Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Miranda, Isaías; Radford, Luis; Guzmán, José
Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación
Educación Matemática, vol. 19, núm. 3, diciembre, 2007, pp. 5-30
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación

Isaías Miranda, Luis Radford y José Guzmán

Resumen: En este artículo se analiza el proceso de producción de significados relacionado con la interpretación de una gráfica cartesiana sobre el movimiento de dos objetos (movimiento relativo). El análisis, centrado en el trabajo realizado por un grupo de tres alumnos de grado 10 (15-16 años) en una lección regular de matemáticas, es conducido dentro del marco de la teoría de la objetivación. De acuerdo con dicha teoría, los procesos de producción de significados se investigan a través de la interacción discursiva y la movilización de signos y artefactos que hacen los estudiantes. El aprendizaje del contenido conceptual en cuestión es visto como un proceso social de aproximación de significados subjetivos o personales a los significados histórico-culturales plasmados en la compleja semiótica del plano cartesiano.

Palabras clave: análisis de discurso, gestos, gráficas, procesos de producción de significados, semiótica, sentido, teoría de la objetivación.

Abstract: This article deals with processes of meaning production in the interpretation of Cartesian graphs related to problems of relative motion. The investigation, centred on the work of a group of three grade 10 students (15-16 years old) in a regular mathematics lesson, is carried out after the theory of knowledge objectification. In accordance with this theory, the processes of meaning production are investigated through the students' discursive interaction and sign-and artifact-use. The learning of the mathematical conceptual content is considered as an activity-situated progressive process in the course of which the students' personal senses move towards the historically constituted cultural senses embedded in the complex semiotics of the Cartesian plane.

Keywords: discourse analysis, gestures, graphs, processes of meaning production, semiotics, sense, theory of knowledge objectification.

Fecha de recepción: 13 de octubre de 2007.

INTRODUCCIÓN

La manera en la que estudiantes de distintos niveles de escolaridad representan el movimiento de objetos, tanto por medio de gráficas cartesianas como a través de dibujos, ha sido una labor que varios investigadores han realizado en educación matemática (Clement, 1989; DiSessa, Hammer, Sherin y Kolpakowski, 1991; Nemirovsky, 1994; Nemirovsky, Tierney y Wright, 1998; Sherin, 2000; Doorman, 2005).

De las investigaciones de DiSessa *et al.* (1991), Sherin (2000), Nemirovsky (1994) y Nemirovsky *et al.* (1998), se puede inferir que, para el estudiante novicio, el estudio de fenómenos relacionados con el movimiento no es una tarea fácil de llevar a cabo. De estos estudios se desprende que la utilización de gráficas cartesianas y fórmulas algebraicas en la investigación del movimiento requiere la comprensión del funcionamiento de una forma cultural de descripción gráfico-visual que subraya tanto aspectos cualitativos como cuantitativos del movimiento a través de una semiótica compleja que está lejos de ser transparente para el alumno.

La manera de dar cuenta del uso e interpretación de gráficas que hacen los estudiantes supone, naturalmente, la adopción de una postura epistemológica que permite la interpretación que se hace del trabajo del alumno. La investigación de DiSessa, por ejemplo, se basa en una epistemología en la que la relación sujeto-objeto está centrada en gran medida en el papel que desempeña el problema físico o matemático. Dentro de esta epistemología, un problema "bien" escogido y diseñado debería llevar al alumno al conocimiento científico. En las conclusiones de un artículo en el que se informa la manera en la que niños y jóvenes inventan una gráfica cartesiana, luego de haber experimentado movimientos en un entorno informático, DiSessa *et al.*, hacen la siguiente pregunta: "¿Pueden los niños inventar, en un sentido razonable, álgebra o la notación decimal?" Los investigadores responden de manera afirmativa: "Nosotros pensamos que la respuesta es sí, pero, claro, esto requiere más investigación. Por lo menos, hemos encontrado que la invención de gráficas es mucho más posible que lo que cabría esperar" (DiSessa *et al.*, 1991, p. 156). Desde el punto de vista didáctico, el problema del aprendizaje se reduce, por lo menos en gran medida, al diseño correcto de la actividad que será dada al alumno en clase. Desde esta perspectiva, llamada constructivista en cuanto "ésta implica a los propios estudiantes en la construcción de los significados de las representaciones dadas" (*op. cit.*, pp. 156-157), el problema es, pues, encontrar "las actividades que son a la vez apropiadas para el niño y, en un sentido genético, genuinamente científicas" (*op. cit.*, p. 119).

Aunque es indudablemente interesante, esta epistemología, en la que los autores dicen experimentar "con un constructivismo más profundo" (DiSessa *et al.*, 1991, pp. 156-157) que el constructivismo ordinario, deja de lado el problema de la interacción social y de los artefactos en la producción de significados de los alumnos.[1]

El propósito de este artículo es, justamente, indagar el proceso de aprendizaje relacionado con la interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento lineal de objetos en estudiantes preuniversitarios a partir de una perspectiva teórica de orientación semiótica, derivada de corrientes contemporáneas socioculturales de aprendizaje (la teoría de la objetivación). Dicha perspectiva teórica atiende el proceso de aprendizaje bajo el ángulo de la interacción social y la movilización de signos y artefactos por los estudiantes. Partiendo de una epistemología diferente, en ella se tematiza el problema del aprendizaje en términos no de construcciones cognitivas, sino de adquisición de conceptualizaciones culturales de producción de significados, adquisición que subraya la dimensión fenomenológica y semiótica en la experiencia sociomatemática del alumno.

Además de la introducción, el artículo se divide en cuatro partes. En la primera, se hace un resumen de las definiciones de aprendizaje matemático y pensamiento matemático que propone la teoría de la objetivación.[2] En la segunda parte, se menciona la metodología utilizada en la toma de datos; en la tercera, se muestra la actividad y se realiza el análisis de los datos; en la última parte, se presentan algunas conclusiones y observaciones finales.

APRENDIZAJE Y PENSAMIENTO EN LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN

La teoría de la objetivación, que se inspira en las investigaciones de tipo sociocultural desarrolladas por Vygotsky y colaboradores (Vygotsky, 1986; Vygotsky y Luria, 1994; Leontiev, 1993), sugiere una manera de teorizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, atendiendo, por un lado, la naturaleza histórica del saber vehiculado por la escuela y, por el otro, la manera en que ese saber es retomado por el alumno en el curso de procesos sociales de producción de significados.

[1] No queremos decir que en aproximaciones como las de DiSessa *et al.* no exista interacción entre alumnos (incluso en las aproximaciones conductistas hay interacción). El problema es el *papel epistémico* que se le da a la interacción en la interpretación de la conceptualización científico-matemática del alumno.

[2] De hecho, son cinco conceptos los que fundamentan esta teoría. Para los propósitos de este artículo, sólo se revisan los conceptos de aprendizaje y pensamiento (véase Radford, 2006a).

