Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Cambriglia, Verónica
El carácter local de las expresiones literales en un aula de séptimo grado
Educación Matemática, vol. 20, núm. 1, abril, 2008, pp. 5-30
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40512063002

Cómo citar el artículo
Número completo
Más información del artículo
Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org
Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

El carácter local de las expresiones literales en un aula de séptimo grado

Verónica Cambriglia

Resumen: En este artículo consideramos la tensión existente entre el rol funcional de los acuerdos locales en una clase de matemática y el carácter convencional del lenguaje algebraico, en el marco de los procesos de generalización que tienen lugar en contextos socioculturales (e institucionales) de surgimiento de los objetos matemáticos. Numerosas investigaciones señalan e interpretan la tensión mencionada. Dialogamos aquí con algunas de ellas y abordamos el análisis de un caso de funcionamiento no tradicional de escrituras con letras en un aula de séptimo grado de escuela primaria. Nuestro análisis se centra en dos aspectos: por un lado, el abordaje de un sistema de funcionamiento, con su dinámica y leyes singulares respecto de las expresiones con letras; y por otro, el análisis de las rupturas que este sistema plantea en relación con el uso convencional de las escrituras algebraicas.

Palabras clave: generalización, prácticas algebraicas, escrituras literales, convencionalidad, acuerdos locales.

Abstract: In this article we consider the existing tension between the functional role of local agreements in a mathematics class and the conventional character of algebraic language, in the frame of the processes of generalization that take place in socio-cultural (and institutional) contexts emerging from mathematical objects. Many researchers show and explain such tension. We discuss here some of them and we also approach the analysis of a case of non-traditional functioning of writings in letters in a 7th grade classroom at the end of elementary school. Our analysis is focused on two aspects: on the one hand, we consider a functioning system with its dynamics and singular laws with reference to the expressions with letters; and on the other hand, the analysis of the ruptures that this system raises in relation to the conventional usage of the al-gebraic writings.

Fecha de recepción: 18 de diciembre de 2007.

Keywords: generalization, algebraic practices, literal writings, conventionality, local agreements.

INTRODUCCIÓN

Generalizar es una actividad central y permanente de los seres humanos. Generalizamos cuando nos referimos –con palabras– a objetos sin necesidad de tenerlos presentes; generalizamos cuando suprimimos detalles para guardar en nuestra memoria aspectos centrales que caracterizan a una clase de objetos, generalizamos cuando aprendemos, generalizamos cuando enseñamos.

Es también nodal en la actividad matemática. Reconocer objetos insertos en un conjunto o clase, ya sean estos objetos nociones matemáticas, procesos o problemas, supone tipificar, caracterizar, agrupar. Esta actividad, que exige definir un dominio de pertenencia, es el acto de generalizar.

Por tal acto, los objetos matemáticos cobran existencia: no son ni visibles ni palpables, sino más que a partir de las relaciones que los caracterizan. Para el sujeto, se convierten en objetos de conocimiento a partir de las múltiples significaciones que él les va atribuyendo, inserto en actividades sociales mediadas por símbolos, instrumentos, verbalizaciones, y se vuelven atrapables a partir de las diferentes representaciones que les dan apariencia.

En este contexto sociocultural de surgimiento de los objetos matemáticos, la noción de reflexividad introducida por las perspectivas interaccionistas permite estudiar la constitución interactiva de los significados de los sujetos en la cultura y de la cultura en los sujetos. Es importante señalar que, para esta perspectiva, el significado compartido no es algún tipo de intersección de las comprensiones individuales de los interlocutores; sino una interpretación –a menudo inconsciente– que les permite interactuar fluidamente y hacer predicciones acertadas sobre las acciones y movimientos de los demás. En palabras de Blumer: "El significado de una cosa [para mí] resulta de los modos en los que otras personas actúan [hacia mí] con relación a la cosa" (Blumer, 1969, citado en Sierpinska y Lerman, 1996, p.17).

El funcionamiento del individuo en este sistema se encuentra naturalmente tensado por las normas que la cultura elige mantener y transmitir, pero acordamos con Goodman que: "Uno podría decir que hay sólo un mundo, pero esto es cierto para cada uno de muchos mundos" (Goodman, 1984, p. 278).

En este sentido, en el marco de nuestra investigación hemos accedido a un caso de construcción local en torno a los significados de las expresiones (y de las letras en las expresiones) que los integrantes de una clase de 7º grado sostenían en un contexto de enseñanza de perímetros de figuras planas. Nos interesa aquí analizar, sobre este ejemplo, la tensión existente entre el rol funcional de los acuerdos locales y el carácter convencional del lenguaje algebraico.

Esta mutua sujeción entre las construcciones locales y culturales es considerada en numerosas investigaciones. Recortaremos aquí algunas de ellas que recuperan la tensión señalada, por un lado, en relación con aspectos específicos del trabajo algebraico como actividad de generalización; y por el otro, en relación con la "presencia" institucional de los objetos matemáticos.

DIÁLOGO CON OTROS AUTORES

Distintos autores abordan la temática de la generalización algebraica, específicamente el análisis de los procesos en torno a las producciones personales de los alumnos en un medio didáctico que impulsa o tracciona hacia la aparición de los aspectos convencionales del lenguaje algebraico. Luis Radford hace su análisis desde una perspectiva semiótica y sociocultural incorporando categorías y modelos de la lingüística (Radford, 2000, 2001, 2003). En este marco, interpreta los signos (letras, palabras, gestos) que los alumnos despliegan en tareas de elaboración del término general de una sucesión de figuras geométricas.[1] Gustavo Barallobres incorpora la problemática de la validación desde la perspectiva de la Teoría de Situaciones (Barallobres, 2007). Sostiene la fuerte hipótesis de que un trabajo sobre la validación de las fórmulas que modelizan una cierta situación constituye un espacio didáctico dentro del cual la herramienta algebraica sobrepasa su carácter de expresión simbólica, dando lugar al análisis sintáctico.

Radford caracteriza tres tipos de generalización: factual, contextual y simbólica.[2] Describe dichas generalizaciones en términos de esquemas operacionales

[1] El término corriente que utilizan Radford y otros investigadores para referirse a este tipo de tareas es *geometric-numeric pattern*.

[2] Radford establece esta caracterización sobre la base de una experiencia hecha con alumnos de grado 8 alrededor del problema que transcribimos aquí abajo:

La siguiente sucesión de figuras está construida con fósforos.

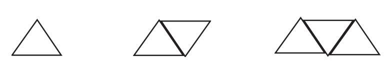


Figura 1 Figura 2 Figura 3

relacionados con los diferentes objetos, herramientas, verbalizaciones y signos[3] que los sujetos utilizan intencionalmente durante los momentos sociales de resolución, ya sea para alcanzar alguna forma estable de conocimiento, para transmitir sus intenciones o para llevar adelante las acciones que les permitan alcanzar la finalidad buscada.

