Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Ferrero, María Martha; Ferraris, Cristina
Una propuesta innovadora de evaluación en geometría
Educación Matemática, vol. 20, núm. 2, agosto, 2008, pp. 91-102
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

NOTAS DE CLASE

Una propuesta innovadora de evaluación en geometría

María Martha Ferrero y Cristina Ferraris

Resumen: Describimos una modalidad de evaluación parcial, implementada en las materias Geometría Euclídea del Plano y Geometría Euclídea del Espacio del Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche, que permite superar su función como mera acreditación. El trabajo que realizarán los alumnos comienza con la asignación, por parte de la cátedra, de problemas individuales y colectivos; sigue con la presentación de las producciones, de manera oral y escrita, al cabo de una semana, y culmina con la acreditación. La puesta en práctica demanda la preparación y selección de problemas adecuados. Son características de esta modalidad de evaluación: tener en cuenta los tiempos del alumno para la apropiación del conocimiento, estimularlo a desarrollar tareas de investigación del tema por evaluar, atender el desempeño de habilidades de comunicación y la integración a la dinámica de la materia, sin provocar cortes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras clave: geometría, evaluación, proceso, comunicación, demostración.

Abstract: We describe a partial evaluation modality, implemented in the courses of Euclidean Geometry of the Plane and Euclidean Geometry of the Space, which are part of the Mathematical Education Studies of the Bariloche Regional University Center. This proposal of evaluation allows to overcome its function as mere accreditation. The work begins with the assignation to the students of individual and collective problems; then, after one week, follows the oral and written presentation of the student productions; and it culminates with the accreditation. The implementation of this modality demands the preparation and selection of problems. The characteristics of this modality of evaluation are: to consider students' appropriation time of the knowledge, to stimulate them to investigate about the subject to evaluate, to develop communication abilities and to be integrated to the dynamics of the subject, without causing cuts in the teaching-learning process.

Keywords: geometry, evaluation, process, communication, demonstration.

Fecha de recepción: 19 de noviembre de 2007.

INTRODUCCIÓN

La evaluación de la tarea es una etapa absolutamente necesaria en todo proceso de aprendizaje y la acreditación puede verse como su encuadre institucional a partir de la demanda social al organismo (escuela, universidad) que avala una certificación. En la práctica, la exigencia de la acreditación muchas veces provoca un corte en el continuo de la dinámica utilizada en el aula.

El propósito de este trabajo es describir una propuesta de evaluación que venimos implementando en los parciales de las materias Geometría Euclídea del Plano y Geometría Euclídea del Espacio en el Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche.

Con este modo de evaluación buscamos trascender la simple acreditación y realizar una evaluación más completa de la tarea desarrollada por los estudiantes, integrándola además a la dinámica de la asignatura.

Como marco de referencia o encuadre, damos también una breve descripción de la dinámica de trabajo en la asignatura y, por último, agregamos algunos comentarios sobre su implementación. En un anexo, presentamos las opiniones de estudiantes que participaron en la experiencia.

MARCO DE LA PROPUESTA Y CONSIDERACIONES INICIALES

La modalidad de evaluación que describimos en este trabajo se realiza en el marco de las asignaturas que tratan la Geometría Métrica, ubicadas en el segundo y tercer año del profesorado, por lo que señalaremos algunas características previstas en la programación de éstas:

- Las materias a las que hacemos referencia se dictan exclusivamente en el profesorado (esto es, no en la licenciatura) de Matemáticas, razón por la cual sus características son específicas de éste, atendiendo al doble papel que desempeñan los alumnos: son estudiantes y, como tales, deben apropiarse de un cuerpo teórico y de un modo de trabajo propio de la matemática, pero también son futuros docentes y deben enfrentar los desafíos de la comunicación de las ideas y prepararse para estar atentos a comprender el pensamiento de los otros.
- En el plan de estudio vigente, las materias Geometría Euclídea del Plano y Geometría Euclídea del Espacio son correlativas entre sí, están ubicadas

en segundo y tercer año, respectivamente, y después de un curso de álgebra. Lo primero permite aprovechar las posibilidades de la geometría para analizar cuestiones referidas al método matemático (contenidos procedimentales) como tipos de demostración, estrategias de demostración, contextualización temática e histórica, observación de regularidades, discusión de definiciones, etc. El estar después de un curso de álgebra da la posibilidad de implementar un enfoque actualizado de la geometría de Euclides a través de la utilización de la teoría de conjuntos y de grupos para el tratamiento de los contenidos conceptuales involucrados, en particular, de las transformaciones rígidas.