La teoría se apoya en ciertos fundamentos de naturaleza ontológica y epistemológica. En cuanto al fundamento ontológico, alejándose de las ontologías realistas, la teoría de la objetivación ofrece una aproximación dentro de la cual los objetos matemáticos no son vistos como objetos independientes de la actividad humana, que gobernarían una realidad externa y cuyo "descubrimiento" sería el objetivo del proceso científico. Sin negar el hecho de que hay un mundo material que restringe el curso de la interpretación que los individuos hacen de ese mundo (Eco, 1999), la teoría de la objetivación subraya el hecho de que esa interpretación puede tomar senderos distintos y llevar a formas culturales diferentes de teorización del mundo (Radford, 2008a). De esa cuenta, los objetos conceptuales son generados por los individuos en el curso del desarrollo históricocultural: como hemos sugerido anteriormente, éstos "son patrones fijos de actividad reflexiva [...] incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos" (Radford, 2006a, p. 111).

El fundamento epistemológico de la teoría mencionada caracteriza la manera en la que los objetos matemáticos son conocidos por los individuos. En la teoría de la objetivación, el conocimiento de los objetos matemáticos no es el simple resultado de una construcción o reconstrucción más o menos viable que resultaría de las acciones de adaptación ejercidas por el alumno frente a un problema o situación. Para la teoría de la objetivación, la teleología del saber va más allá de la viabilidad y la adecuación de la acción, pues reconoce que tanto la conformidad con una hipótesis como los criterios de optimización de una estrategia están enmarcados en tradiciones culturales de acción y reflexión sobre el mundo. En otras palabras, la teleología del saber matemático no queda agotada por la situación que ha podido darle origen, pues la concepción de la misma situación ha sido posible únicamente en cuanto parte de una manera (no necesariamente explícita) de plantear y buscar soluciones a dicho problema y que caracteriza lo que se entiende por evidencia, argumento válido, suficiente, etc. De esa cuenta, dentro de la teoría de la objetivación, el aprendizaje es visto más bien como una "adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémicoculturales históricamente formados" (Radford, 2006a, p. 105). Este aprendizaje no es una mera imposición o transmisión de contenidos conceptuales, sino que consiste en un esfuerzo por "*dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura*" (*op. cit.*, p. 113, cursivas del original).

Esta progresiva dotación de sentido en torno al objeto cultural que subyace en el aprendizaje es vista como un proceso social denominado *objetivación*, el cual presta el nombre a la teoría. "La objetivación es [...] ese proceso social de toma de conciencia progresiva [...] de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido" (Radford, 2006a, p. 116). El problema central de la teoría de la objetivación es dar cuenta de la manera en la que el individuo alcanza el saber cultural (Radford, 2002). Para ello, la teoría distingue dos fuentes básicas de producción de significados: el uso de artefactos y la interacción social (Radford, 2006a). Esto significa que, en la vía hacia el conocimiento, la relación sujeto-objeto está mediatizada no sólo por los artefactos, sino también por la presencia del Otro. La relación "Yo-Tú" (Buber, 1958), o en términos más generales la relación de alteridad "Yo-Otro" (Lévinas, 2006), viene a desempeñar un papel epistemológico junto con la relación sujeto-objeto (Radford, 2008b).

La posición adoptada respecto a la alteridad lleva a ver la interacción social no como mero juego de negociaciones de significados, sino como elemento constitutivo del saber cultural que se apropia el alumno. A diferencia de otras formas de actividad, en el aprendizaje hay una clara asimetría entre el experto (el maestro) y los alumnos (Bartolini Bussi, 1998). Dicha asimetría resulta del nivel de familiaridad con los objetos del saber en juego y lleva inevitablemente a configuraciones heterogéneas de distribución del saber en el aula. Sin embargo, la asimetría respecto al saber no quiere decir que las formas de distribución del conocimiento operantes en el aula deban ser vistas en términos de autoridad. Uno de los desafíos de las corrientes socioculturales es precisamente crear comunidades crítico-reflexivas en las que la adquisición de formas culturales de reflexión se traduce en el desarrollo y enriquecimiento de la conciencia y subjetividad del alumno (Radford, 2006b).

El uso de artefactos en el aprendizaje ha dado lugar a una serie de investigaciones recientes (véanse, por ejemplo, Falcade, Laborde y Mariotti, 2007; Guzmán y Kieran, 2002; Lagrange, 2000). La teoría de la objetivación sostiene que los artefactos son portadores de una inteligencia histórica, producida por la actividad cognitiva de generaciones anteriores. El artefacto (una calculadora, por ejemplo) no sólo induce una división de trabajo en la cual parte de la actividad es realizada por éste, sino que insinúa al alumno, a través de la inteligencia histórica de la que es portador, líneas posibles de desarrollo conceptual.

En general, en la actividad de aprendizaje, las dos fuentes básicas anteriores de producción de significados no operan de manera aislada. La teoría de la objetivación estudia dichas fuentes y su interacción en términos de los esfuerzos que hacen los alumnos por lograr "una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones" (Radford, 2003, p. 41). Todos estos medios a través de los cuales el alumno alcanza esas formas relativamente estables de conciencia del objeto conceptual la teoría los llama *medios semióticos de objetivación*.

El acceso a los objetos matemáticos se presenta, pues, en una actividad escolar determinada, cuyo proceso se caracteriza por la existencia de medios semióticos de naturaleza diversa que permiten hacer presentes (que objetivan) esos objetos.[3]

> [L]os procesos de producción de conocimiento se incluyen en sistemas de actividad que involucran otros medios físicos y sensuales de objetivación que el escrito (como las herramientas y el lenguaje) y que dan, también, una forma tangible y corpórea al conocimiento (Radford, 2003, p. 41).

Vemos pues que, en cuanto al fundamento epistemológico, la teoría de la objetivación se distancia de las teorías cognitivas desarrolladas en educación matemática (como el "constructivismo profundo" de DiSessa mencionado en la introducción), al identificar el aprendizaje de las matemáticas como un proceso constante de objetivación. En vez de emanar "de adentro", como en la metáfora constructivista de la "construcción" del saber por el sujeto o de las "representaciones mentales" de la psicología cognitiva, el significado emana "de afuera", es decir, del contexto y de la práctica social.

Por otro lado, desde el punto de vista ontológico, la objetivación hace que los objetos matemáticos no sean vistos como simples objetos trascendentales ni como objetos generados por una lógica racional de carácter universal, sino a través de un proceso históricocultural de labor humana. Ese objeto, que en el curso de la historia se convierte en patrón conceptual fijo (relativo a cierto momento histórico), aparece para el estudiante no como objeto platónico, sino como objeto incrustado en su cultura; se trata de un objeto conceptual y, por lo tanto, inaccesible directamente. Imposible de desvelársele en toda su plenitud de un solo golpe, éste aparecerá al alumno como resultado de acciones y reflexiones en actividades que requieren su movilización dentro de formas culturales de pensamiento.

Dentro de este contexto, la adquisición de las formas interpretativas de gráficas cartesianas en torno al movimiento se concibe, precisamente, como un proceso de aprendizaje, esto es, un proceso social de dotación de significados dentro de una actividad mediatizada por la interacción social, artefactos y signos de naturaleza diferente (símbolos matemáticos, lenguaje, gestos, etc.). Así pues, en lo que sigue,

[3] La dimensión metodológica en el análisis semiótico de la actividad de objetivación en estudiantes ha sido desarrollada en otros trabajos (véanse, por ejemplo, Radford, 2000; 2003; 2008c; Radford, Bardini y Sabena, 2007).

se pretende describir tanto la manera en la que los estudiantes dotan de sentido a las gráficas cartesianas como la manera en la que modifican sus interpretaciones a medida que las relacionan con el movimiento de objetos físicos en el curso de un encuentro social con el emergente objeto del saber.

