	Δ	Red%	B%
327891	-	53,8	1911	111	0,364	77000	-	95,6
330102	0,67	52,9	2025	106	6,09	75075	2,5	95,8
335141	2,21	56,2	2031	112	6,26	73150	5,0	95,6
341064	4,02	55,5	2045	114	6,25	71225	7,5	95,5
347106	5,86	56,3	2054	117	5,10	69300	10,0	95,4
354393	8,08	54,8	2072	122	6,55	67375	12,5	95,2
365379	11,4	70,0	2092	141	5,69	65450	15,0	94,4
376571	14,8	58,9	2111	153	5,69	63525	17,5	93,9
387763	18,3	69,2	2139	154	6,74	61600	20,0	93,9
399545	21,9	52,5	2151	154	6,80	59675	22,5	93,9
411577	25,5	56,4	2213	154	6,80	57750	25,0	93,9
426447	30,1	47,8	2251	157	7,52	55825	27,5	93,8
445697	35,9	46,3	2256	170	7,52	53900	30,0	93,3
464947	41,8	50,1	2273	186	8,78	51975	32,5	92,6
484197	47,7	46,2	2305	196	8,78	50050	35,0	92,2
503447	53,5	46,9	2349	220	9,65	48125	37,5	91,3
522697	59,4	47,6	2364	197	10,9	46200	40,0	92,2
541947	65,3	54,9	2415	202	11,1	44275	42,5	92,0
561197	71,2	54,2	2478	213	11,5	42350	45,0	91,6
580447	77,0	51,8	2523	200	11,3	40425	47,5	92,1
599697	82,9	49,7	2587	206	11,3	38500	50,0	91,8
618947	88,8	51,3	2651	246	11,6	36575	52,5	90,3
638197	94,6	45,6	2725	244	11,6	34650	55,0	90,3
657447	101	55,1	2758	222	11,6	32725	57,5	91,2
676697	106	47,6	2807	222	11,6	30800	60,0	91,2
695947	112	48,0	2854	223	11,5	28875	62,5	91,2
715197	118	54,4	2878	231	48,8	26950	65,0	90,8
736185	125	52,6	2869	223	74,3	25025	67,5	91,2
768202	134	70,8	2843	239	68,9	23100	70,0	90,5

Tabela 5. Sumário dos resultados do modelo RR na situação *pessimista*.

Custo	Var%	t	I <sup>+</sup>	I <sup>-</sup>	O	Δ	Red%	B%
732024	-	52,1	646	404	1,13	170000	-	86,6
735977	0,54	54,4	672	424	2,77	165750	2,5	86,0
743061	1,51	55,9	711	442	6,18	161500	5,0	85,4
750144	2,48	52,2	715	457	4,21	157250	7,5	84,9
757227	3,44	51,4	733	449	3,77	153000	10,0	85,1
764311	4,41	51,5	743	449	4,24	148750	12,5	85,1
771394	5,38	61,6	753	455	4,21	144500	15,0	84,9
778477	6,35	57,2	788	439	3,77	140250	17,5	85,5
785561	7,31	59,5	755	471	3,77	136000	20,0	84,4
792644	8,28	56,1	771	464	3,77	131750	22,5	84,6
799727	9,25	64,7	747	440	3,77	127500	25,0	85,4
806811	10,22	53,0	761	446	3,77	123250	27,5	85,2
813894	11,18	53,0	775	446	3,77	119000	30,0	85,2
820977	12,15	52,6	787	446	5,09	114750	32,5	85,2
828061	13,12	56,0	784	437	3,77	110500	35,0	85,5
835529	14,14	58,4	806	453	4,73	106250	37,5	85,0
843961	15,29	53,1	834	470	4,96	102000	40,0	84,4
852394	16,44	49,4	844	480	4,19	97750	42,5	84,1
860826	17,60	58,4	832	447	4,96	93500	45,0	85,2
869259	18,75	57,3	844	451	5,77	89250	47,5	85,1
877692	19,90	64,5	865	452	5,77	85000	50,0	85,0
886124	21,05	45,0	872	455	7,41	80750	52,5	84,9
894557	22,20	55,7	900	464	5,66	76500	55,0	84,6
902989	23,36	49,8	920	468	5,77	72250	57,5	84,5
911422	24,51	59,0	943	460	5,77	68000	60,0	84,8
919854	25,66	57,8	960	470	5,77	63750	62,5	84,4
928287	26,81	54,9	962	465	5,44	59500	65,0	84,6
936719	27,96	57,7	970	471	5,44	55250	67,5	84,4
945558	29,17	53,0	1004	467	7,07	51000	70,0	84,5
954412	30,38	54,8	1028	494	5,43	46750	72,5	83,6
963266	31,59	49,1	1051	492	5,53	42500	75,0	83,7
972357	32,83	54,6	1046	470	6,85	38250	77,5	84,4
982205	34,18	51,5	1067	477	8,89	34000	80,0	84,2
992766	35,62	57,5	1044	502	21,0	29750	82,5	83,4