Para este autor, las generalizaciones de tipo factual permanecen frecuentemente asociadas al nivel numérico y los esquemas operacionales se constituyen a partir de procesos de *semiosis perceptual*, es decir procesos relacionados con el uso de signos dialécticamente intrincados con el modo en que los objetos concretos son percibidos por el individuo. La estructura matemática de las sucesiones de figuras geométricas (como las de la actividad considerada en la nota 2) es manifestada por los alumnos mediante el uso de ciertos términos clave en las pronunciaciones, como los adverbios que denotan espacio y posición ("siempre", "el próximo"). Estos términos hacen posible recuperar la función del lenguaje que permite describir acciones potenciales que pueden ser reiteradas o la posibilidad de resaltar uno de los atributos de la sucesión de figuras, la proximidad. También asocia a este tipo de generalización recursos gestuales, como el ritmo de la pronunciación o el movimiento que acompaña la correspondencia entre palabras pronunciadas y escritas, permitiendo que estos gestos sustituyan a los adverbios antes mencionados.

Las de tipo contextual incorporan en sus argumentos objetos generales que se despliegan en zonas del discurso no completamente matematizadas. Se recurre a términos lingüísticos no simbólicos como "la figura" o "la figura siguiente". Esta práctica discursiva permite a los estudiantes focalizar su atención y extraer de un horizonte indiferenciado de objetos ciertos elementos que hacen aparentes nuevos objetos que están fuera de la percepción directa. Así, la expresión "la figura" no se refiere a "la figura 1" o a "la figura 2", sino a un representante genérico de la clase de las figuras del tipo de las mostradas en la actividad. En tal sentido, "la figura" cobra carácter de objeto general. Estos objetos quedan arraigados en el contexto a causa de su modo de existencia espacio-temporal,

a) Encontrar el número de fósforos necesarios para hacer la figura número 5 y la figura número 25.
b) Explicar cómo encontrar el número de fósforos necesarios para construir una figura dada.
c) Escribir una fórmula matemática para calcular el número de fósforos necesarios para hacer la figura número *n*.

[3] Radford denomina al conjunto de objetos, herramientas, signos, verbalizaciones *semiotic means of objectification* (Radford, 2001, 2003).

son abstractos y generales, pero son conceptualizados con referencia a la particularidad de la situación específica. En las formulaciones vinculadas a este tipo de generalización se incluye al interlocutor con pronombres personales y se lo involucra en una acción con los nuevos objetos matemáticos ["(tú) sumas la figura"]. El autor establece que el hecho de que los estudiantes sean exitosos con la puesta en danza de un esquema operacional que actúa sobre objetos abstractos, aunque contextualizados y situados, asegura el alcance de un nuevo nivel de generalidad. Señala que los objetos contextuales son construcciones que se hallan en la ontogénesis de los objetos algebraicos, pero estos últimos son atemporales, descontextualizados de la situación particular que modelizan y despersonalizados de los sujetos que los utilizan.

Las generalizaciones de tipo simbólicas se caracterizan por la inserción de un género de discurso basado en la voz impersonal. Referencias como "tu primera figura" se convierten en "*n*" y, en contraste con la generalización anterior, las pronunciaciones de los alumnos ya no hacen alusión a posesiones o acciones sobre las figuras, el discurso se vuelve despersonalizado y descontextualizado. Inicialmente, los símbolos algebraicos tienen para los alumnos una función primaria de abreviatura y permanecen asociados a acciones u objetos, pero su evolución hacia objetos matemáticos requiere la separación del contexto y la descentración del sujeto que los denota.

El análisis de Radford distingue, en las acciones que los alumnos despliegan en instancias de interacción, diferentes aspectos de lo general, vinculados ellos a la entonación de la voz, los términos que utilizan para dar cuenta de sus producciones, los gestos o signos que despliegan, el modo en que articulan dichos signos, etc. Esta modalidad de análisis nos permite pensar la actividad matemática y las conceptualizaciones posibles en los alumnos, asociadas a diferentes tipos de generalidad que son expresados mediante ciertos signos característicos. La caracterización de las particularidades del lenguaje algebraico pone en relieve su no naturalidad y permite pensar su genésis cultural imbricada con características de lenguajes contextuales y situados. En tal sentido, nos parece importante considerar los rasgos de cada clasificación como elementos para pensar el juego de interpretaciones y acciones que se dan en el marco de una comunidad de producción, siendo cuidadosos de no tomar los signos expresados como "síntoma" clasificatorio del tipo de generalidad que porta un alumno. El uso de la expresión "la figura" o de una letra no asegura que el alumno esté refiriéndose necesariamente a un objeto general. Desde la perspectiva del alumno puede haber particularidad en la letra y también en la expresión "la figura", aunque no explicite un número fijo para ella; del mismo modo que los números pueden ser usados para portar generalidad. Nos parece preciso mencionar también que cada una de las tres tareas planteadas a los alumnos por el autor[4] supone actividades matemáticas de diferente complejidad en relación con el tipo de generalidad, generalidad que es expresada (en los enunciados planteados) mediante diferentes signos. Esto nos induce a reflexionar respecto de dos cuestiones. Por un lado, en toda aula de matemática las formulaciones de los docentes y los problemas planteados se expresan necesariamente mediante signos que "insinúan" (para el que los introduce) generalidades diferenciadas y que obligan al interlocutor-alumno a interpretar e interactuar con ellos. Nos preguntamos sobre la zona de interacción discursiva entre los diferentes signos, cómo operan estos signos "desde lo externo" condicionando la generalidad de la actividad matemática desplegada por los alumnos y cómo se imprimen en dicha actividad las marcas de los signos más personales.

Por otro lado, la secuenciación de tareas planteada en la experimentación de Radford coincide con la organización frecuente que se plantea en las tareas de este tipo en escuela y libros. En cuanto secuencia, cada ítem tiene la intencionalidad de ser soporte del siguiente en términos de acceso a la generalidad. Cabría preguntarse si, desde la perspectiva del proceso de construcción de una fórmula general por parte de los alumnos, transitar el proceso necesario para resolver un ítem previo da elementos para soportar el proceso diferenciado –con respecto al tipo de generalidad– que plantea un ítem posterior. De igual manera, esta misma secuenciación es utilizada como soporte en las devoluciones orales que los docentes hacen a los alumnos enfrentados con la producción de una fórmula general. Es frecuente que, al presentar en el aula tareas del tipo del ítem *c* de la actividad planteada por Radford, el docente introduzca reformulaciones orales cercanas a los de los ítems *a* y *b* que remitan a números particulares o contextuales. Sería necesario indagar acerca del legítimo soporte de estas referencias que modifican y reorientan la complejidad de la actividad inicial en torno a lo general.