METODOLOGÍA

La toma de datos se llevó a cabo con estudiantes de grado 10 (15-16 años) durante una clase ordinaria de matemáticas, en una escuela de la provincia de Ontario, Canadá. Los estudiantes estaban familiarizados con el uso de la calculadora graficadora TI-83+ y las aplicaciones que ésta permite con aparatos electrónicos como el Calculator Based Ranger, abreviado CBR™ (véase la figura 1).[4] El programa de matemáticas de este nivel educativo requiere que los estudiantes adquieran conocimientos del significado físico de la pendiente de una recta (velocidad).

Figura 1 El Calculator Based Ranger® (a la izquierda) es un artefacto concebido para estudiar los objetos en movimiento: a través de la emisión de ondas, el CBR recoge datos de su distancia al objeto en cuestión. Al conectarse a una calculadora gráfica (por ejemplo, TI-83+®, mostrada a la derecha), es posible obtener gráficas espacio-tiempo, velocidad-tiempo, etcétera

La recolección de datos fue precedida por el diseño previo de la actividad (véanse detalles abajo). El acopio de la información se realizó en cuatro fases: *1)* grabación de la actividad (esta grabación se realizó con cuatro cámaras de video de las discusiones de los estudiantes en el aula de clase en el momento de resolver la

[4] Una demonstración del funcionamiento del CBR puede verse en el sitio siguiente: http://education.ti.com/educationportal/sites/US/productDetail/us_cbr_2.html.

actividad); *2)* obtención de las hojas de trabajo de cada estudiante (si la actividad no había sido terminada en una sesión, las hojas de trabajo se recogían, se digitalizaban y se entregaban nuevamente en la siguiente sesión); *3)* trascripción del discurso de los estudiantes durante la solución de la actividad; *4)* análisis de videos de la interacción social y procesos de resolución de problemas.

LA ACTIVIDAD Y EL ANÁLISIS DE LOS DATOS

La actividad presentada a los estudiantes (actividad "Pedro y Marta", véase la figura 2) fue diseñada por un grupo de investigación dirigido por uno de los autores (L. R.), y forma parte de un estudio longitudinal de siete años que este grupo ha estado realizando con una cohorte de 25 alumnos. En el diseño de la actividad participaron los miembros del equipo de investigación y el profesor de la clase. La actividad "Pedro y Marta" fue la tercera de tres actividades consecutivas presentadas a los estudiantes en el lapso de una misma semana. Mientras que en las dos actividades previas, el movimiento fue referido a un punto fijo ("movimiento absoluto"), en esta actividad, los alumnos abordan por primera vez el problema de "movimiento relativo".

De acuerdo con la metodología seguida, los alumnos trabajaron en pequeños grupos (tres o cuatro miembros cada uno). En este artículo hacemos referencia solamente a uno de los grupos de la clase, compuesto por Maribel, María y Carla.[5]

El análisis de datos se basa en una concepción multimodal del pensamiento humano (Radford, Demers, Guzmán y Cerulli, 2003; Arzarello, 2006), de acuerdo con la cual el análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes sistemas semióticos movilizados durante la actividad (el sistema semiótico del lenguaje escrito, el del lenguaje hablado, el de los gestos, el de las acciones, etc.). En otras palabras, ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesteado por los estudiantes es analizado de manera aislada. Antes bien, estas formas de expresión se estudian como partes clave del proceso de objetivación.

En lo que sigue, presentamos algunos pasajes de la discusión de los alumnos.

[5] Los nombres son ficticios.

Dos estudiantes, Pedro y Marta, se colocan a un metro de distancia uno del otro. Ellos comienzan a moverse en línea recta. Marta, que está detrás de Pedro, tiene una calculadora con un CBR conectado. La gráfica obtenida se ha reproducido abajo. Describan el movimiento de Pedro y Marta para poder obtener tal gráfica.

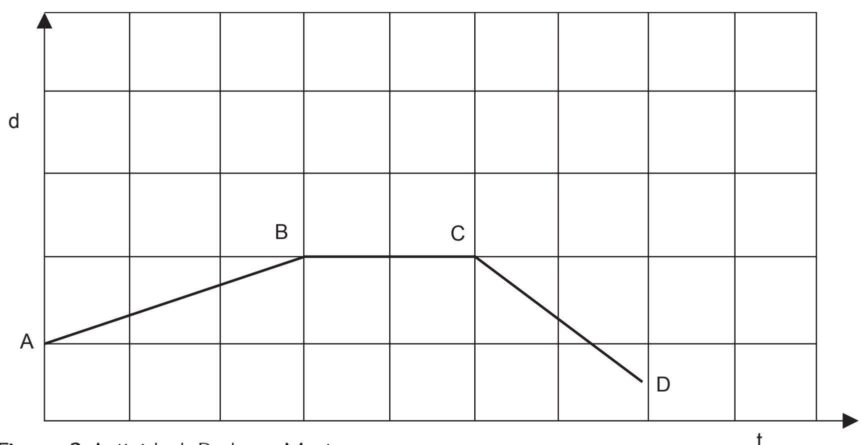

Figura 2 Actividad: Pedro y Marta

Las primeras interpretaciones de los alumnos

Fragmento 1 [15:27 a 16:44]

L1 Maribel: Entonces ahí [*desliza la punta de su bolígrafo sobre la recta AB*], él se mueve por... ¿tres segundos?
L2 María: Sí
L3 Maribel: Y entonces ahí... él...
L4 María: [*continuando la frase de Maribel*] Él se regresa en dos segundos [*mientras habla, desliza la punta de su bolígrafo sobre la recta CD; véase la figura 3, foto 1*].
L5 Maribel: Entonces ¿podemos decir que él se aleja de Marta por tres segundos? [*desliza la punta de su bolígrafo en línea recta sobre su mesa de trabajo, hacia su derecha*].
L6 Carla: Esto sería tres segundos y eso... eso sería dos...
L7 María: Esto sería dos.... Éste es tres...
L8 Maribel: Sí [*recapitulando las ideas anteriores dice*]. Él se aleja de Marta por tres segundos... y entonces, se detiene [*desliza su bolígrafo en línea recta hacia su derecha; véase la figura 3, fotos 2 y 3*], porque pudo haber botado algo por dos segundos, y regresa hacia Marta [*desliza la punta de su bolígrafo en línea recta sobre su mesa de trabajo, hacia su izquierda; véase la figura 3, fotos 4 y 5*] [...].
L9 María: Pero si ella camina con él, eso [*la interpretación*] no tiene sentido...