das outras (ou mais robustas), a Figura 3 exibe os valores do desvio  $\Delta_s$  de um exemplar com apenas 20 cenários, considerando níveis de redução entre 0 e 100%. Inicialmente, há cinco desvios positivos:  $\Delta_5$ ,  $\Delta_{15}$ ,  $\Delta_{16}$ ,  $\Delta_{18}$  e  $\Delta_{19}$ , sendo o máximo desvio  $\Delta_{18} \approx 53000$ . Os outros 15 cenários apresentam desvios nulos, i.e., o custo esperado é maior do que os custos individuais desses cenários. Quando a redução atinge 35%,  $\Delta_{16} = 0$  e o máximo desvio passa a ser  $\Delta_{18} \approx 43000$ . Prosseguindo com a observação da figura, note-se que  $\Delta_{18}$  é o último desvio positivo quando a redução está em 95% e vale, aproximadamente, 7500. Finalmente, todos os desvios anulam-se. Entretanto, isso nem sempre é alcançado, como foi mostrado nos testes anteriores.

Para se analisar o impacto do aumento do número de cenários, foram executados testes com exemplares de 20 até 300 cenários equiprováveis. As demandas e os tempos de preparação foram gerados aleatoriamente, conforme uma distribuição uniforme

(inteira para a demanda e contínua para os demais parâmetros) entre 70 e 130% do respectivo valor nominal. Testes subsequentes utilizaram os cenários de testes anteriores, de modo que, em cada teste, apenas 20 cenários foram gerados. Por exemplo, para  $S = 40$ , os 20 primeiros cenários foram exatamente os 20 cenários do teste com  $S = 20$ , e assim por diante. A motivação para se construir os cenários dessa maneira foi que assim permite-se a comparação entre diferentes configurações de cenários. Para cada configuração de cenário, o desvio  $\Delta$  foi progressivamente reduzido de zero (problema RN) até 100%. O problema cujo desvio foi 100% reduzido é designado *problema totalmente robusto*.

#### 4.4.1. Análise de robustez

A Figura 4 ilustra as curvas de *tradeoff* entre a robustez do modelo (redução do desvio esperado  $\Delta$ ) e o incremento no valor da função objetivo (em

Tabela 6. Sumário dos resultados do modelo RR na situação *equiprovável*.

Custo	Var%	t	I <sup>+</sup>	I <sup>-</sup>	O	Δ	Red%	B%
521941	-	58,2	1315	252	0,931	163000	-	90,9
533647	2,24	53,9	1387	302	4,26	158925	2,5	89,1
545872	4,58	55,6	1420	308	13,4	154850	5,0	88,9
558097	6,93	60,1	1425	328	13,4	150775	7,5	88,1
570322	9,27	61,8	1444	343	13,4	146700	10,0	87,6
582547	11,60	56,3	1473	355	13,4	142625	12,5	87,2
594772	14,00	55,7	1467	356	15,0	138550	15,0	87,1
606997	16,30	59,1	1496	351	11,7	134475	17,5	87,3
619222	18,60	53,3	1514	353	13,4	130400	20,0	87,3
631447	21,00	60,1	1506	345	13,4	126325	22,5	87,5
643672	23,30	69,5	1506	338	12,6	122250	25,0	87,8
655897	25,70	61,5	1534	342	13,1	118175	27,5	87,6
668122	28,00	61,7	1554	345	11,8	114100	30,0	87,5
680347	30,30	65,0	1531	316	11,8	110025	32,5	88,6
692572	32,70	66,3	1566	324	10,9	105950	35,0	88,3
704797	35,00	61,9	1557	307	10,9	101875	37,5	88,9
717022	37,40	61,0	1586	315	11,8	97800	40,0	88,6
729247	39,70	62,7	1609	319	10,9	93725	42,5	88,5
741472	42,10	64,4	1660	334	11,8	89650	45,0	87,9
753697	44,40	59,3	1715	327	10,9	85575	47,5	88,2
765922	46,70	69,6	1748	339	10,1	81500	50,0	87,8
778147	49,10	64,9	1794	347	10,1	77425	52,5	87,5
790372	51,40	55,0	1831	336	10,9	73350	55,0	87,9
802597	53,80	67,2	1877	340	10,9	69275	57,5	87,7
814822	56,10	62,7	1920	340	11,8	65200	60,0	87,7
827047	58,50	60,5	1965	343	11,8	61125	62,5	87,6
840045	60,90	60,5	1976	346	38,4	57050	65,0	87,5
856577	64,10	58,1	1967	343	61,3	52975	67,5	87,6

%), considerando  $S = 20, \dots, 100$  (gráfico de cima, esquerda);  $S = 100, \dots, 120$  (gráfico de cima, direita); e  $S = 220, \dots, 300$  (gráfico de baixo). Em vários casos, não é dispensioso assegurar soluções mais robustas: sacrificando-se o valor ótimo em apenas 1% é possível reduzir  $\Delta$  em 40, 25, 10 e 10%, para  $S = 40, 60, 100$  e  $180$ , respectivamente. Ainda, para todas as configurações de cenário, é preciso sacrificar em torno de 25% do custo total esperado para se alcançar uma redução do desvio de 50%. Forçando ainda mais a robustez da solução, a deterioração no valor da função objetivo eleva-se consideravelmente, principalmente quando  $S = 120, \dots, 300$ . Note-se, por exemplo, que a taxa de variação do custo total aumenta mais quando a redução está mais próxima de zero: reduzir  $\Delta$  em apenas 5% – de 95 para 100 – implica em aumentar o custo total em mais de 30% para  $S = 220, 260, 280, 300$ , e em mais de 40% para  $S = 180, 240$ , o que inviabiliza a adoção desses planos de produção. O melhor compromisso entre robustez e custo foi obtido para  $S = 20$ ; nesse caso, o desvio foi totalmente reduzido com apenas 28% de aumento no valor ótimo. No pior desempenho ( $S = 180$ ), a redução de 100% ocasionou um aumento drástico de quase 150% no custo total esperado.