Radford advierte también que los signos que los estudiantes usan en sus primeras aproximaciones al lenguaje algebraico reflejan y se ciñen en torno a las acciones numéricas previas. Con frecuencia, los paréntesis reflejan para el alumno una pausa en sus acciones y las expresiones literales conservan el orden de la secuencia de cálculos realizados. De este modo, para los alumnos las expre-

[4] En la actividad *a* es necesario interactuar con figuras determinadas nombradas por la "posición" que ocupan, en la *b* con "una figura" (cualquiera) y en *c* con la figura que se ubica en la posición *n*.

siones $(n + 1) + n$ y $(n + n) + 1$ son diferentes y los símbolos n, 1, + y ( ) no están ligados arbitrariamente, lo que impide la realización de cálculos formales. Agregamos nosotros que el contexto, que aportó elementos para el surgimiento de variadas expresiones –para nosotros equivalentes–, restringe la posibilidad del alumno de asumir la transformación de una en otra en la medida en la que cada una de ellas representa el modelo de una situación diferente. La situación que ha sido modelizada es la secuencia de cálculos realizados por lo que se ha desplazado la situación original de cálculo que otorga sustento a la introducción de la noción de expresiones algebraicas equivalentes.

En tal sentido, en observaciones que realizamos en cursos de primer año de secundaria en el marco de nuestra investigación, hemos observado que, al enfrentarse los alumnos con la tarea de transformar expresiones en otras equivalentes, intentan argumentar la equivalencia a partir de buscar la secuencia de acciones de conteo –con las cuales produjeron su fórmula– en la nueva fórmula que quieren transformar. Los alumnos habían producido sus fórmulas a partir de la actividad 1 que transcribimos en el Anexo. La discusión colectiva sobre los diferentes modos de contar en el contexto geométrico, y sobre las fórmulas que esos modos habían generado, había provocado en los alumnos el convencimiento de que las fórmulas establecidas contaban bien. En tal sentido, se había convenido que se podía poner un igual entre esas expresiones que se mostraban diferentes. Luego de esto, sabiendo que se puede poner un igual entre ambas expresiones, la docente introduce la tarea de hacer transformaciones variadas sobre una de las dos ex-presiones igualadas para reencontrar finalmente la otra expresión. En el contexto de esta tarea, un alumno, que obtuvo $4n - 4$ a partir de sumar cuatro lados de un cuadrado cuyo lado tiene n cuadraditos y restar las puntas que se han superpuesto, al intentar transformar $2(n - 2) + 2n$ en $4n - 4$ trata de identificar en la expresión $2(n - 2) + 2n$ –tal cual está dada, sin transformación de ningún tipo– el proceso de sumar cuatro veces y restar.

Las acciones desplegadas en la producción de cada fórmula portan una secuencialidad que no hace posible pensar las secuencias de acciones como equivalentes, como tampoco su comparación. Lo que admite en todo caso una comparación es la elaboración resultante (en este caso el valor del conteo) al que se llega luego de llevar adelante cada uno de los procesos y, en caso de llegar a la misma elaboración, es posible analizar la eficacia y rapidez de cada secuencia de acciones para dar lugar a ese mismo producto. Notamos también que la tarea de transformar una expresión en otra que propone la docente se plantea en el plano de lo numérico; es necesario apelar a las propiedades de los números para transformar la expresión, conservando su denotación. Sin embargo, para algunos alumnos, esta actividad permanece arraigada en el contexto previo y es reformulada por ellos en el plano del conteo.

La noción de equivalencia para expresiones algebraicas se apoya en la potencia de las propiedades del campo numérico que permite expresar los números como el resultado de diferentes cálculos, pero ellas no expresan la temporalidad exigida por la realización efectiva de los cálculos, expresan todo sin tiempo o en un mismo tiempo.

Barallobres advierte que la herencia a la dimensión espacio-temporal del discurso contextual no es ajena a la función de expresión que la herramienta algebraica adquiere en el marco de las situaciones de expresión del término general. Agrega que el impedimento de realizar cálculos formales no puede atribuirse sólo a la dimensión espacio-temporal del discurso contextual, sino a la ausencia de una finalidad clara que oriente la actividad de realización de tales cálculos. Para él, el juego numérico y la exploración constituyen una vía para explotar, en el sentido de que permiten generar un espacio didáctico en el que la producción de la fórmula cobra sentido.[5] Asimismo, el contexto de la validación de las fórmulas ofrece condiciones para abordar el estudio sobre las transformaciones. En la medida en la que el contexto de producción se muestre limitado para argumentar acerca de la pertinencia de alguna fórmula, la existencia de otra fórmula ya validada se constituye en objeto de referencia. De este modo, la actividad se organiza en torno al análisis y la búsqueda de las relaciones –en la fórmula que se busca validar– con respecto a las relaciones que se perciben en la que ya ha sido validada. En tal sentido, la validación de las fórmulas constituye un espacio didáctico que ofrece lugar al análisis sintáctico. El planteo de Barallobres resulta un criterio para pensar la gestación de un entorno de interacción que proporcione condiciones de emergencia al análisis sintáctico; pero aun así nos preguntamos sobre las posibilidades de sostener –para el conjunto de las transformaciones– la constitución de un medio lo suficientemente fértil para dar lugar a variadas expresiones y que, a su vez, ofrezca resistencias para validar ciertas producciones, generando un espacio en donde la transformación resulte necesaria. En su investigación, el autor relata que, frente a la actividad de obtener el resultado de la suma de diez números consecutivos, un grupo de alumnos produce "un método" que funciona. Este método consiste en: *tomar el quinto de los diez números y yuxtaponerle un 5 al final*. Es decir, si los diez números son

[5] Véase en el Anexo la situación planteada por Gustavo Barallobres en su investigación.

13, 14, 15, 16, **17**, 18, 19, 20, 21, 22 el resultado de su suma será **17**5. Este grupo de alumnos utiliza este método para ganar, convencido de *que funciona bien* sin poder llegar a las razones que aseguran este buen funcionamiento en todos los casos. Es en el contexto de la discusión sobre la validez de las otras fórmulas producidas cuando este grupo accede a las razones, a partir de comprender las relaciones involucradas en la fórmula $10n + 45$ que había sido producida por otro grupo. Este episodio que él relata remite a un caso de comparación de un número "general" producido a partir de la observación de regularidades en sus cifras con una expresión algebraica que modeliza el resultado de la suma de diez números a partir del primero de ellos. En este hecho, esta última es la que aporta elementos para explicar las regularidades observadas y argumentar acerca de la eficacia del otro procedimiento que "arma" el número a partir de la yuxtaposición del quinto número y un 5.