- Los objetivos de las materias atienden a: desarrollar y aprehender no sólo contenidos conceptuales sino también procedimentales, que hacen el proceso de obtención del conocimiento en Matemática; generar la actitud de "hacer" matemática, para el alumno como tal y como futuro profesor, ya que convierte a este último no sólo en un transmisor de conceptos y habilidades, sino en un artesano capaz de mostrar el método matemático; desarrollar una postura crítica que permita a los alumnos elaborar propuestas de los conocimientos obtenidos, facilitando la posterior transferencia a la escuela; movilizar la capacidad de elaborar estrategias para resolver problemas y permitir su posterior formalización.
- La metodología de trabajo en estas materias consiste en la introducción teórica de los temas por tratar, con participación de los alumnos en algunas discusiones sobre temas de interés (definiciones, orden de los conceptos tratados, axiomas, discusión de ejemplos, etc.) y en la posterior resolución de problemas, propuestos en una guía de trabajos. Para la resolución de problemas, se estimula la formación de grupos, a fin de promover el intercambio de información y la comparación de procedimientos; con el propósito de elaborar estrategias para la argumentación lógica y lograr un buen manejo de la demostración, se fomenta la discusión de definiciones, axiomas, conjeturas, etc., lo que permite trabajar los fundamentos de la geometría.

LA PROPUESTA DE EVALUACIÓN

Si tenemos en cuenta que la mayoría de los alumnos son capaces de resolver problemas más ricos y complejos si disponen de mayor tiempo para su resolución, para evaluar a los estudiantes elaboramos una modalidad con problemas que promueven la transformación, organización, reelaboración y reconstrucción de los conocimientos que se han desarrollado en clase, para lo cual se pauta una mayor disponibilidad de tiempo y la posibilidad de consultas a la cátedra.

Se trata de un trabajo que han de realizar los alumnos y que comienza con la asignación, por parte de la cátedra, de problemas individuales y colectivos; sigue con la presentación, de manera oral y escrita, de las producciones al cabo de una semana y culmina con la acreditación.

Se entrega a los alumnos un listado de problemas cuya resolución requiere la utilización de distintos recursos como analogías, comparaciones, elaboración de conjeturas sobre posibilidades, generalizaciones, etc., y, por último, la correspondiente justificación (¡demostración!). También se requiere, en la selección de los problemas, que impliquen una interpretación de la situación, la resignificación de sus componentes y el desarrollo de una estrategia que concluya en la meta.

Para cumplimentar la consigna, es necesario hacer uso del marco específico de la geometría métrica provisto por la cátedra, es decir, debe encuadrarse dentro de la axiomática euclídea. Cabe esta aclaración, pues muchos de los problemas que se proponen podrían resolverse mediante herramientas que provee, por ejemplo, la geometría analítica (utilizando coordenadas) y de hecho es posible que el alumno pueda recurrir a ella para la clarificación de la situación, pero, en la presentación, los resultados deben justificarse con la axiomática euclídea.

Consigna

Se provee a los alumnos de un listado de problemas, uno para cada uno de ellos y uno o dos para que los resuelvan todos (en el anexo se muestra un ejemplo de listado).

Respecto del problema particular, se hace responsable a cada alumno de resolverlo y, luego de una semana, defenderlo frente a sus compañeros y el equipo de cátedra. El listado completo de problemas se entrega a todos los alumnos con la finalidad de que cada uno pueda utilizar, eventualmente, alguna de las propiedades implicadas en un problema asignado a otro.