#### 4.4.2. Efeito da robustez na solução ótima

Para assegurar a robustez da solução, o custo total é elevado como consequência do aumento nos custos individuais, proporcionado pelo aumento ou redução nos níveis das variáveis de decisão. O efeito da robustez na solução ótima foi analisado em todos os casos, mas é discutido em detalhes apenas para  $S = 20, 100, 200$  e  $300$  (nos outros casos, a análise é similar). Como já mencionado anteriormente, as variáveis de primeiro estágio não variaram significativamente, porém observou-se uma suave tendência de redução nos níveis de produção e quantidade de placas utilizadas conforme a solução tornou-se mais robusta. Ao passo que os volumes de estoque não tiveram um comportamento óbvio, os atrasos aumentaram consideravelmente, principalmente quando as reduções aproximaram-se de zero, fazendo com que os respectivos custos fossem responsáveis pela maior parte da deterioração nos valores ótimos. Entretanto, os níveis de serviço não foram muito deteriorados, pois a maior parte da demanda atrasada é produzida até o final do horizonte de planejamento. Em média, 65, 57, 78 e 73% da demanda total atrasada não foi perdida, para  $S = 20, 100, 200$

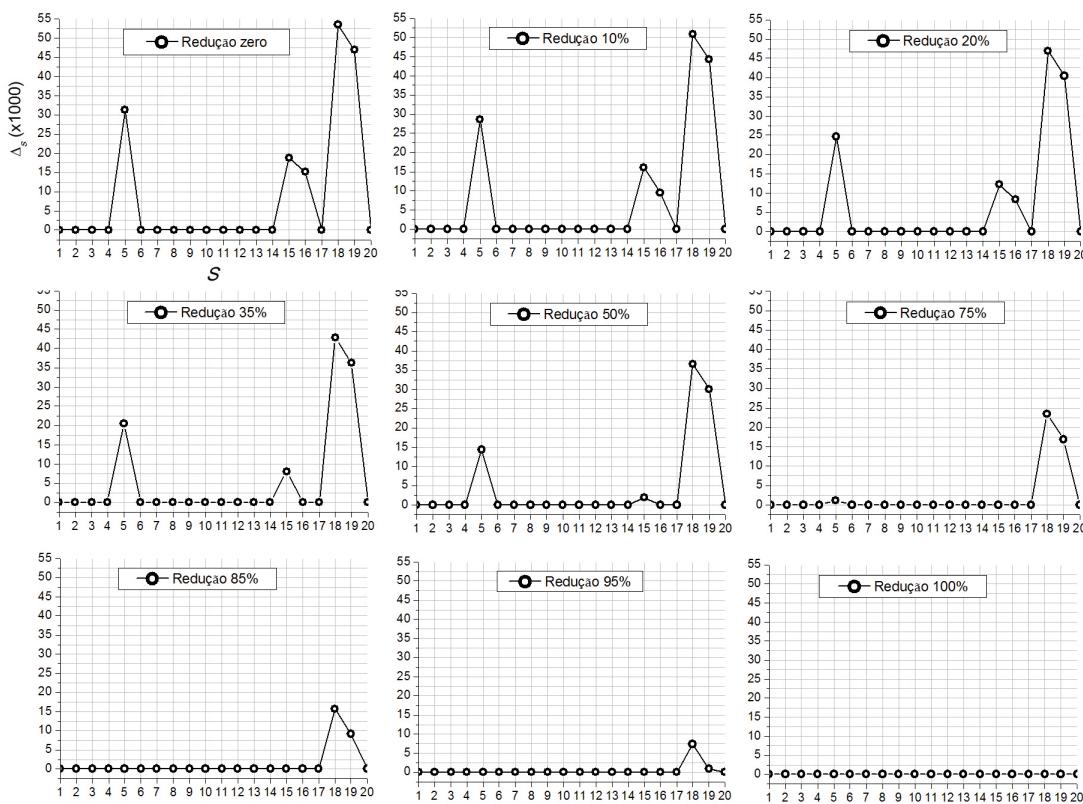


Figura 3. Exemplo de redução progressiva do desvio  $\Delta_s$  de 0 até 100%, considerando um exemplar estocástico robusto de recurso restrito com 20 cenários.

e 300, respectivamente. Foram observados alguns picos na utilização de horas extras à medida que o desvio aproximou-se de zero, magnitude que pareceu aumentar quando mais cenários foram incorporados ao problema.