Notamos, además, una diferencia importante entre las actividades seleccionadas por Radford y por Barallobres. A diferencia del contexto geométrico sobre el que se apoya Radford, Barallobres introduce el contexto numérico como el espacio en el que el cálculo brinda elementos para el surgimiento de las fórmulas. La fórmula, en el primer caso, es un elemento que sintetiza el conteo –sobre una figura o sobre una colección–, mientras que, en el segundo, es un elemento para calcular. Podríamos decir que en los contextos geométricos, la acción de contar impulsa una primera puesta en conexión entre la situación geométrica y el modelo numérico que sintetiza el resultado de un conteo, la fórmula sería, de este modo, una síntesis del modelo numérico con referencia a ciertas características del contexto geométrico; la validación de ésta (como así también de sus transformaciones) exigiría validar tanto si el modo de contar ha sido correcto[6] como si la representación numérica del conteo se generaliza bien con la expresión producida. En el caso de las actividades de cálculo propuestas por Barallobres, tanto la producción como la argumentación se desarrollan en el plano de lo numérico. Consideramos que ambos tipos de actividad ofrecen elementos para avanzar en el proceso de construcción de los alumnos en relación con la producción de fórmulas algebraicas. El conteo sobre un contexto geométrico resulta soporte para admitir que dos expresiones que se muestran distintas puedan ser iguales; las actividades de cálculo sobre un contexto numérico otorgan un espacio fértil para abordar las transformaciones de las expresiones algebraicas a partir de las propiedades de los números.

[6] En el sentido de controlar si cuenta todo lo que se desea contar.

La lectura de los autores citados nos ha permitido profundizar nuestra mirada respecto de las condiciones en las que se favorece o no el establecimiento, por parte de los alumnos, de la equivalencia de expresiones algebraicas. Ambos autores, aunque de diferentes maneras, llaman la atención sobre los obstáculos que plantea un alto nivel de contextualización de las escrituras producidas en la clase para comprender la equivalencia de expresiones a partir de transformaciones algebraicas.

En el ejemplo que analizaremos más adelante, las condiciones en las que se producen escrituras en un séptimo grado hacen imposible algún nivel de descontextualización para interpretarlas. Las lecturas de los autores referenciados nos han sensibilizado respecto de la importancia de estos procesos de descontextualización, cuya ausencia nos permite reconocer la distancia entre este funcionamiento local de las escrituras y el proyecto de entrada de los alumnos en prácticas algebraicas convencionales.

Retomando nuestro análisis de la tensión existente entre las construcciones locales y culturales, mencionamos a Mariana Bosch e Yves Chevallard, quienes, en el marco de la teoría antropológica, imprimen el carácter institucional en los objetos,[7] al considerar cómo condiciona el funcionamiento institucional a las interpretaciones de las diferentes formas de expresión de los objetos matemáticos (Bosch y Chevallard, 1999). Distinguen los objetos ostensivos de los no ostensivos. Los primeros son aquellos objetos que se perciben (se ven, se tocan, se oyen, etc.). Son materiales o dotados de cierta materialidad, como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos. Los no ostensivos son aquellos a los que se les atribuye una cierta existencia, pero no pueden verse ni mostrarse por sí mismos; su existencia es institucional. Los objetos ostensivos, al ser manipulados,[8] configuran los conceptos matemáticos en respuesta a ciertas tareas problemáticas en un entorno tecnológico-teórico. Al institucionalizarse, esta práctica establecerá el vínculo entre ostensivos y no ostensivos, permitiendo a los primeros evocar

[7] Desde la perspectiva de esta teoría, todo es objeto, distinguiendo tres objetos clave: *"las instituciones, los individuos* y las *posiciones* que ocupan los individuos en las instituciones. Al ocupar estas posiciones, los individuos se vuelven sujetos de las instituciones, sujetos activos que contribuyen a hacer vivir las instituciones por el hecho mismo de estar sometidos" (Bosch, y Chevallard, 1999, p. 83). La noción de *rapport* permite describir la existencia de los objetos, un objeto existe si existe un *rapport* a ese objeto, es decir, si un sujeto o una institución lo reconocen como objeto. El concepto de *rapport* reenvía a las prácticas sociales que se realizan en la institución y que ponen en juego el objeto en cuestión, así como lo que con él se hace (Bosch y Chevallard, 1999).

[8] Manipular es utilizado por los autores para todos los objetos ostensivos, sean gestos, escrituras o discursos.

o invocar a los segundos. Los autores postulan la coexistencia permanente y dialéctica entre objetos ostensivos y no ostensivos, lo que exige determinar las relaciones que entre ellos se manifiesten en una institución dada y en un momento dado.

El funcionamiento dialéctico que tiene lugar entre los objetos ostensivos y los no ostensivos se da en el interior del propio surgimiento de los objetos, es decir, que es esta misma dialéctica la que los constituye. Como mencionamos, los objetos no ostensivos son producto de la manipulación de objetos ostensivos, pero esta manipulación se encuentra, a su vez, regulada y condicionada por la existencia de objetos no ostensivos. En tal sentido, si bien los objetos ostensivos se relacionan con la percepción, no son puramente empíricos, hecho que aseguraría una existencia transinstitucional. Por el contrario, son producto de una construcción institucional y fruto de un aprendizaje, de este modo, las asociaciones entre ostensivos y no ostensivos a través de las cuales ellos se constituyen no son naturales, sino que tienen una intencionalidad institucional.

Bosch y Chevallard señalan que, frente a la separación frecuente que asocia "lo ostensivo" a los aspectos prácticos y "lo no ostensivo" a los aspectos teóricos, resulta importante señalar que la distinción entre los objetos ostensivos y los no ostensivos afecta a todos los elementos de un complejo compuesto de tipos de tareas, tipos de técnicas, discursos que describen y fundamentan dichas técnicas (tecnologías) y teorías que fundamentan, organizan y describen esos discursos. Complejo, cuya "activación" constituirá para esta teoría la actividad matemática y que permitirá, a su vez, modelizarla.

Por último, queremos rescatar la distinción que hacen los autores entre valencia instrumental y valencia semiótica de los objetos ostensivos. Los autores recuperan la perspectiva vigotskiana y plantean que los objetos ostensivos son considerados como instrumentos de la actividad, como entidades que permiten llevar a cabo ciertas tareas, realizar cierto trabajo. De este modo, reconocen en cada objeto ostensivo lo que denominan *valencia instrumental o instrumentalidad,* entendiendo en ello la instrumentalidad potencial que le otorga su naturaleza ostensiva y que lo hace apto para ser manipulado en diferentes actividades. Cabe aclarar que, finalmente, lo que lo define como instrumento concreto es su intervención en un conjunto de técnicas determinadas para realizar ciertas tareas también determinadas; pero esta instrumentalidad del objeto permanece abierta a otros usos y su rendimiento varía, en cuanto instrumento, en función de la actividad en la que se despliega. Por otra parte, la ostensividad de un objeto, su carácter perceptible, le permite funcionar como signo de otros objetos. Esta potencialidad del ostensivo de *significar* es nombrada por los autores como *valencia semiótica o semioticidad*. Al igual que la valencia instrumental, las actividades diferentes en las que se ponga en uso el objeto ostensivo concretan una semioticidad efectiva, lo que confluye en una valencia semiótica de los objetos que permanece abierta. Pero esta suerte de indefinición momentánea de la instrumentalidad y la semioticidad de un objeto se encuentra, de algún modo, controlada por el funcionamiento de los individuos en instituciones determinadas en un tiempo determinado.[9] Nos resulta importante el señalamiento que los autores hacen acerca de que la clase de matemática funciona como una institución en donde las actividades que se realizan evolucionan con mucha rapidez, generándose también a un ritmo acelerado variaciones locales de la instrumentalidad y semioticidad de los objetos ostensivos.