Transcurrida una semana, cada alumno debe realizar la exposición del problema individual, presenciar la exposición del resto de sus compañeros y presentar por escrito la resolución de todos los problemas a su cargo.

Para resolver los problemas, se pueden utilizar los resultados de los teoremas vistos en las clases teóricas, los que se encuentren registrados en el libro, los resultados de problemas de las prácticas, y, en el caso de la Geometría del Espacio, los teoremas de la Geometría del Plano. Más aún, se pueden utilizar también los ejercicios del listado que correspondan a otros compañeros, mientras quede asegurada la no circularidad de las demostraciones, es decir, un alumno puede utilizar el problema del compañero como resultado, siempre y cuando el compañero no haya utilizado el suyo para llegar a su demostración.

Preparación e investigación a cargo de los alumnos

Durante la etapa intermedia entre la asignación del problema y su exposición, los alumnos se enfrentan a los problemas y sus posibles dificultades para la correspondiente demostración. Esto los lleva a la reflexión acerca de éstos, la organización de los temas teóricos vistos hasta el momento, la eventual búsqueda en libros o Internet, las consultas entre pares, la fabricación de objetos que permitan la visualización de alguna propiedad, etcétera.

En esta etapa, los estudiantes pueden pedir asesoramiento a los docentes en cuanto a dudas, solicitar sugerencias o simplemente recibir supervisión de lo hecho, quedando a su propio criterio la decisión de continuar o abandonar un camino. Dadas las características de la evaluación, en nuestro trabajo como docentes es de particular importancia cuidar los límites en las respuestas.

Exposición o defensa del trabajo individual

Como se puede ver en la consigna, de ninguna manera se inhibe la interacción entre pares, sino que más bien se la incentiva. Es posible que el alumno llegue a la instancia de exposición oral influido por la mirada de los compañeros y equipo de cátedra, que pudieron contribuir al logro de la demostración solicitada. De este modo, la presentación contará con la elaboración personal y también con la apropiación de elementos de la interacción y de la reflexión acerca del proceso. Esto brinda confianza al expositor en cuanto a que las correcciones y redireccionamientos pudieron ya preverse y, posiblemente, solucionarse con anterioridad.

La presentación de lo trabajado al resto de los compañeros es el momento en el que el expositor devela la apropiación del conocimiento realizada en provecho de la resolución del problema y su capacidad de comunicarlo en el marco de la geometría.

Acreditación

La particularidad de la evaluación reside en que las habilidades individuales evaluadas tienen que ver con la elaboración total de la tarea, en cuanto a que se consideran la producción escrita, la claridad en la exposición oral, las respuestas a los comentarios de los compañeros, la capacidad de réplica ante un obstáculo no previsto que aparezca en la exposición, la utilización de material concreto, gráficos y dibujos que faciliten la comprensión del tema y la comunicación, etcétera.

La acreditación se logra atendiendo a la exposición de los estudiantes y, en el momento, se señalan de manera oral tanto las cuestiones que deben precisarse como las bien logradas. Se complementa de manera tradicional sobre lo entregado individualmente (problemas escritos, particulares y colectivos) y se señalan por escrito los errores y aciertos.

También se tiene en cuenta cómo los alumnos canalizan las demandas de información realizadas a la cátedra en la elaboración de sus propias estrategias y el grado de autonomía en la toma de decisiones respecto a las respuestas obtenidas.

Como responsables de la cátedra, en el caso de que consideremos que el alumno no alcanza los objetivos esperados, se le brinda una segunda oportunidad o "recuperatorio", que toma como modalidad el rehacer el problema, en el caso de faltarle precisiones, o realizar uno nuevo si no lo hizo o hizo muy poco de lo solicitado.

ALGUNOS COMENTARIOS Y REFLEXIONES

Hemos descrito la propuesta y queremos agregar algunos comentarios de su implementación, y algunas reflexiones sobre aspectos que deben tenerse en cuenta en el momento de reproducirla.