#### 4.4.3. Efeito do número de cenários na solução ótima

Fixando-se o nível de redução do desvio, foi possível analisar o efeito do número de cenários na solução ótima do modelo RR. As Tabelas 7, 8 e 9 exibem o desempenho dos problemas RN e RR quando a redução do desvio foi fixada em 0, 50 e 100%, respectivamente, para  $S = 20, \dots, 300$ . Os valores ótimos elevaram-se com o aumento do número de cenários para os três níveis de redução. Para o problema RN, houve uma suave tendência na estabilização do valor ótimo entre 170000 e 180000, como sugerem os valores na Tabela 7. Nos problemas RR com reduções de 50 e 100%, os valores ótimos tiveram um comportamento semelhante ao caso anterior. Porém, são, aproximadamente, 16 e 95% mais elevados (em média), apresentaram picos maiores

e a tendência de estabilização não está bem definida (veja Tabelas 8 e 9). Analisar a estabilização do valor ótimo em relação ao número de cenários pode ser importante porque permite ao decisor operar com um conjunto bem definido (fixo) de cenários e garantir precisão à solução do problema.

É possível inferir que o comportamento das soluções para 0, 50 e 100% de redução é bastante similar quando o número de cenários aumenta, ressaltando que, no problema totalmente robusto, algumas tendências de redução e/ou crescimento são amplificadas. Note-se que a variação (desvio padrão relativo) do volume de produção, quantidade de placas utilizadas e número de preparações é cerca de 3% no problema totalmente robusto (veja última linha da Tabela 7). Com exceção do número de preparações, que não apresenta nenhuma tendência, os volumes de produção e estoque decrescem lentamente quando  $S$  aumenta. Tal comportamento pode ser confirmado nas Tabelas 7 a 9 (o comportamento da quantidade de placas utilizadas é muito similar ao comportamento do volume de produção, razão pela qual seu gráfico foi omitido). As decisões de segundo estágio, por sua vez, tiveram uma variação alta. O volume de estoque

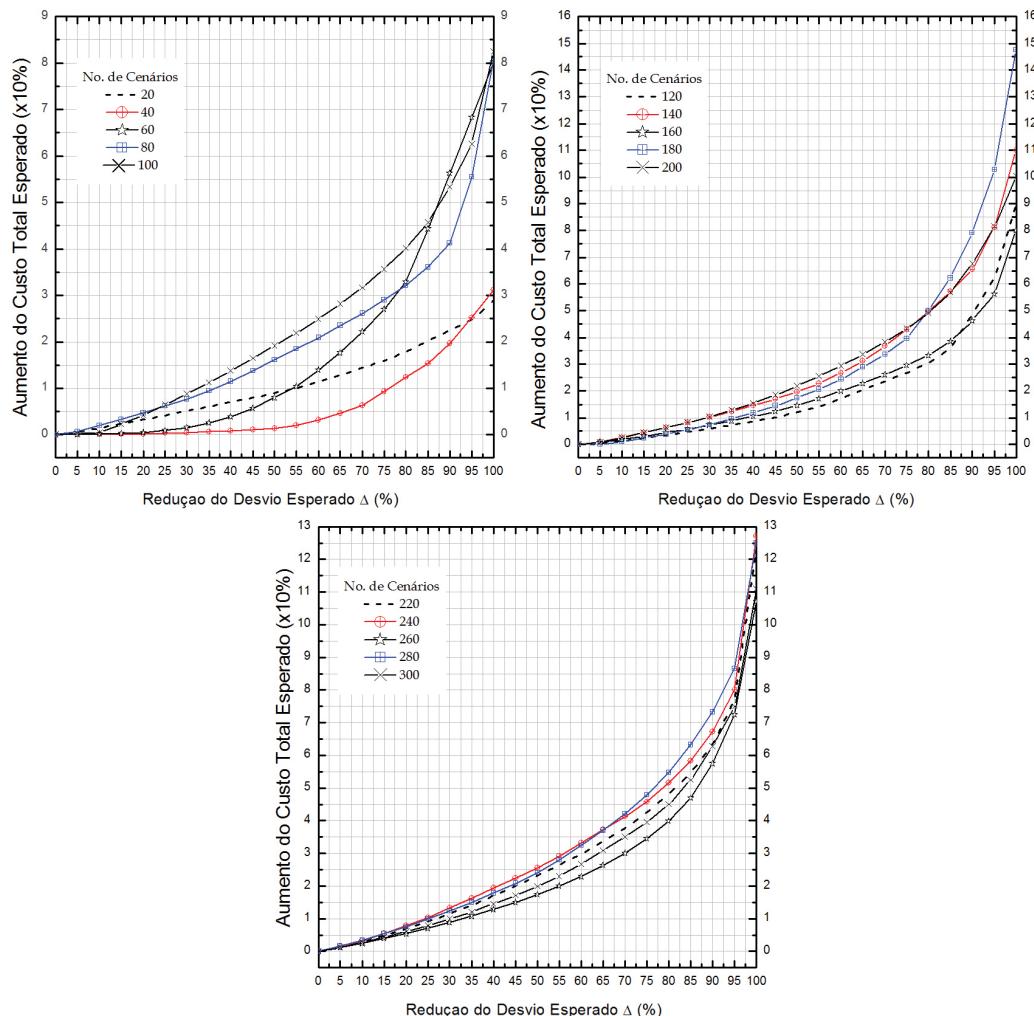


Figura 4. Curvas de *tradeoff* entre aumento do custo total esperado e redução do risco para  $S = 20, \dots, 300$ , considerando um exemplar estocástico robusto de recurso restrito.

variou cerca de 16% no problema totalmente robusto e o atraso total variou mais de 48% no problema robusto com redução de 50%. Entretanto, a variação do nível de serviço foi, no máximo, 8,4% no problema totalmente robusto, confirmando que grande parte da demanda é produzida até o final do horizonte de planejamento (veja-se também que o maior pico de atraso em  $S = 180$  não corresponde ao pior nível de serviço em  $S = 220$ ). A utilização de horas extras ocorreu em picos em apenas alguns cenários, principalmente no problema totalmente robusto, como pode ser observado na Tabela 9.