La primera interpretación que hacen los estudiantes de la gráfica dada se basa en la idea de "movimiento absoluto". Las rectas AB y CD son interpretadas como el movimiento de un solo objeto, conceptualizado en términos de alejamiento y de regreso: la gráfica expresaría, según los alumnos, el movimiento de Pedro quien, en su trayecto, se aleja de Marta, luego se detiene y, finalmente, regresa hacia ella. No es sino en L9 cuando María hace ver que Marta también se mueve, según lo indica el texto de la actividad. Incluir el hecho de que Marta se mueve, sin embargo, equivale a poner en tela de juicio la interpretación que las alumnas han forjado. Algo, dice María en L9, refiriéndose a la interpretación a la que ha llegado el grupo, no tiene sentido...

Por lejos que la interpretación de los alumnos se encuentre de la interpretación matemática esperada, ésta es el resultado *progresivo* de una actividad semiótica en la que se conjugan elementos perceptivos, quinesiológicos, gestuales,

Foto 1

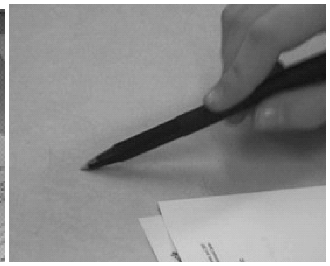

Foto 2

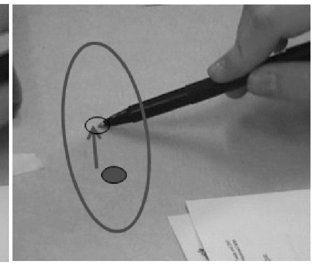

Foto 3

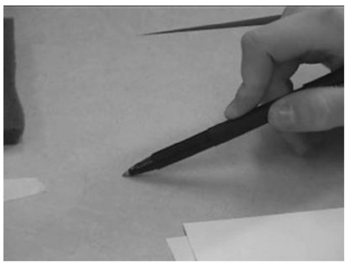

Foto 4

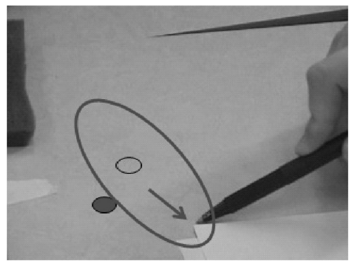

Foto 5

Figura 3 Fotos que muestran algunas acciones clave en el proceso de objetivación de los alumnos

simbólicos y verbales. Los *deslizamientos* de la punta de los bolígrafos a lo largo de las rectas AB y CD (L1 y L4), acompañados de las expresiones de movimiento "alejar", "detenerse", "regresar" son, en efecto, representaciones quinesiológicas calificadas a través de categorías lingüísticas del posible movimiento de Pedro.

La complejidad de la interpretación y de las dificultades que ésta presenta aparece claramente en la recapitulación que ofrece Maribel en L8: preguntándose si es posible que la recta AB signifique que Pedro se aleja de Marta, Maribel desliza la punta de su bolígrafo no sobre la recta AB, como lo hizo anteriormente (L1), sino sobre su mesa de trabajo (L5). El deslizamiento es una *simulación* de la posible trayectoria (línea recta) seguida por Pedro durante los primeros tres segundos de su movimiento. Éste está hecho en lo que podemos llamar el *espacio fenomenológico de evocación del movimiento*. Más tarde Maribel distingue la pausa de Pedro con un movimiento de su mano distinto del anterior. Aquí, Maribel desplaza el bolígrafo para denotar la *pausa*. En otras palabras, lo que se mueve en el deslizamiento hacia la derecha, que evoca la recta horizontal BC, no es Pedro sino el tiempo. A diferencia del anterior, este movimiento ocurre en un *espacio geométrico de representación*, en donde el transcurso del tiempo se representa a través de un segmento. Este último desplazamiento termina en un punto físico sobre la mesa, que designa un punto de ese espacio geométrico de representación. Dicho punto pierde su significado geométrico para convertirse ahora en el punto de partida del último gesto: uno que, como el primero, ocurre en el espacio fenomenológico de evocación del movimiento; a través del gesto, se imagina a Pedro yendo "de regreso" (figura 3, fotos 4 y 5).

Vemos ya, pues, cómo la interpretación que hacen los alumnos de la gráfica dada está enmarañada en por lo menos dos espacios: un espacio geométrico y el espacio fenomenológico de evocación del fenómeno. Como veremos más adelante, gran parte de la lucha de objetivación de los alumnos consistirá en articular de manera conveniente los significados propios de cada uno de esos espacios.

El siguiente fragmento continúa 20 segundos después del final del anterior.

Fragmento 2 [17:04 a 17:54]

L10 Maribel: Bueno, técnicamente, él camina más rápido que Marta... ¿verdad?

L11 Carla: No, puede ser que eso sea... puede ser que sea sólo la distancia entre... Bueno, tú no necesitas caminar más rápido que otro para tener un espacio [*al terminar su frase, Carla separa sus manos; véanse las figuras 4a y 4b*].

L12 María: No, porque ella [*Marta*]... camina con él [*Pedro*]; así que se puede que [...] ella camine... [*véase la figura 5*] él camine más rápido que ella [*desliza su bolígrafo sobre la recta AB de la gráfica*] [*Él*] se detiene [*señala los puntos B y C de la gráfica*].

L13 Maribel: [*interrumpiendo a María*] No, ellos están a la misma distancia...

L14 Carla: [*luego de una pausa, dice, con gran descorazonamiento*] ¡Aaaaah! [*sigue otra pausa*].

L15 Maribel: [*Señalando el punto B de la gráfica*] ¿Esto significaría que ellos están a la misma distancia?

L16 María: ¡No sé!... como... que están [*con dos dedos de la mano muestra una distancia, pero la palabra no llega a encontrar un expresión material*].

L17 Carla: [*luego de una pausa en la que las estudiantes se quedan en silencio*] Profesor, ¿puede venir aquí?

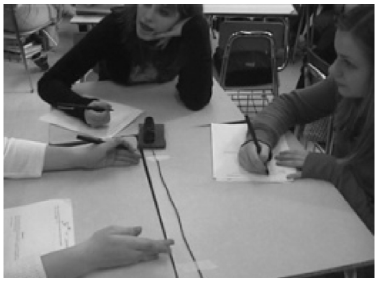

Figura 4a Carla separó sus manos para explicar que Pedro no necesita ir más rápido que Marta (L11)

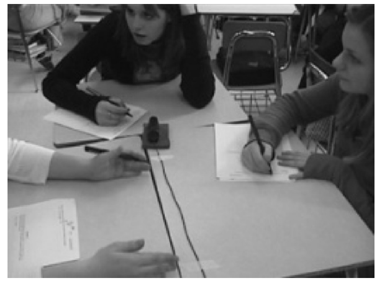

Figura 4b Carla movió sus manos, manteniendo la misma separación

La interpretación de la gráfica sufrió un cambio importante: ésta involucra ahora el comparativo "más rápido que", introducido por primera vez en la discusión en L10. Con este término comparativo, Maribel hizo que Carla se esforzara por justificar su interpretación según la cual la recta AB no significa necesariamente que Pedro camine con mayor rapidez que Marta. En su primera réplica (L11; figura 4a), Carla separó sus brazos a fin de justificar que el espacio entre los niños no se produce porque Pedro camine más rápido que Marta (Carla argumenta que, después de todo, puede haber un espacio entre dos personas sin que una de ellas camine más rápido que la otra). Con el movimiento sincrónico de sus dos manos, que ocurre en el espacio de evocación del movimiento, Carla insinuó luego (figura 4b), que este espacio se debe a que Pedro y Marta caminan *conjuntamente,* manteniendo la misma distancia entre ellos durante los primeros tres segundos de su trayecto.