LA CONVENCIONALIDAD DE UN AULA DE SÉPTIMO GRADO

En el marco de nuestra investigación acerca de los procesos de generalización en matemática en la transición primaria-media, realizamos observaciones en un aula de séptimo grado. Dichas observaciones de ninguna manera pretendían caracterizar de modo general el funcionamiento de las escrituras en la institución primaria, sino más bien potenciar nuestra reflexión en relación con las condiciones en las que pueda tener lugar el surgimiento de escrituras en el aula y el valor instrumental y semiótico presente en las elaboraciones de los alumnos.

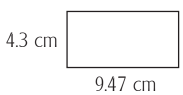
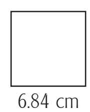
En este contexto de observaciones, accedimos un registro de escrituras en el pizarrón,[10] el cual tuvo lugar en el marco del estudio de perímetros de figuras geométricas. Estas fórmulas entraron en escena como herramientas para calcular, fundamentalmente a partir de problemas extra matemáticos en los que se necesitaba, de algún modo, obtener el perímetro de ciertas figuras. El docente, en

[9] "...los objetos ostensivos movilizados en las actividades humanas tienen una valencia instrumental y una valencia semiótica localmente estabilizadas en la historia de las instituciones, a veces durante un largo periodo de tiempo y en una amplia gama de instituciones. Pero, paradójicamente, su intervención en actividades determinadas tan pronto las estabiliza como las hace evolucionar, según si satisfacen necesidades de la actividad institucional o, al contrario, deben adaptarse a nuevas condiciones" (Bosch, 1994, p. 57).

[10] El maestro planificó este estudio a partir de la idea de medida y su objetivo central fue abordar las fórmulas de cálculo de área y perímetro de las diversas figuras. Dedicó gran parte del tiempo inicial al trabajo con unidades de medida y al repaso de ciertas características de las figuras geométricas a las que luego acompañaría con las fórmulas de área y perímetro.

charla con los alumnos, producía en el pizarrón una figura y anexaba las medidas que se daban como datos en el problema.

El docente no pretendió abordar la discusión en relación con la producción o validez de dichas fórmulas. En un contexto de diálogo, recuperó las formas verbalizadas por los alumnos para calcular el perímetro (estudiadas ya en años anteriores). La tarea planteada requería obtener el perímetro de figuras en las que se señalaban –sobre el dibujo– las medidas de los lados. El registro del docente en el pizarrón traduce las verbalizaciones a fórmulas simbólicas y acompaña dichas escrituras con el cálculo que resulta de la puesta en funcionamiento de esas fórmulas. Presentamos a continuación dos fragmentos del diálogo del docente con los alumnos a propósito de las fórmulas del perímetro del cuadrado y del rectángulo.

Intercambio respecto de la fórmula del perímetro del rectángulo	Intercambio a propósito del cuadrado
	
M: ¿Qué pongo, César?	M: ¿cómo sería el perímetro del cuadrado? ¿Cuáles son las características del cuadrado?
C: Lado por dos más lado por dos.	L: Lado por cuatro.
M escribe: Perim ▭ = *l* .2 + *l* .2	M escribe: Perim □ = *l* .4 Perim □ = 6.84 cm .4 Perim □ = 27.36 cm
M: y cambiamos por las medidas y lo resolvemos....	
M completa el registro del pizarrón Perim ▭ = *l* .2 + *l* .2 Perim ▭ = 4.3 cm .2 + 9.47 cm .2 Perim ▭ = 8.6 cm + 18.94 cm Perim ▭ = 27.54 cm	

El siguiente registro corresponde al registro final en el pizarrón, en él se recuperan fórmulas "charladas" con los alumnos y fórmulas traídas por el docente.

Figura 1 Escrituras en el pizarrón de séptimo grado

A partir de lo aprendido en años anteriores, los alumnos aportaron con sus discursos términos generales contextualizados en las figuras consideradas (por ejemplo, "*el lado*" o "*los lados paralelos*"). El docente tradujo estas formulaciones en una escritura con letras que matematiza en una escritura simbólica el relato traído por los alumnos. Relato que involucra elementos de las figuras y operaciones aritméticas entre ellos. Consideramos que estos términos generales, aunque contextuales, son cercanos a los que Radford identifica en su segundo tipo de generalización y exigen, para su correcta utilización, el reconocimiento de ciertas características de las figuras. Los alumnos se reservan información de las figuras que asocian a las letras que aparecen en las fórmulas. Por ejemplo, frente a la pregunta hecha a Tomás de por qué escribió $l.4$ y $l.2 + l.2$ al referirse al perímetro del rombo y al del paralelogramo, Tomás responde: "porque en éste (*se refiere a los lados del paralelogramo*) son iguales pero distintos".

De este modo, el docente de esta aula es quien, a partir de sus registros escritos en interacción con los relatos orales de los alumnos, habilita una escritura en la clase que roza la escritura algebraica pero permanece arraigada en las características del contexto. En este ámbito, Tomás admite que esa l (de la fórmula del paralelogramo) no vale lo mismo que la otra, regla que le permitirá un uso controlado de dicha escritura.

Nos interesa profundizar en el análisis de las escrituras asociadas a las fórmulas que se oficializaban en el aula de séptimo grado y de las reglas vinculadas al uso de las letras que se consolidaban. Este objetivo está directamente relacionado con el interés por estudiar el tránsito desde las prácticas que privilegia la escuela primaria, fundamentalmente aritméticas, a las prácticas algebraicas que la escuela secundaria pretende instalar. En este tránsito, queremos indagar acerca de los lazos entre las escrituras que se aceptan en séptimo grado y las tareas vinculadas a las escrituras que se proponen en primer año. A su vez, a partir de las observaciones realizadas en esta aula de séptimo grado, incorporamos en nuestra investigación dos objetivos solidarios con el mencionado previamente.

Por un lado, analizar las tareas de aproximación al lenguaje con letras propuestas por el docente de séptimo grado, con especial interés en las relaciones entre lo particular y lo general.

Por otro lado, estudiar diferentes funcionamientos, para los alumnos, de las fórmulas escritas que circulan en séptimo grado, en un contexto de tareas que incorpora la complejidad de las extensiones de operaciones aritméticas a operaciones de números con unidades.

Las escrituras que muestra el registro rompen con la convencionalidad aceptada en la matemática para el uso de las letras: **iguales letras no pueden referenciar datos distintos.** Parece importante subrayar que, en el contexto de este séptimo grado, se constituyó un entorno de significaciones –a partir de la actividad matemática desarrollada– en el cual los alumnos utilizaban correctamente las fórmulas de perímetro de figuras.