#### 4.4.4. Tempo computacional

A Figura 5 exibe os tempos médios de resolução necessários para obter o certificado de otimalidade

dos problemas RR para  $S = 20, \dots, 300$  e os respectivos desvios padrão, considerando todos os níveis de redução do desvio. Como era de se esperar, conforme o número de cenários aumentou, o tempo computacional elevou-se drasticamente. A variação entre os tempos de resolução para um mesmo número de cenários  $S$  deve-se ao fato de que níveis de redução diferentes requerem esforços computacionais distintos. Para muitos valores de  $S$ , à medida que a solução tornou-se mais robusta, o tempo de resolução elevou-se gradualmente. Um resultado que chamou atenção ocorreu nos problemas com redução de 100%. O tempo de resolução requerido para esses problemas foi, em geral, muito mais baixo do que para os outros níveis de redução do desvio, incluindo-se os problemas com redução zero – isso é particularmente visível a partir de  $S = 220$ . Para prever o tempo

**Tabela 7.** Efeito do número de cenários na solução ótima do problema estocástico neutro ao risco (redução zero).

S	Custo	X	I <sup>+</sup>	I <sub>T</sub>	Y	Z	O	Δ	B%
20	174595	2182	1332	24	5249	366	0	8287	99,4
40	167888	2185	1159	21	5229	365	0	5243	99,3
60	169989	2186	1162	24	5198	362	0	6974	99,3
80	173224	2175	1101	34	5121	361	0	11450	99,2
100	173410	2147	1100	33	5126	364	0	12309	99,3
120	171126	2174	1194	29	5130	365	0	8187	99,2
140	177857	2170	1145	41	5077	366	0	14977	99,1
160	170237	2162	1162	28	5126	366	0	8687	99,2
180	168802	2123	1098	36	5045	365	0	9074	98,9
200	172074	2171	1236	30	5161	365	0	9648	99,2
220	175866	2133	1086	50	5092	364	0	12719	97,6
240	175554	2162	1141	38	5107	366	0	13053	99,2
260	172515	2162	1109	34	5152	365	0	9873	99,2
280	183820	2132	1088	56	4970	365	0	18542	98,6
300	173551	2154	1108	36	5126	363	0	11262	99,1
Média	173367	2161	1148	34,3	5127	365	<1	10686	99,1
DP	3978	19,8	66,5	9,43	69,5	1,51	<1	3350	0,454
DP %	2,29	0,917	5,8	27,5	1,36	0,413	387	31,4	0,458

**Tabela 8.** Efeito do número de cenários na solução ótima do problema estocástico robusto (redução 50%).

S	Custo	X	I <sup>+</sup>	I <sub>T</sub>	Y	Z	O	Δ	B%
20	190229	2178	1235	94	5232	366	0,000	4143	98,7
40	170136	2246	1204	13	5413	366	0,000	2622	99,8
60	183550	2213	1260	49	5328	362	0,000	3487	98,6
80	201021	2164	1081	92	5098	364	0,000	5725	97,3
100	206639	2210	1244	77	5247	365	0,000	6154	97,8
120	191754	2183	1275	62	5139	365	0,000	4093	98,1
140	212885	2174	1204	106	5083	366	0,000	7488	96,6
160	195111	2166	1195	126	5129	364	0,000	4343	99
180	198147	2109	1243	173	5070	363	0,367	4537	96,4
200	209676	2210	1430	140	5197	368	6,27	4824	98,5
220	216668	2133	1239	202	5092	377	0,000	6359	90,1
240	220593	2155	1233	121	5104	366	97,4	6527	99
260	202575	2157	1244	153	5150	365	0,000	4937	98,9
280	228095	2141	1220	213	4975	380	0,080	9271	96,4
300	208090	2156	1253	173	5127	363	0,293	5631	98,8
Média	202345	2173	1237	120	5159	367	6,96	5343	97,6
DP	14973	35,4	69,8	57,2	110	5,07	25,1	1675	2,33
DP %	7,4	1,63	5,64	47,9	2,13	1,38	360	31,4	2,38