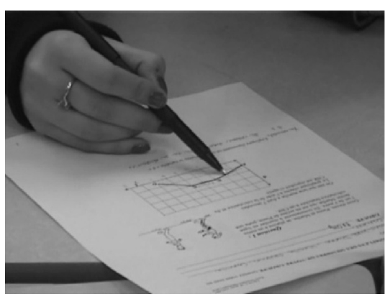

Figura 5 María desplaza la pluma de A a B, movimiento que indica el desplazamiento de Marta

Las réplicas de Carla introdujeron una nueva manera de interpretar la recta AB. A diferencia de un "alejamiento", como Maribel sugirió al final del fragmento 1, la recta AB fue interpretada como la caminata de Pedro *y* de Marta. En L12, María ofrece una explicación hipotética: "se puede que ella camine", acompañando la frase con un gesto en el que su pluma se mueve de A hacia B. Apenas está terminando su frase-movimiento cuando se da cuenta de que el sujeto de la frase no es Marta, sino Pedro: entonces corrige la frase (diciendo esta vez: "[se puede que] él camine") y repite el movimiento gestual que ocurre en el espacio geométrico de representación, cargado no obstante con las significaciones del espacio fenomenológico de evocación del movimiento. En efecto, el segmento AB es, a la vez, segmento en un plano de expresión geométrico de representación y descripción fenomenológica de movimiento. El significado que éste tiene como descripción fenomenológica es ambivalente: el segmento AB es visto como expresión del movimiento de Pedro y de la caminata conjunta de Pedro y Marta.

A la interpretación que hace María del segmento AB como movimiento, Maribel, en L13, ofrece una interpretación en términos de distancia. La incongruencia de las interpretaciones es recibida por Carla con una expresión de abatimiento (L14).

Respecto a la interpretación del segmento BC, ésta se topa, pues, con dos posiciones distintas de la manera en que Pedro y Marta caminan uno respecto del otro. Para María, Pedro se detiene (L12); para Maribel, Pedro y Marta "están a la misma distancia" (L13). Mientras que la primera interpretación apela a la velocidad, la segunda, a la distancia.

Dado el impase de la discusión, las estudiantes buscaron la ayuda del profesor.

Los fragmentos 3 y 4 son dos ejemplos de cómo las intervenciones del profesor contribuyeron a resolver la disyuntiva del equipo. Asimismo, se puede observar cómo las acciones realizadas por el profesor, durante esas intervenciones, aportaron nuevas formas de dotar de significado a la recta AB.

La intervención del profesor

Fragmento 3: [18:54 a 19:32]

L18 María: [*dirigiéndose al profesor*] La pregunta es si conservan un metro de espacio todo el tiempo [*separa su dedo índice y pulgar para indicar* *una distancia (figura 6a). Con esta separación, mueve su mano hacia los lados varias veces (figura 6b)*].

L19 Profesor: No lo sé. ¡Es una buena pregunta!

L20 Maribel: [*exponiendo al profesor su idea dice, mientras desliza la punta de su bolígrafo sobre la recta AB*] Eso [*el segmento AB*] explicaría por qué... como él va más rápido; podría ser que él vaya más rápido que ella [*señala los dibujos de Pedro y Marta*].

L21 María: [*interrumpe a Maribel y sigue la explicación*] Él camina más rápido que ella [*señala el dibujo de Marta*]. Y después se detiene.

L22 Profesor: Entonces, si hay uno [*un niño*] que camina más rápido que el otro, ¿la distancia entre los dos va a ser siempre la misma?

L23 Maribel: No, entonces él se aleja del CBR [*desliza la punta de su bolígrafo sobre la recta AB*] y entonces, ¿qué pasaría aquí? [*señala el segmento BC*].

L24 María: ¿Hace una pausa?

L25 Profesor: ¿Quién tiene el CBR?

L26 Maribel: La niña.

L27 María: [*al mismo tiempo que Maribel*] La niña [*señalando el dibujo de Marta*].

L28 Profesor: ¿Y el CBR camina también?

L29 Maribel: Sí.

En las primeras líneas, María y Maribel exponen al profesor las dos interpretaciones que formularon en el fragmento anterior. En su intervención (L20), Maribel hace ver, a través de un gesto como el efectuado por María en L12 (véase la figura 5), que el segmento AB explicaría que Pedro va más rápido que Marta.

Figura 6a María separa sus dedos para indicar una distancia constante entre Pedro y Marta (L18)

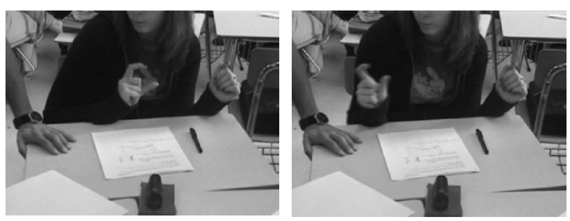

Figura 6b María mueve su mano de lado a lado manteniendo la separación entre sus dedos (L18) El movimiento de la mano significa "toda la marcha"

En su intervención (L22), el profesor hace una pregunta que retoma (de manera hipotética) la primera parte del enunciado de María en L21 ("Él camina más rápido que ella") para concluir que, según dicha suposición, la distancia entre los niños no puede ser constante. Evidentemente, en la medida en que la veracidad de la hipótesis no ha sido establecida, la conclusión no puede darse por sentada. Aunque no conclusiva desde el punto de vista lógico, la estrategia del profesor mueve las piezas discursivas de los alumnos dentro de lo que sería una nueva configuración conceptual de la cual podría esperarse una nueva vía de atacar el problema. Y, en efecto, la intervención de Maribel en L23 muestra que el significado del segmento AB pasa de uno basado en consideraciones de rapidez y movimiento a uno de distancias. Maribel introduce en el universo del discurso el artefacto CBR y, acompañando sus palabras con un gesto, dice: "él se aleja del CBR".

Sin embargo, las alumnas tienen todavía dificultades para ofrecer una interpretación global coherente de los segmentos AB y BC. En L23, Maribel pregunta: "y entonces, ¿qué pasaría aquí?", señalando el segmento BC. El profesor decide llamar la atención sobre el CBR y Marta, y el hecho de que el CBR posee dos características. Primero, que el CBR *mide la distancia*. Segundo, a través de una pregunta en la que metafóricamente el CBR es considerado como "objeto que camina" (L28), que en el problema *el CBR se encuentra en movimiento*.

El siguiente fragmento es la continuación del anterior:

Fragmento 4 [19:32 a 20:14]

L30 Profesor: Bien. Una pregunta que puede ser de ayuda para ustedes. Esto... A [*con un bolígrafo, encierra el punto A en un pequeño círculo (figura 7a)*]. Aquí A, ¿qué representa en la gráfica? [*el profesor desliza varias veces su bolígrafo entre el origen de coordenadas y el punto A*].