La idea de compartir esta experiencia de evaluación nace de haber observado que los alumnos muestran una mayor responsabilidad frente a su proceso de aprendizaje, asumiéndola como una etapa no sólo necesaria sino también productiva.

Por otro lado, este modo de evaluación resulta una manera de involucrar a los alumnos en el quehacer matemático, en el modo en el que se trabaja en esta ciencia, así como también para desarrollar habilidades de comunicación oral, utilización de pizarrón y otros recursos didácticos en vías de afirmar su futura actividad docente.

La puesta en práctica de esta modalidad demanda la preparación y selección de problemas adecuados para el despliegue de las habilidades que queremos lograr en el alumno, dentro de la temática acorde con los contenidos que corresponde evaluar, además de lograr un equilibrio en el nivel requerido a alumnos distintos.

Esto nos presenta a los docentes una nueva exigencia de ecuanimidad, ya que se puede optar entre asignar los problemas al azar o atendiendo a las individualidades.

En nuestra experiencia, hemos implementado ambas posibilidades mediante sorteo y de acuerdo con las "potencialidades" de cada alumno, garantizando siempre el mínimo de contenidos considerado para la aprobación. Dichas potencialidades se ponderan a criterio de la cátedra, teniendo en cuenta el desempeño de cada estudiante durante las prácticas, sus intervenciones durante los teóricos, su compromiso y gusto por la materia.

Muchas veces hemos implementado esta segunda opción en instancias de evaluación más avanzadas en el tiempo, teniendo en cuenta el despliegue realizado al comienzo. Sucedió en algunos casos que a alumnos que por sorteo les tocó un problema fácil en la primera evaluación, en el momento de la exposición mostraron gran potencial que, a nuestro criterio, se veía desaprovechado. También se ha dado la situación de que el problema asignado en la primera evaluación sobrepasa las demandas pretendidas respecto de un alumno y entonces se lo compensa en la segunda instancia, brindándole un problema de menor exigencia.

La idea es que movilicen todas sus capacidades para demostrar (en el sentido matemático de la palabra) y que las evidencien en el momento de la comunicación.

La elección de los problemas y su presentación a modo de consigna es una tarea que debe tener en cuenta diversos aspectos de los temas por evaluar, por ejemplo, adecuación de la consigna al elegir un problema clásico; elaboración del enunciado *ad hoc* a modo de problema, a fin de presentar un tema teórico que se quiere evaluar; decidir si la consigna se presenta como pregunta o como enunciado que hay que demostrar, etcétera.

Este modo de evaluación permite considerar todo un banco de problemas interesantes que requieren idas y vueltas, con cierta disponibilidad de tiempo, permitiendo la reorganización de los conocimientos, la aplicación de conceptos y la elaboración de herramientas y estrategias. Así, se tienen en cuenta los tiempos propios del alumno para la apropiación del conocimiento, estimulándolo tanto a desarrollar tareas de investigación del tema por evaluar como a desplegar habilidades de comunicación (véanse en el anexo las opiniones de los alumnos participantes).

La riqueza del marco conceptual provisto por la Geometría Euclídea, que se muestra fecundo en conceptos y ejemplos, nos brinda la posibilidad de implementar esta modalidad fuertemente centrada en lo procedimental. La actividad implicada en la resolución de problemas permite el desarrollo de habilidades de visualización (en la búsqueda de regularidades y particularidades en los ejemplos o en el reconocimiento de simetrías en los objetos); de razonamiento (por ejemplo: reconocimiento de puntos homólogos por una transformación rígida, de relaciones duales, de conexiones entre conceptos, de analogías entre plano y espacio, de estructuras algebraicas subyacentes) e, inclusive, de destreza manual en el caso del dibujo o de la construcción de modelos.