**Tabela 9.** Efeito do número de cenários na solução ótima do problema totalmente robusto (redução 100%).

S	Custo	X	I <sup>+</sup>	I <sub>T</sub>	Y	Z	O	Δ	B%
20	224971	2145	1126	136	5216	367	0,000	0	97,1
40	220288	2182	986	173	5393	363	0,000	0	95,1
60	306397	2047	756	396	5152	361	0,367	0	93,8
80	313665	1949	791	532	4876	361	32,7	0	90,2
100	316446	2107	1206	289	5149	365	0,000	0	96,9
120	324906	2111	935	538	5052	365	5,13	0	96,4
140	373497	2115	1183	434	5000	365	8,17	0	93,9
160	306692	2092	1153	452	5092	365	0,550	0	96,4
180	417945	2040	1121	853	4980	363	0,978	0	93,8
200	344874	1971	1094	609	4929	394	21,4	0	92
220	392916	2054	973	693	5039	363	0,861	0	66
240	398801	2053	1091	770	4993	367	1,65	0	94,7
260	357361	2000	1411	706	5016	346	0,762	0	87,6
280	413469	1970	1119	617	4799	365	128	0	87,8
300	366070	2030	1260	574	4988	366	21,7	0	94
Média	338553	2058	1080	518	5045	365	14,8	0	91,7
DP	60417	67,8	171	208	144	9,47	32,9	0	7,73
DP %	17,8	3,3	15,8	40,2	2,85	2,59	222	0	8,42

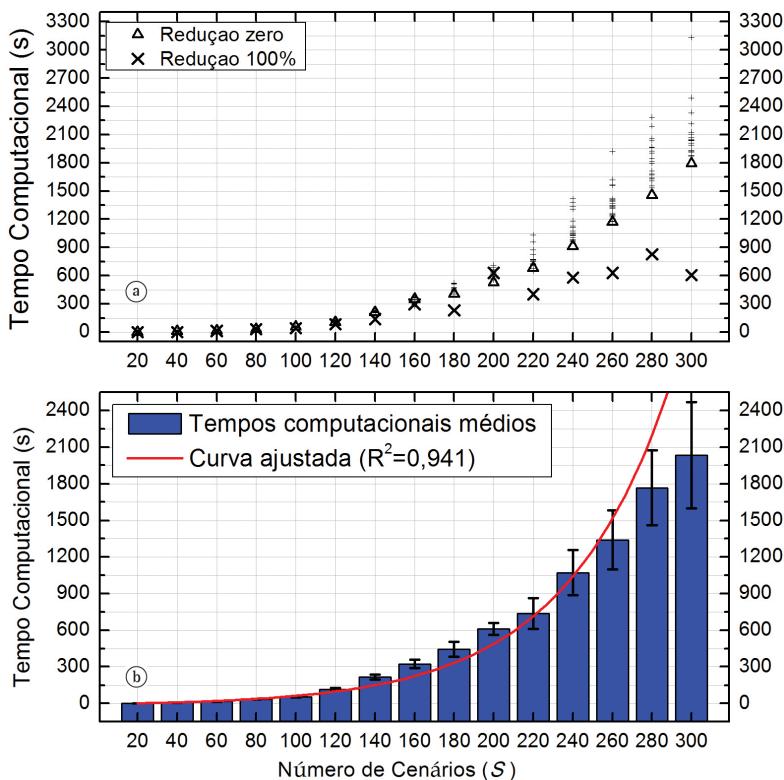


Figura 5. a) Acima: Tempos de resolução dos problemas robustos para todos os cenários e níveis de redução; b) Abaixo: Tempos computacionais médios dos problemas robustos, respectivos desvios padrão e curva ajustada.

computacional requerido para resolver exemplares com mais cenários, três curvas foram ajustadas aos pontos da Figura 5, uma linear, outra polinomial de ordem 2 e outra exponencial. Os ajustes  $R^2$  das curvas foram 0,54857, 0,9198 e 0,94054, respectivamente. Utilizando-se o ajuste exponencial (que explica 94% da variância nos tempos de solução), estimou-se que seriam necessários 20.000 s para resolver na otimalidade exemplares com 400 cenários. Testes adicionais com exemplares de 400 cenários mostraram que em 3.600 s de execução do algoritmo nenhuma solução factível foi encontrada para todos os níveis de redução do desvio.

## 5. Considerações finais

Neste trabalho foram desenvolvidos e analisados modelos de programação estocástica para o problema de planejamento da produção em empresas moveleiras na presença de demandas e tempos de preparação incertos. Os modelos foram testados em situações que refletem diferentes probabilidades da árvore de cenários. Em cada situação, moderada, equiprovável, otimista e pessimista, as probabilidades dos cenários favoráveis e desfavoráveis foram devidamente ajustadas.

Os resultados mostraram que as variáveis de decisão de primeiro e segundo estágios dos modelos não são sensíveis à variação das probabilidades, mas que os valores ótimos são, e, por esse motivo, deve-se atribuí-las com cautela. Os testes com o modelo com recurso restrito ilustraram o desempenho dos problemas à medida que a solução foi progressivamente tornando-se robusta, ou mais aversa ao risco, muitas vezes à custa de deteriorações significativas nos valores ótimos da função objetivo. Entretanto, em algumas situações, o “preço da robustez” não é elevado e é possível assegurar soluções aversas ao risco sacrificando pouco o custo total esperado. Em geral, tais soluções aversas ao risco ainda ocasionam maiores volumes de estoque e horas extras, ao passo que o nível de serviço é ligeiramente deteriorado. Vale a pena ressaltar que o modelo de recurso restrito fornece várias soluções baseadas no compromisso entre o custo total esperado e a redução da variabilidade das variáveis de recurso. Tais soluções alternativas não são identificadas pelos programas estocásticos neutros ao risco. Pesquisas futuras interessantes incluem o desenvolvimento de modelos robustos com aversão ao risco baseados em medidas de risco populares em otimização de portfólio, como *value-at-risk* (VaR) e *conditional value-at-risk* (CVaR).