L31 María: A ella.

L32 Profesor: [*deslizando su bolígrafo entre el origen de coordenadas y el punto A (figura 7a)*] Este cero, aquí [*escribe el número cero en el origen de coordenadas del plano cartesiano (figura 7b)*]. Sólo vamos a hablar de distancia.

L33 María: Un metro.

L34 Profesor: Esto representa un metro, ¿verdad? [*desliza su bolígrafo entre el origen de coordenadas y el punto A (como lo hizo en L30; véase la figura 7a)*].

L35 María y Maribel: Sí.
L36 Profesor: ¿Un metro respecto de quién?
L37 Maribel: Del CBR.
L38 Profesor: ¿Del CBR?
L39 Maribel: ¿O de Pedro?
L40 Profesor: Bien. Eso [*el metro*] representa la distancia entre las dos personas [*señala el espacio que hay entre los dibujos de Pedro y Marta*].
L41 Maribel: Esto [*deslizando su bolígrafo sobre los segmentos*] representaría el movimiento de Pedro, y el CBR está a cero.
L42 María: [*interrumpe a Maribel*] Primero él, él se mueve más... [*desliza su dedo índice de manera horizontal a partir del punto A*].
L43 Maribel: ¡Ah!
L44 Profesor: Ella tiene el CBR, ¿verdad? [*simula tener el CBR en sus manos*].

Luego de su intervención en L44, el profesor dice "Ya no digo más", y va a discutir con otro grupo de alumnos.

A fin de continuar subrayando el hecho de que la interpretación de la gráfica debe tener en cuenta el movimiento de Marta, el profesor centró la atención en el significado del punto A (L30) de la gráfica, de tres diferentes formas: escrita [encerró el punto A en un círculo (figura 7a)], gestual [deslizó su bolígrafo entre el origen de coordenadas y el punto A (figura 7a)] y verbal ["¿qué representa (el punto A) en la gráfica?]. Además, el profesor resaltó la relación de este punto con el origen de coordenadas añadiendo el número cero a la numeración hecha por María en su hoja de trabajo (figura 7b). Estas acciones del profesor (por ejemplo, encerrar el punto A y añadir el número cero) son formas de objetivación de las posiciones de Pedro y Marta en el plano cartesiano.

Estas formas diferentes de objetivación a las que recurre el profesor para resaltar el punto A y el origen de coordenadas hacen presente un conocimiento no considerado con anterioridad por las estudiantes. En este caso, dicho conocimiento se refiere a la manera en la que puede ser analizada la recta AB a partir del punto A. Con los deslizamientos del bolígrafo en forma *perpendicular,* el profesor mostró cómo el punto A está relacionado con la *separación* inicial entre Pedro y Marta, descrita por el texto de la actividad. De hecho, cuando escuchó que María interpretó el punto A como si fuera Marta (L31), el profesor escribió el número cero en el origen de coordenadas (figura 7b) y destacó gestual y verbalmente que su pregunta se refería a la magnitud de la distancia entre el cero y el punto A (L40). Con su comentario: "sólo vamos a hablar de distancia", el número

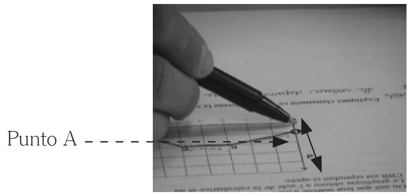

Figura 7a El profesor encerró en un círculo el punto A de la recta AB. La doble flecha indica la dirección de los deslizamientos del profesor (L30), entre el punto A y el origen de coordenadas

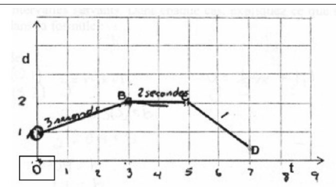

Figura 7b El número cero de la gráfica, encerrado por nosotros en un rectángulo, fue escrito por el profesor durante su segunda intervención (L32)

cero escrito en el plano y los movimientos de su bolígrafo, el profesor aclaró el siguiente aspecto importante en la discusión de los estudiantes: el punto A no es Marta.

Una vez que el profesor se aseguró de que las estudiantes relacionaron la distancia inicial de un metro con la separación entre el punto A y el origen de coordenadas, él hizo énfasis en que esa separación "representa la distancia entre las dos personas [Pedro y Marta]". El énfasis estuvo acompañado por un gesto deíctico que señaló el espacio existente entre los dibujos de Pedro y Marta. Las entonaciones gestual y verbal por parte del profesor son medios semióticos de objetivación que éste despliega, de una manera sutilmente articulada, para hacer visible a los alumnos la dimensión relativa con la que opera en este problema la variable distancia. Gracias a estos esfuerzos, en particular al gesto deíctico del profesor (L40), como las tres ocasiones en las que él deslizó su bolígrafo (L30, L32, L34; figura 7a), Maribel logra tomar conciencia, en un nivel de profundidad mayor, de que la recta AB significa el alejamiento de Pedro respecto de Marta.

Los efectos de la objetivación que facilitó el profesor fueron diferentes en cada uno de los alumnos. La actividad gestual, verbal y simbólica del profesor no es simplemente asimilada por éstos. La asimilación es imposible, simplemente porque los gestos, acciones y palabras del profesor pasan por la interpretación que de ellos hacen los alumnos. En la siguiente sección mencionamos algunos pasajes que muestran la manera en la que los alumnos prosiguieron su proceso de objetivación.

Después de la intervención del profesor

Después de que el profesor deja al grupo, las alumnas continúan la discusión de manera intensa, de la cual el siguiente diálogo es un corto extracto [20:46- 20:53]:

L45 Carla: Él se aleja de ella, se detiene, luego se acerca.
L46 Maribel: Pero ella lo sigue.
L47 Carla: [*casi al mismo tiempo que Maribel*] Ella lo sigue.
L48 Maribel: Entonces él va más rápido que ella, luego los dos conservan la misma distancia.

Como vemos en L45, al principio Carla aboga todavía por una significación del gráfico en la que la referencia no está a una distancia relativa. Aunque en la primera parte Carla incorpora a Marta de manera explícita ("Él se aleja de *ella*"), y en la tercera parte Marta parece ser mencionada implícitamente como el punto respecto del cual Pedro se acerca ("luego se acerca"), el segmento BC hace referencia a Pedro únicamente. Hay, pues, en la expresión de Carla el síntoma todavía vigente de la tensión que resulta de la imposibilidad de concebir los diferentes segmentos del gráfico como expresiones de distancias relativas. En L48, Maribel ofrece una explicación que supera esta dificultad. Aunque el segmento AB es expresado en términos de rapidez, la toma de conciencia previa del efecto de ésta en el aumento de la distancia hace (aun si no es sino indirectamente) presente la distancia, lo que hace coherente la interpretación de los segmentos AB y BC.