En este sentido, las escrituras consideradas portaban un valor semiótico central para los alumnos de séptimo grado. En el contexto de esta aula –entendida como institución– estos diferentes registros activaban diversos mecanismos de acción que confluían en el cálculo correcto del perímetro de las distintas figuras. Pero no hay ninguna razón constitutiva de la escritura $l + (l.2)$ que la asocie al concepto de medida del perímetro de un triángulo isósceles, más que el hecho de que, en la institución que fue observada, dicha escritura $l + (l.2)$ y sus diferentes verbalizaciones (por ejemplo "dos eles más ele" y "dos lados más lado") conformaban el centro de la actividad matemática desplegada alrededor de ciertas tareas que la vinculaban al concepto no ostensivo de medida del perímetro de un triángulo isósceles y a ciertas técnicas asociadas al cálculo de dicha medida. En tal sentido, los acuerdos que los integrantes de este séptimo grado iban consensuando,[11] habilitaba o inhabilitaba ciertos usos. Mencionaremos, a modo de ejemplo, sólo algunos de los acuerdos que interpretamos y que los integrantes de esta clase aceptaron al hacer un uso controlado de las fórmulas.

Una lectura especial en la que las letras del alfabeto en las fórmulas se pueden leer con los nombres de las letras pero también como elementos de las figuras geométricas: *l* se puede leer como *"ele"* o como *"lado"* al enunciar la fórmula.

[11] A menudo de manera implícita.

$$\text{Perim} \triangle \text{isosc} = l + (l\ .2)$$

Figura 2

La misma letra *l* se puede leer apelando a diferentes características[12] como “lado”, “lado igual”, “lado desigual”, “lado paralelo menor”, etcétera.

Si bien la letra *l* remite (y se puede leer como) a algún lado de la figura, se reemplaza por el valor de la longitud de dicho lado.

En una fórmula, una misma letra se puede leer con referencia a elementos distintos y, en consecuencia, se puede reemplazar por diferentes medidas.

Al avanzar un poco más en el análisis de la última fórmula que acabamos de considerar (figura 2), es posible establecer relaciones entre los diferentes registros que se ponen en juego.

El registro escrito se manifiesta con diferentes recursos, la palabra “triángulo” aparece reemplazada por otro símbolo también escrito pero gráfico, el triángulo dibujado, que además de aportar un indicador de referencia al tipo de polígono al que se refiere la palabra “triángulo”, incorpora características particulares de UN tipo de triángulo,[13] el isósceles, al que sobre-referirá la escritura a partir de la palabra abreviada “isosc”.

A su vez, la escritura del lado izquierdo se lee con la incorporación de ciertos conectivos del lenguaje natural que no aparecen expresados de modo escrito. El lado izquierdo de la igualdad es verbalizado como “perímetro **del** triángulo isósceles”.

Estas consideraciones destacan el interjuego de reglas de funcionamiento implícitas que se vuelven explícitas para los propios partícipes de la comunidad, pero que permanecen ocultas para quienes aún no están dentro.

En este sentido, el lado derecho de las expresiones establece una serie de relaciones entre letras, sin más referencia escrita de dichas letras al contexto modelizado que la inferencia que pueda establecerse a partir de los grafismos que el lado izquierdo proporciona. De este modo, los alumnos de esta clase incorporan al registro literal datos que se extraen del triángulo que aparece dibujado o nombrado: “*l*” es “lado del triángulo”,[14] “*l*.2” es “uno de los lados iguales por

[12] Que dependen de la figura considerada.

[13] Las características particulares del dibujo son más visibles si se observan en conjunto los diferentes dibujos de las fórmulas de perímetros de triángulos de la figura 1.

[14] Respetamos aquí las formulaciones que circularon en las clases que refieren a “lado” y no a “medida del lado” con relación a la letra *l* que aparece en las distintas fórmulas.

dos". En tal forma, el registro escrito "$l + (l.2)$", en interacción con un sistema de conocimiento constituido en un cierto contexto cultural, activa diversos relatos orales para dicha expresión literal, como ser "lado desigual más un lado igual por dos".

En conjunto, toda la expresión admite diversas verbalizaciones, por ejemplo, "el perímetro del triángulo isósceles es el lado desigual más uno de los lados iguales por dos", "el perímetro del triángulo isósceles se calcula sumando el lado desigual con lo que resulta de multiplicar uno de los lados iguales por dos", etcétera.

En su tesis doctoral, Bosch considera la interrelación entre la lectura y la escritura que se da en la cultura en el marco de una institución y un tiempo determinados. La diversidad de verbalizaciones posibles de ser establecidas al considerar sólo una de las fórmulas nos advierte sobre lo que la autora nombra como la no reversibilidad que se manifiesta entre los objetos ostensivos escritos y orales de la matemática. En el caso de la lengua natural, los objetos ostensivos orales pueden ponerse por escrito y, a su vez, se pueden oralizar los grafemas que constituyen la escritura, mientras que en el caso de la matemática se da una multiplicidad de interrelaciones entre ostensivos escritos y orales que el contexto de las prácticas culturales tiende a acotar.

Como mencionamos, el uso de la fórmula, y en tal sentido la interpretación y el control sobre las letras, está dominado por un conjunto de relaciones que involucran el conocimiento que tiene el que la usa sobre la figura a la cual se aplica dicha fórmula y las múltiples referencias proporcionadas por los diversos registros que se ponen en danza en la interacción del aula. En el marco de las prácticas, los alumnos elaboraron también otras leyes –implícitas– de funcionamiento en el aula que les proporcionaron instrumentalidad a esas fórmulas. Por un lado, para usar correctamente las fórmulas *hay que considerar la información que provee el dibujo de la figura que queda del lado izquierdo del igual*. Por otro lado, el uso de la fórmula en la clase establece que "letras iguales pueden ser reemplazadas por valores distintos". A su vez, las escrituras del lado derecho instalan al menos dos reglas implícitas respecto de las operaciones con letras: "sólo se agrupa[15] en aquellos casos en los que aparecen letras que representan la misma medida", "si se agruparon las letras, entonces tenían la misma medida".

Este uso de las letras presenta una ruptura respecto del tratamiento algebraico de las expresiones. Parece importante indagar acerca de las condiciones de adaptación de los alumnos a las maneras diferentes en que se despliega el

[15] "Agrupar" se entiende en el sentido de comprimir una suma en un producto ($l + l = 2l$).

conocimiento referido a las expresiones algebraicas en la institución secundaria en relación con este uso más local de las escrituras que puede tener lugar en la institución primaria. Desde el lugar de la escritura algebraica convencional, las tres expresiones de la derecha en la figura 1 son equivalentes, pero en el contexto de este séptimo grado, la información que proporciona el lado izquierdo de las igualdades –el dibujo de la figura geométrica– asegura un correcto uso de ellas y señala su no equivalencia. A su vez, instalada en la clase la ley de operaciones entre letras, mencionada en el párrafo de arriba, el hecho de que las escrituras de las tres últimas fórmulas de cálculo de la figura 1 sean distintas estaría brindando información sobre el tipo de triángulo al que se refiere (tres lados de igual medida, dos iguales y uno distinto, tres distintos, respectivamente) y, en este sentido, escrituras diferentes no podrían representar fórmulas de cálculo del perímetro de una misma figura.