## Referências

- Aghezzaf, E. H., Sitompula, C., & Najid, N. M. (2010). Models for robust tactical planning in multi-stage production systems with uncertain demands. *Computers & Operations Research*, 37(5), 880-889. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2009.03.012>
- Ahmed, S., & Sahinidis, N. V. (1998). Robust process planning under uncertainty. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 37(5), 1883-1892. <http://dx.doi.org/10.1021/ie970694t>
- Alem, D. (2011). *Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras* (Tese de doutorado). Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Alem, D., & Morabito, R. (2013a). Risk-averse two-stage stochastic programs in furniture plants. *OR Spectrum*, 35(4), 773-806. <http://dx.doi.org/10.1007/s00291-012-0312-5>
- Alem, D., & Morabito, R. (2013b). O problema combinado de planejamento da produção e corte de estoque sob incertezas: aplicação em fábricas de móveis de pequeno porte. *Gestão & Produção*, 20(1), 111-133. <http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2013000100009>
- Alonso-Ayuso, A., Carvalho, F., Escudero, L. F., Guignard, M., Pi, J., Puranmalka, R., & Weintraub, A. (2014). Medium range optimization of copper extraction planning under uncertainty in future copper prices. *European Journal of Operational Research*, 233(3), 711-726. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2013.08.048>
- Aouam, T., Rardin, R., & Abrache, J. (2010). Robust strategies for natural gas procurement. *European Journal of Operational Research*, 205(1), 151-158. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2009.12.015>
- Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming*, 88(3), 411-424. <http://dx.doi.org/10.1007/PL00011380>
- Birge, J. R., & Louveaux, F. (1997). *Introduction to stochastic programming*. New York: Springer.
- Beyer, H. G., & Sendhoff, B. (2007). Robust optimization: a comprehensive survey. *Computers Methods in Applied Mechanics Engineering*, 196(33-34), 3190-3218. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.03.003>
- Carnieri, C., Guillermo, A., & Gavinho, L. (1994). Solution procedures for cutting lumber into furniture parts. *European Journal of Operational Research*, 73(3), 495-501. [http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)90244-5](http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(94)90244-5)
- Dupacová, J., Consigli, G., & Wallace, S. W. (2000). Scenarios for multistage stochastic programs. *Annals of Operations Research*, 100(1-4), 25-53. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1019206915174>
- Foronda, S., & Carino, H. (1991). A heuristic approach to the lumber allocation and manufacturing in hardwood dimension and furniture manufacturing. *European Journal of Operational Research*, 54(2), 151-162. [http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(91\)90294-6](http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(91)90294-6)
- Geng, N., Jiang, Z., & Chen, F. (2009). Stochastic programming based capacity planning for semiconductor wafer fab with uncertain demand and capacity. *European Journal of Operational Research*, 198(3), 899-908. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2008.09.029>
- Gollmer, R., Neise, F., & Schultz, R. (2008). Stochastic programs with first-order dominance constraints induced by mixed-integer linear recourse. *SIAM Journal on Optimization*, 19(2), 552-571. <http://dx.doi.org/10.1137/060678051>
- Gramani, M., & França, P. (2006). The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research*, 174(1), 509-521. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2004.12.019>
- Guigues, V., & Sagastizábal, C. (2012). The value of rolling-horizon policies for risk-averse hydro-thermal planning. *European Journal of Operational Research*, 217(1), 129-140. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2011.08.017>
- ILOG. (2008). *Solver CPLEX*. New York: IBM. Recuperado em 20 de junho de 2012, de <http://www.ilog.com/products/cplex/>
- Jia, Z., & Ierapetritou, M. G. (2004). Short-term scheduling under uncertainty using MILP sensitivity analysis. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 43(14), 3782-3791. <http://dx.doi.org/10.1021/ie0306731>
- Kall, P., & Wallace, S. (1994). *Stochastic programming*. New York: Wiley.
- Khor, C. S., Elkamel, A., Ponnambalam, K., & Douglas, P. L. (2008). Two-stage stochastic programming with fixed recourse via scenario planning with economic and operational risk management for petroleum refinery planning under uncertainty. *Chemical Engineering & Processing*, 47(9-10), 1744-1764. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cep.2007.09.016>
- Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management Science*, 37(5), 519-531. <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.37.5.519>
- Kuhn, S., & Schultz, R. (2009). Risk neutral and risk averse power optimization in electricity networks with dispersed generation. *Mathematical Methods in Operations Research*, 69(2), 353-367. <http://dx.doi.org/10.1007/s00186-008-0264-3>
- Laguna, M. (1998). Applying robust optimisation to capacity expansion of one location in telecommunications with demand uncertainty. *Management Science*, 44(11), 101-110. <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.44.11.S101>
- Lai, K. K., & Ng, W. L. (2005). A stochastic approach to hotel revenue optimization. *Computers & Operations Research*, 32(5), 1059-1072. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2003.09.012>
- Lai, K., Wang, M., & Liang, L. (2007). A stochastic approach to professional services firms' revenue optimization. *European Journal of Operational Research*, 182(3), 971-982. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2006.09.038>
- Leung, S., & Wu, Y. (2004). A robust optimization model for stochastic aggregate production planning. *Production Planning & Control*, 15(5), 502-514. <http://dx.doi.org/10.1080/09537280410001724287>
- Leung, S., Tsang, S., Ng, W., & Wu, Y. (2007). A robust optimization model for multi-site production planning problem in an uncertain environment. *European Journal of Operational Research*, 181(1), 224-238. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2006.06.011>
- Li, Z., & Ierapetritou, M. G. (2008). Robust optimization for process scheduling under uncertainty. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 47(12), 4148-4157. <http://dx.doi.org/10.1021/ie071431u>