Por último, señalamos que con esta modalidad, la evaluación se ve integrada en la dinámica de la materia, en lugar de un corte en el proceso de enseñanza aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ferraris, C. (2004), *Programa de la Cátedra Geometría Euclídea del Plano,* Argentina, Centro Regional Universitario Bariloche, Universidad Nacional del Comahue.

——— (2005), *Programa de la Cátedra Geometría Euclídea del Espacio,* Argentina, Centro Regional Universitario Bariloche, Universidad Nacional del Comahue.

Ferrero, M. y C. Ferraris (2005), "Un modo de evaluación mediante 'problemas de demostrar'", Buenos Aires, Argentina, Comunicación oral V CAREM.

Hernández Fernández, H., J. Delgado Rubí y otros (1997), *Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior,* Rosario, Argentina, Homo Sapiens.

Polya, G. (1965), *Cómo plantear y resolver problemas,* México, Trillas.

Sanmartí, N., J. Jorba y V. Ibáñez (1999), "Aprender a regular y a autorregularse", en *El aprendizaje estratégico,* España, Santillana.

ANEXO

En este anexo se ilustra, con un ejemplo de listado de problemas, el nivel mínimo de exigencia, la variedad en cuanto a dificultades, la posibilidad de presentar enunciados abiertos, la manera en la que están redactados esos enunciados y cualquier otra cosa que pueda derivarse de los comentarios que realizamos anteriormente.

También agregamos las opiniones de los alumnos, surgidas de nuestro pedido de que manifestaran por escrito su experiencia, siguiendo un guión semiestructurado. Al respecto, podemos acotar que todos los participantes (6) se mostraron conformes y hasta positivamente efusivos con la modalidad, señalando también algunos puntos que hay que tener en cuenta. Los alumnos aparecen por las iniciales de sus nombres y hubo dos que contestaron juntos.

Un ejemplo de problemas propuestos en una evaluación parcial

Problema 1 (M): sean A y B dos rectas alabeadas. Probar que existe una y sólo una recta secante perpendicular a ambas, y el segmento determinado por los puntos de intersección es menor que cualquier otro que une dos puntos respectivamente situados en una y otra recta. Este segmento se llama distancia entre A y B.

Problema 2 (F): probar que los puntos que equidistan de dos planos secantes están en planos perpendiculares que contienen a los semiplanos bisectores de los cuatro diedros determinados por los planos.

Problema 3 (A): sea un diedro $\angle\alpha\beta$, ω bisector de $\angle\alpha\beta$ y $\pi \perp \omega$, π secante a la arista de $\angle\alpha\beta$. Probar que: $\pi \cap \omega$ es la bisectriz del ángulo plano determinado por la sección de π con el diedro. ¿Qué pasa si π no es perpendicular a ω?

Problema 4 (S): las seis rectas perpendiculares a las caras de un tetraedro por el circuncentro respectivo, que llamaremos *mediatrices* de éstas, tienen un punto en común que equidista de los cuatro vértices del tetraedro y al que llamaremos *circuncentro* (pues existe una esfera que lo tiene por centro y a la que pertenecen los vértices del tetraedro).

Problema 5 (J): probar que en el conjunto τ_π de transformaciones rígidas que dejan doble un plano π, para todo elemento existe otro (distinto) de manera tal que las respectivas restricciones al plano π coinciden, esto es:

$$\forall \mid T : E \mid \rightarrow E \text{ tal que } T(\pi) = \pi, \exists\, T' \,/\, T'(\pi) = \pi \text{ y } T' \,|_{\pi} = T \,|_{\pi} : \pi \rightarrow \pi$$

Problema 6 (V): Dadas tres rectas no coplanarias que pasan por un punto *o*, determinar ocho triedros, dos a dos opuestos por el vértice. Describir y nombrar dichos triedros.

a) probar que los semiplanos bisectores de los tres diedros de cada uno de los triedros concurren en una semirrecta, cuyos puntos equidistan de las caras del triedro;
b) describir el conjunto de todos los puntos que equidistan de las caras de los triedros originales.