Esto último nos retorna a la pregunta de cómo pueden operar estas escrituras en el contexto de primer año, específicamente en tareas de producción de fórmulas para contar colecciones.[16] En el contexto de las actividades de primer año, el lado izquierdo (lo que se cuenta, aunque no se escriba explícitamente) se conserva, pues todos los alumnos están involucrados en el conteo de la misma colección; eso es lo que se explota desde la enseñanza para instalar un conocimiento nuevo –la posibilidad de incorporar una igualdad entre fórmulas que tienen apariencias distintas– que confluirá en la noción de equivalencia de expresiones algebraicas. En este sentido, podríamos decir que en este séptimo grado se constituye una relación respecto de las expresiones que pueden ser admitidas como modelos de una situación muy diferente de la que se busca constituir en la escuela secundaria:

En el contexto del séptimo grado observado, la ***apariencia distinta*** de las expresiones revela que se trata de modelos de ***situaciones diferentes.***

En el contexto de primer año, ***apariencias distintas*** pueden simbolizar modelizaciones distintas de una ***misma situación.***

Por último, nos interesa sintetizar ciertas cuestiones abordadas en esta sección respecto de las escrituras literales en el aula de séptimo grado:

- El uso contextualizado de las fórmulas permite admitir letras iguales que representan elementos distintos.

[16] En el Anexo se presentan, a modo de ejemplo, dos tareas de este tipo mencionadas como actividades 1 y 2.

- El acto de "agrupar" letras iguales (por ejemplo $l + l = 2l$) exige el conocimiento –por parte del que desea operar– de las diferencias y similitudes entre los objetos que están siendo representados de la misma manera (en este caso por una misma letra). Es necesario, en este sentido, agregar información del contexto sobre la representación, limitando el poder descontextualizador que proporciona la modelización algebraica.
- La lectura de una expresión, en la que se conoce cuáles elementos están siendo representados con letras iguales –"agrupadas" o no– incorpora información extra sobre la situación modelizada (letras agrupadas indicarían la igualdad de los elementos representados).

Este uso de las fórmulas y las letras, distanciado de la utilización algebraica convencional, introduce un espacio donde la noción de expresión algebraica equivalente no puede tener lugar, así como tampoco la noción de transformación algebraica. En este medio no convencional, la transformación –convencional– de la expresión estaría indicando alteraciones en la situación que ha sido modelizada.[17]

A MODO DE CIERRE

Nos interesa aquí recuperar los ejes centrales de este artículo y esbozar también aquellas cuestiones que empezaron a instalar los análisis que fuimos desarrollando.

El contexto sociocultural de surgimiento de los objetos matemáticos nos lleva necesariamente a considerar el funcionamiento del sujeto en un sistema tensado por las normas que la cultura elige mantener y transmitir. En este marco, dialogamos con distintos autores que abordan el análisis de los procesos en torno a las producciones personales de los alumnos en un medio didáctico que impulsa o tracciona hacia la aparición de los aspectos convencionales del lenguaje algebraico.

El abordaje de las particularidades de este lenguaje pone en relieve su no naturalidad y permite pensar su génesis cultural imbricada con características de lenguajes contextuales. Plantea, a su vez, interrogantes respecto de las limita-

[17] La transformación de $l + l$ a $2l$ indicaría que dos lados, que eran inicialmente distintos, han pasado a ser iguales.

ciones que comportan estas referencias contextuales en las actividades escolares de generalización y en el discurso del aula.

A la dificultad señalada, se agrega el arraigo que los alumnos experimentan hacia la secuencia personal de acciones que despliegan en situaciones de conteo, lo que inhabilita la posibilidad de que admitan la transformación de expresiones algebraicas equivalentes producidas a partir de conteos diferentes. Se hace necesario, en tal sentido, generar un entorno de actividad que explote la diversidad de argumentos en la interacción social respecto de las relaciones que intervienen en las expresiones y las propiedades numéricas que sustentan las transformaciones. En este marco, se plantea para el docente la difícil labor de decidir –para cada una de sus aulas– en qué momentos, y cómo, desplegar tareas que propongan un análisis de la equivalencia de las expresiones con cierta separación del contexto de producción de las fórmulas.

Este espacio para la validación de las expresiones y sus transformaciones instala, en la escena del aula, los atributos de un modo de hacer que es propio de la matemática. Es la convencionalidad de la cultura matemática la que necesariamente irrumpe en la cultura del aula. En este sentido, es también una tarea compleja para el docente decidir los momentos propicios para estas "irrupciones" y mantener, a su vez, la provisoriedad de ciertos sistemas locales.

El funcionamiento de las escrituras y letras que hacen los alumnos del séptimo grado analizado se muestra distante del funcionamiento convencional algebraico que legitima la escuela secundaria. El contexto de aula del séptimo grado considerado hace válidas las escrituras y los usos particulares de las letras, haciéndolas vivir bien en un entorno institucional que las vuelve instrumentales. Se abren aquí dos problemas didácticos para el docente de primer año. Por un lado, cómo tener acceso a la diversidad de funcionamientos locales que los alumnos traen respecto del uso de las letras y las escrituras; por otro lado, cómo tener en cuenta, en el espacio del aula, los límites y las rupturas que estos funcionamientos disímiles generan respecto de la convencionalidad algebraica.

Por último, nos interesa volver sobre el uso correcto que los integrantes de esta clase hacían de este lenguaje; cuestión que nos remite a que las construcciones de significados en relación con los conocimientos, y en particular con las escrituras, son construcciones locales que incorporan acuerdos, muchas veces no verbalizados, que las manifestaciones explícitas del lenguaje no necesariamente muestran. Lo mencionado no es privativo de los lenguajes no convencionales. El lenguaje matemático convencional condensa justamente los acuerdos que lo vuelven convencional. En este sentido, poder usar el lenguaje "convenido" de una manera que resulte funcional exige descondensar esas convenciones y, de algún modo, "reacordarlas".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (1994), "Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics", *For the Learning of Mathematics*, Edmonton, Alberta, Canada, FLM Publishing Association, vol. 14.

Barallobres, G. (2007), "Introduction à l'algebra par la généralisation: problèmes didactiques soulevés", *For the Learning of Mathematics*, Edmonton, Alberta, Canadá, FLM Publishing Association, vol. 27, núm. 1, pp. 39-44.

Bosch, M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Memoria de tesis doctoral, Departament de Matemàtiques, Facultad de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona, octubre.