- Ma, Z., Kwon, R. H., & Lee, C. G. (2010). A stochastic programming winner determination model for truckload procurement under shipment uncertainty. *Transportation Research Part E*, 46(1), 49-60. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tre.2009.02.002>
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. New York: John Wiley & Sons.
- Morabito, R., & Arenales, M. (2000). Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company. *International Journal of Production Research*, 38(12), 2725-2742. <http://dx.doi.org/10.1080/002075400411457>
- Mulvey, J., Vanderbei, R., & Zenios, S. (1995). Robust optimization of large scale systems. *Operations Research*, 43(2), 264-281. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.43.2.264>
- Pan, F., & Nagi, R. (2010). Robust supply chain design under uncertain demand in agile manufacturing. *Computers & Operations Research*, 37(4), 668-683. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2009.06.017>
- Pousinho, H., Mendes, V., & Catalão, J. (2011). A risk-averse optimization model for trading wind energy in a market environment under uncertainty. *Energy*, 36(8), 4935-4942. <http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2011.05.037>
- Pousinho, H., Mendes, V., & Catalão, J. (2012). Scheduling of a hydro producer considering head-dependency, price scenarios and risk-aversion. *Energy Conversion and Management*, 56, 96-103. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enconman.2011.11.020>
- Rangel, S., & Figueiredo, A. G. (2008). O problema de corte de estoque em indústrias de móveis e pequeno e médio portes. *Pesquisa Operacional*, 28(3), 451-472. <http://dx.doi.org/10.1590/S0101-74382008000300004>
- Rosenthal, R. (2008). *Gams: a user's guide*. Washington: GAMS. Recuperado em 20 de junho de 2012, de <http://www.gams.com/docs/> document.htm
- Santos, S. G., Araujo, S. A., & Rangel, M. S. (2011). Integrated cutting machine programming and lot sizing in furniture industry. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, 3(1), 249-266.
- Schultz, R., & Tiedemann, S. (2006). Conditional value-at-risk in stochastic programs with mixed-integer recourse. *Mathematical Programming*, 105(2-3), 365-386. <http://dx.doi.org/10.1007/s10107-005-0658-4>
- Shapiro, A., Dentcheva, D., & Ruszczynski, A. (2009). *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. Philadelphia: SIAM. <http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898718751>
- Suh, M. H., & Lee, T. Y. (2001). Robust optimization method for the economic term in chemical process design and planning. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 40(25), 5950-5959. <http://dx.doi.org/10.1021/ie0005147>
- Ukkusuri, S. V., Ramadurai, G., & Patil, G. (2010). A robust transportation signal control problem accounting for traffic dynamics. *Computers & Operations Research*, 37(5), 869-879. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2009.03.017>
- Vladimirou, H., & Zenios, S. (1997). Stochastic linear programs with restricted recourse. *European Journal of Operational Research*, 101(1), 177-192. [http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(95\)00370-3](http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(95)00370-3)
- Yan, S., & Tang, C. H. (2009). Inter-city bus scheduling under variable market share and uncertain market demands. *Omega*, 37(1), 178-192. <http://dx.doi.org/10.1016/j.omega.2006.11.008>
- Yu, C., & Li, H. (2000). A robust optimization model for stochastic logistic problems. *International Journal of Production Economics*, 64(1-3), 385-397. [http://dx.doi.org/10.1016/S0925-5273\(99\)00074-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0925-5273(99)00074-2)
- Zanjani, M. K., Ait-Kadi, D., & Nourelfath, M. (2009). Robust production planning in a manufacturing environment with random yield: a case in sawmill production planning. *European Journal of Operational Research*, 201(3), 882-891. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2009.03.041>

## Agradecimentos

Os autores agradecem os dois revisores anônimos pelos úteis comentários e sugestões. Esta pesquisa contou com apoio do CNPq e da Fapesp.

# Stochastic programming models in the production planning of furniture companies

## Abstract

This paper addresses a production planning problem that arises in small-scale furniture companies, where the demands and setup times of bottleneck operations are random variables that can be approximated by a discrete and finite number of scenarios that are weighted by their corresponding probabilities of occurrence. The problem is modeled under multiple scenarios via two-stage stochastic programming with recourse. To control the variability of the second-stage costs, we propose a restricted recourse model that generates a set of solutions that are less sensitive to the scenario changes because the variability is limited to a given tolerance. Numerical experiences indicate that, in some situations, risk-averse solutions with good service levels are not excessively expensive to obtain.

## Keywords

Production planning. Furniture industry. Stochastic programming. Risk-aversion. Restricted recourse.