Más adelante, María hace un intento por incorporar el movimiento de Marta en el plano cartesiano, sugiriendo que debería haber otro gráfico debajo del gráfico dado. Este nuevo gráfico indicaría, según ella, la posición de Marta: "Cuando él [Pedro] está aquí [indicando un punto sobre el segmento BC], ella está aquí" [indicando un punto debajo del segmento BC]. Inmediatamente, Maribel procede a la recapitulación siguiente: "¡Un minuto! Tal vez él [Pedro] estaba a un metro [señalando el punto A], y fue más rápido; ahora está a 2 metros de distancia [deslizando en dirección vertical el lápiz del segmento BC a un punto sobre el eje del tiempo; véase la figura 8]; luego, estuvieron constantes [es decir, a velocidad constante], luego van más despacio. ¿Tiene sentido?"

La objetivación no es todavía perfecta. En la interpretación del segmento CD Maribel no especifica de qué manera Pedro y Marta van más despacio. La relatividad del movimiento cede su lugar a un movimiento descrito sincrónicamente, sin más detalle.

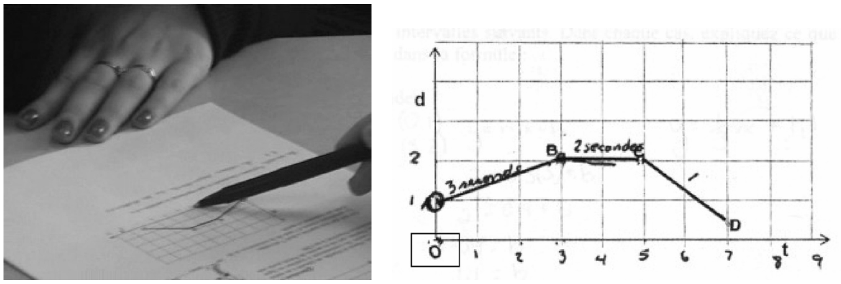

Figura 8 Maribel hace un gesto vertical que va de BC al eje del tiempo (el gesto ha sido marcado por nosotros con una flecha en la gráfica a la derecha). Este gesto evoca el del profesor (véase la figura 7a), hecho sobre el segmento OA

Al final, el texto que escriben las alumnas es el siguiente: “Pedro se aleja de Marta caminando más rápido durante tres segundos. Él está ahora a dos metros de ella. Ellos caminan a la misma velocidad durante dos segundos. Pedro reduce su velocidad durante dos segundos, por lo tanto se acerca a Marta.”

SÍNTESIS Y OBSERVACIONES FINALES

El análisis que hemos presentado muestra la evolución de los significados con los que tres estudiantes dotan a las diferentes partes de una gráfica que representa la distancia relativa entre dos individuos. De acuerdo con la manera en la que hemos planteado el problema del aprendizaje en la primera parte de este artículo, la *teleología* de la evolución de los significados no resulta únicamente de las características intrínsecas del problema por resolver. Un problema se plantea y se resuelve dentro de una tradición cultural dada y es solamente en esa tradición donde una solución puede llamarse óptima (D’Amore, Radford y Bagni, 2006).

Como se plantea dentro de la teoría de la objetivación, visto de la manera más general posible, la teleología de la evolución de significados resulta del adentramiento progresivo del individuo en formas culturales de pensamiento que movilizan los significados en cuestión. El acercamiento a los significados culturales se hace posible por la relación dinámica entre, por un lado, una práctica social, vehiculadora de dichos significados, y por el otro lado, la acción y reflexión del individuo que, al contacto con dicha práctica, le permite realizar progresivamente la lógica de los significados culturales. La evolución de significados queda marcada, pues, por: *1)* la actividad subjetiva de las acciones, interpretaciones, anticipaciones, etc.

que hacen los alumnos de los significados culturales que pone en movimiento la práctica social, y *2)* el funcionamiento de la práctica social (la práctica "enseñanza-aprendizaje"), guiada por una normatividad históricamente constituida. Es precisamente esta última la que permite reconocer la dimensión "matemática" dentro de la multitud de significados personales que producen los alumnos y que otorga al maestro márgenes de maniobra para encauzar los significados personales en la dirección de los significados culturales (véase Radford, 2006c).

La normatividad históricamente constituida que hemos mencionado no se limita únicamente al papel de reconocimiento del estatus epistemológico de los significados personales de los alumnos. La normatividad histórica que subyace en la práctica social opera igualmente en niveles no necesariamente discursivos. Se trata de mecanismos mostrados en la acción que quedan implícitos la mayor parte del tiempo y a través de los cuales se manifiestan las tradiciones culturales de acción y reflexión sobre el mundo. En el caso estudiado en este artículo, estos mecanismos no discursivos aparecen, por ejemplo, en la manera implícita en la que la práctica social escolar sanciona ciertos problemas como "interesantes" y la demarcación que dicha práctica introduce entre los procesos posibles de resolución e investigación de tales problemas (por ejemplo, la idea de que el estudio del movimiento puede ser realizado efectivamente por métodos gráficos, algo completamente impensable antes del siglo XIV dentro de las formas occidentales del saber). Detrás de la transformación de objetos culturales en objetos de conciencia yace, pues, una práctica social organizada a través de mecanismos discursivos y no discursivos que ejercen una especie de fuerza centrípeta que compensa y orienta las fuerzas centrífugas que resultan de la variedad de formas cognitivas posibles de pensar y teorizar el mundo.

En este artículo hemos abordado el problema de la transformación de los significados culturales en objetos de conciencia en términos de lo que hemos llamado procesos de objetivación. Como hemos dicho anteriormente, dichos procesos son mediatizados a dos niveles: socialmente, por la interacción con otros individuos e instrumentalmente, por los medios semióticos de objetivación. Dentro de este contexto, nuestro interés estuvo centrado en detectar los cambios en los significados de los alumnos respecto a la gráfica de un movimiento relativo, según estos dos niveles de mediatización. En el caso particular estudiado, el problema puede verse como la transformación de significados intuitivos, fenomenológicos o incluso matemáticos, en significados matemáticos más complejos. Naturalmente, mientras que una mirada experta reconoce en el plano cartesiano una variedad de posibilidades de descripción y de expresión de ideas, la mirada novicia interpreta los signos de manera idiosincrática o singular.