Problema para todos 1: Determinar cuáles rectas, semirrectas o segmentos similares a los del triángulo se pueden definir en el tetraedro (alturas, medianas, mediatrices, bisectrices) e investigar sobre sus propiedades, incluidos demostraciones o contraejemplos, según corresponda.

Problema para todos 2: probar que el conjunto de transformaciones rígidas que dejan doble un subconjunto *F* cualquiera del espacio es subgrupo del grupo de transformaciones rígidas de éste. En particular, el conjunto de transformaciones rígidas que dejan doble el tetraedro regular lo es. Describir y dar todas las posibles imágenes (distintas) de una terna semirrecta, semiplano, semiespacio dada cumpliendo con la consigna (que aplique al tetraedro en sí mismo).

Sugerencia: para armar las distintas ternas, considerar como semirrecta la determinada por un par de vértices; como semiplano, el determinado por la recta que la contiene y el tercer vértice, y como semiespacio, el determinado por el plano que contiene a dicho semiplano y el cuarto vértice. Hallar el cardinal del subgrupo.

Algunas opiniones de los alumnos

M-A: Está muy bueno, porque de esta manera uno termina de "digerir" lo visto, ya que uno puede explayarse más sobre el tema si tiene ganas, cosa que en un parcial de 3 horas uno está presionado por el tiempo y no puede explayarse. Aparte, a la hora de la puesta en común es interesante estar al frente del aula y ver si los demás entienden o no, ver los distintos puntos de vista, teniendo en cuenta que vamos a ser profesores.

V: Me parece muy buena esta modalidad de parcial porque plantea un desafío propio. Los parciales te hacen pensar y te dan tiempo para ver y digerir el problema. Realmente hace que uno se las ingenie y utilice los conceptos fundamentales. Además, en la exposición te ayuda a aprender a manejar el pizarrón y a expresarte frente a otras personas como práctica para un futuro; y podés ver cómo piensan tus compañeros... capaz que uno habría resuelto de otra manera ese problema.

F: Es una modalidad muy original por parte de la cátedra, ya que en el resto de las materias no se usa esta forma de parcial. Pienso que está muy bien esta modalidad, porque nos tenemos que ir acostumbrando a exponer. Encaro el parcial muy tranquilo, ya que me dan el tiempo necesario para hacerlo y poder pensarlo y digerirlo muchas veces. Las ventajas que le veo a esta modalidad son que aprendés distintas maneras de demostrar y que te autoevalúas a la hora de explicarle a los demás.

J: Bueno... este... no sé cómo decirlo... lo que creo es que esto da la oportunidad de defender el parcial de cada uno. Además, nos da la práctica (o por lo menos un poco) en los pizarrones, que quizás muchos de nosotros no tenemos, me parece que no se podría implementar en todas las materias, pero en ésta calza bien.

También este alumno plantea una descripción en cuatro etapas sumamente ingeniosa y divertida (pero muy extensa, por eso no la reproducimos) a la que se enfrenta entre la asignación del problema y la exposición; las etapas las denomina: "caos", "aceptación", "encariñamiento" y "protección", haciendo explícito un fenómeno con el cual estamos familiarizados los que hemos llegado a la resolución de un problema difícil y que es la satisfacción de lo hecho y el "sentimiento de propiedad" sobre dicho problema.

S: Lo provechoso del parcial es que, como son todos problemas distintos y la resolución es personal, cada exposición nos enriquece y lamento a veces no haber participado. Nos acostumbra a explicar y defender lo que producimos.

Visualizar los errores y corregirlos. Ver otros modos de resolver un problema. Ampliar lo visto en teoría.

DATOS DE LAS AUTORAS

María Martha Ferrero
Profesora adjunta regular, Área Álgebra y Geometría, Centro Regional Universitario Bariloche, Argentina
mferrero@crub.uncoma.edu.ar

Cristina Ferraris
Profesora titular regular, Área Álgebra y Geometría, Centro Regional Universitario Bariloche, Argentina
cferrari@crub.uncoma.edu.ar