Las primeras interpretaciones de los alumnos pusieron en evidencia precisamente la movilización de interpretaciones que se movían en dos espacios diferentes. Por un lado, el espacio que llamamos *fenomenológico de evocación del movimiento* y, por otro, un espacio geométrico de representación en el que existen segmentos y otras formas geométricas y del cual el plano cartesiano viene a ser una de las maneras más complejas y sutiles de significar eventos (trayectorias, lugares, etc.). La comprensión progresiva del funcionamiento semiótico del plano cartesiano requirió la atribución de nuevos significados a objetos conocidos, como segmentos, en términos relacionales y relativos, en vez de absolutos o intuitivos. Hasta antes de la intervención del profesor, los alumnos pudieron elaborar, no sin dificultades, una interpretación de la gráfica en la que lo que ésta describe es el movimiento de Pedro (L1-L8). El primer fragmento termina precisamente con la observación de María, la cual pone de manifiesto la conciencia de cierta incongruencia en la primera interpretación obtenida: si Marta camina, la gráfica "no tiene realmente sentido". Las discusiones posteriores pueden ser vistas como el esfuerzo de los alumnos por incluir tanto a Pedro como a Marta en el razonamiento matemático. Aunque todavía no alineada con el significado matemático cultural, la interpretación de los alumnos se forjó a través de una actividad semiótica compleja, en la que gestos y expresiones lingüísticas, como "alejarse", "detenerse", etc. se conjugan para articular dicha interpretación. Vimos que, mientras el segmento AB es visto en términos de rapidez (véase, por ejemplo, la figura 5), el segmento BC es visto en términos de distancia. Ante la encrucijada en la que se encontraban y sin posibilidades de resolverla por ellas mismas, las alumnas acudieron al profesor. A través de gestos y palabras, éste llama la atención de los estudiantes sobre el significado de los puntos O y A, y de la distancia OA. El esfuerzo del profesor permite a los alumnos darse cuenta del significado de OA en el contexto del problema: la longitud del segmento OA es vista como la distancia entre Pedro y Marta al inicio de su caminata. La estrategia didáctica del profesor estuvo orientada a hacer presente a los alumnos el hecho de que el CBR, que es el artefacto que mide la distancia, no está fijo, sino que se mueve, en virtud del movimiento de Marta. En su segunda intervención (fragmento 4), el profesor resalta el significado de la variable distancia y la manera de leerla en el plano cartesiano (figura 7a). Esto lleva a un cambio en el modo de pensar el problema. Los gestos de los alumnos habían sido esencialmente gestos que expresaban movimientos (véanse, por ejemplo, las figuras 3 y 5). EL gesto del profesor abre la vía a la interpretación de los segmentos de la gráfica en términos de distancias. De manera similar, los gestos de los alumnos podrán, en adelante, hacer referencia a otra dimensión conceptual. El gesto indexical dinámico de Maribel en la figura 8 es, en efecto, una réplica sofisticada del gesto del profesor mostrado en la figura 7a.

La objetivación realizada por los alumnos es aún frágil, como lo muestra la continuación de este mismo episodio y de las lecciones de los siguientes días. Las objetivaciones de significados matemáticos, como fenómenos de formación de la conciencia que resultan de nuestra participación en prácticas sociales complejas, requieren, podemos conjeturar, periodos de estabilización y reflexión. Lo que es importante señalar es que esa objetivación no es el resultado de una simple asimilación de una práctica y de los significados que ésta moviliza; no es tampoco el resultado del quehacer de un individuo que cogita solo, sino un proceso social, en el que nuestra voz y nuestros gestos se enredan en las voces y gestos de los otros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F. (2006), "Semiotics as a Multimodal Process", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267-299.

Bartolini Bussi, M. G. (1998), "Verbal Interaction in the Mathematics Classroom: A Vygotskian Analysis", en H. Steinbring, M. B. Bussi y A. Sierpinska (eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 65-84.

Buber, M. (1958), *I and Thou*, trad. de Ronald Gregor Smith, Nueva York, Macmillan.

Clement (1989), "The Concept of Variation and Misconceptions in Cartesian Graphing", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 11, núms. 1-2, pp. 77-87.

D'Amore, B., L. Radford y G. Bagni (2006), "Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 29B, núm. 1, pp. 12-39.

DiSessa, A., D. Hammer, B. Sherin y T. Kolpakowski (1991), "Inventing Graphing: Meta-representational Expertise in Children", *Journal of Mathematical Behavior*, núm. 10, pp. 117-160.

Doorman, L. F. (2005), *Modelling Motion: From Trace Graphs to Instantaneous*

Change, disponible en http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2005-0311-094207/full.pdf (acceso en enero de 2007).

Eco, U. (1999), *Kant and the Platypus. Essays on Language and Cognition*, San Diego, Nueva York y Londres, Harcourt.

Falcade, R., C. Laborde y M. A. Mariotti (2007), "Approaching Functions: Cabri Tools as Instruments of Semiotic Mediation", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 66, pp. 317-333.

Guzmán, J., y C. Kieran (2002), "The Role of Calculators in Instrumental Genesis: The Case of Nicolas and Factors and Divisors", en A. D. Cockburn y E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Norwich, Reino Unido, vol. 3, pp. 41-48.

Lagrange, J.-B. (2000), "L'integration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 43, pp. 1-30.

Leontiev, A. N. (1993), *Actividad, conciencia y personalidad*, México, Cartago.

Lévinas, E. (2006), *Totalité et infini. Essai sur l'extériorité*, París, Livre de Peche.

Nemirovsky, R. (1994), "On Ways of Symbolizing: The Case of Laura and the Velocity Sign", *Journal of Mathematical Behavior*, núm. 13, pp. 389-422.

Nemirovsky, R., C. Tierney y W. Tracy (1998), "Body and Graphing", *Cognition and Instruction*, vol. 16, núm. 2, pp. 119-172.

Radford, L. (2000), "Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 42, núm. 3, pp. 237-268.

——— (2002), "The Seen, the Spoken and the Written: A Semiotic Approach to the Problem of Objectification of Mathematical Knowledge", *For the Learning of Mathematics*, vol. 22, núm. 2, pp. 14-23.

——— (2003), "Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-cultural Approach to Students' Types of Generalization", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 5, núm. 1, pp. 37-70.

——— (2006a), "Elementos de una teoría de la objetivación", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial, pp. 103-129.

——— (2006b), "Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective", en S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mérida, México, Universidad Pedagógica Nacional, vol. 1, pp. 2-21.

——— (2006c), "The Anthropology of Meaning", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 61, pp. 39-65.

——— (2008a), "Culture and Cognition: Towards an Anthropology of Mathematical Thinking", en L. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 2a. ed., Mahwah, NJ, Erlbaum (en prensa).

——— (2008b), "Beyond Anecdote and Curiosity: The Relevance of the Historical Dimension in the 21st Century Citizen's Mathematics Education", en *Proceedings of the 5th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education* (ESU-5), Praga, Univerzita Karlova v Praze (en prensa).

——— (2008c), "Why do Gestures Matter? Sensuous Cognition and the Palpability of Mathematical Meanings", *Educational Studies in Mathematics* (aceptado para publicación).

Radford, L., S. Demers, J. Guzmán y M. Cerulli (2003b), "Calculators, Graphs and the Production of Meaning", en N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME27 -PMENA25), University of Hawaii, vol. 4, pp. 55-62.

Radford, L., C. Bardini y C. Sabena (2007), "Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 38, pp. 507-530.

Sherin, B. (2000), "How Students Invent Representations of Motion: A Genetic Account", *Journal of Mathematical Behavior*, núm. 19, pp. 399-441.

Vygotsky, L. S. (1978), *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

——— (1986), *Thought and Language* (editado por A. Kozulin), Cambridge, MIT Press.

Vygotsky, L. S. y A. Luria (1994), "Tool and Symbol in Child Development", en R. Van der Veer y J. Valsiner (eds.), *The Vygotsky Reader*, Oxford, Blackwell Publishers, pp. 99-174.

AGRADECIMIENTOS

Los resultados presentados en este artículo provienen de un programa de investigación subvencionado por The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada/Le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

DATOS DE LOS AUTORES

Isaías Miranda
Université Laurentienne, Canadá, y Centro de Investigación
y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
isamiran@gmail.com

Luis Radford
Université Laurentienne, Canadá
lradford@laurentian.ca

José Guzmán
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional, México
jguzman@cinvestav.mx