——— (2000), "Un punto de vista antropológico: la evolución de los 'instrumentos de representación' en la actividad matemática", *IV Simposio SEIEM (Huelva 2000)*.

Bosch, M. e Y. Chevallard (1999), "La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. Objet d´étude et problématique", *Recherches en didactique des mathématiques*, La Penseé Sauvage, vol. 19, núm. 1, pp. 77-123.

Brousseau, G. (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, vol. 7, núm. 2, pp. 33-115.

——— (1988), "Le contrat didactique: le milieu", *Recherches en didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, vol. 9, núm. 3, pp. 309-336.

Cobb, P. y E. Yackel (1996), "Sociomathematical Norms, Argumentation and Autonomy in Mathematics", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27, núm. 4, pp. 458-477.

Goodman, N. (1984), *Of Mind and Other Matters*, Cambridge, Harvard University Press.

Programas de Matemática para primero y segundo año de las escuelas medias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2001-2002), Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, en: http/www.buenosaires.gov.ar/educación

Radford, L. (2000), "Students Processes of Symbolizing in Algebra. A Semiotic

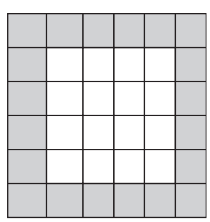
Analysis of the Production of Signs in Generalizing Tasks", en *Proceedings of the 24th PME Conference,* Japón, vol. 4, pp. 81-88.
——— (2001), "Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra", en *Proceedings of PME 25,* Utrecht, Freudenthal Institute, vol. 4, pp. 81-89.
——— (2003), "Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic Cultural Approach to Students' Types of Generalization", *Mathematical Thinking and Learning,* vol. 5, núm. 1, pp. 37-70.
Sadovsky, P. y C. Sessa (2005), "The Adidactic Interaction with the Procedures of Peers in the Transition from Arithmetic to Algebra: A Milieu for the Emergence of New Questions", *Educational Studies in Mathematics,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, vol. 59, pp. 85-112.
Sessa, C. (2005), *Iniciación al estudio didáctico del álgebra,* Buenos Aires, Libros del Zorzal.
Sierpinska, A. y S. Lerman (1996), "Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education", en A. J. Bishop *et al.* (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* trad. de Juan D. Godino, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 827-876.

ANEXO

Actividades presentes en el Programa de Matemática para primer año de las escuelas medias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

Actividad 1

El objetivo final de esta actividad es encontrar una fórmula que permita calcular el número de cuadritos sombreados de una figura como la del modelo, cualquiera que sea el número de cuadritos sobre el lado del cuadrado.



Una posible gestión es la siguiente:

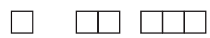
- dar primero un cuadrado dibujado con 5 o 6 cuadritos de lado y pedir su conteo;
- preguntar después cuántos cuadritos habrá en el borde de un cuadrado de 37 cuadritos de lado;
- reunidos en grupos, los alumnos deben confrontar las soluciones y elegir una para hacerla pública;
- se solicita a cada grupo la explicación del método utilizado para contar en el caso 37, de manera que pueda servir para contar en otros casos;
- discusión de los métodos de cálculo (que se supone que estarán dados en lenguaje usual);
- se propone luego a los alumnos que escriban una fórmula que refleje el método que elijan (el propio o alguno de otro grupo que prefieran);
- discusión de las diferentes fórmulas obtenidas (se espera una pluralidad de fórmulas correctas);
- se trabaja sobre la noción de equivalencias de fórmulas;
- se plantean a los alumnos diferentes preguntas que muestren la utilidad de la fórmula para conocer características de la situación que modeliza.

Se trata de un ejemplo en el que la diversidad de maneras de contar los cuadritos sombreados dará origen a diferentes escrituras para la fórmula buscada, permitiendo la discusión en torno a la equivalencia de ellas. En este problema se pone en juego el uso de la propiedad distributiva para expresiones algebraicas.

Una cuestión esencial del trabajo algebraico es la lectura de información en una expresión. En este caso, frente a preguntas del tipo: ¿existe algún valor de n para el cual la cantidad de cuadraditos sombreados sea 587?, los alumnos deberán reconocer en la lectura de la expresión $4n - 4$, que eso no es posible, ya que 587 no es múltiplo de 4. ¿Por qué hacemos referencia a la lectura de información en una expresión en el planteo de esta pregunta? Obsérvese que si los alumnos conocen que todo múltiplo de 4 puede expresarse como el producto de 4 por cualquier número entero, al expresar $4n - 4$ como $4\ (n - 1)$ podrán percibir que al reemplazar por cualquier valor natural, siempre se obtendrá como resultado un múltiplo de 4 y, por lo tanto, no existirá ningún n para esta fórmula de 587.

Actividad 2

Se propone la siguiente sucesión de figuras, construidas con fósforos y se aclara cómo se continúan armando.



Esquema de tareas para los alumnos:

a) Se les pide calcular la cantidad necesaria de fósforos para construir la figura que ocuparía el sexto lugar.
b) Se pregunta por la cantidad de fósforos necesarios para construir la figura del lugar 100 en la sucesión.
c) Se solicita una fórmula para la cantidad de fósforos de la figura del lugar n y se trabaja la equivalencia de distintas fórmulas si es que aparecen (son probables $3n + 1$ y $4 + 3(n - 1)$).
d) Se formulan preguntas para hacer funcionar la fórmula. Por ejemplo: ¿podrá ser que en alguna ubicación la figura tuviera 1 549 fósforos? Si tengo 1 500 fósforos y armo una figura de esta forma lo más grande posible, ¿me sobra alguno?

Situación planteada por Gustavo Barallobres en su investigación

Parte 1

El profesor dará diez números consecutivos y el equipo que primero encuentre la suma de estos números será el ganador. No es posible usar calculadora.

El docente propone, a continuación, comenzar a jugar con la siguiente lista de números:

1a. partida: 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.

Luego de finalizada esta partida se propone la segunda:

2a. partida: 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792.

El docente puede jugar más partidas, si lo cree necesario, con la idea de ir generando en los alumnos la necesidad de buscar métodos económicos. Posteriormente, el docente explica a los alumnos que ahora les dará un tiempo, antes de darles otros diez números consecutivos, para que puedan pensar alguna estrategia que les permita ganar rápidamente.

Cuando todos los grupos manifiesten haber diseñado alguna estrategia, el docente propondrá nuevas partidas:

3a. partida: 6985, 6986, 6987, 6988, 6989, 6990, 6991, 6992, 6993, 6994.
(Si es necesario, pueden proponerse más partidas.)

Comentario: Las primeras partidas se juegan sin condicionamientos. El primero que obtiene el resultado lo propone y el docente propone al resto de la clase controlar si es correcto o no. En caso de obtenerse una respuesta incorrecta, el juego continúa hasta que aparezca la primera respuesta correcta.

Como habrá grupos que responderán más rápidamente que otros, se trata de que aquellos que realicen todas las cuentas se vean "forzados" a buscar otros procedimientos. Por esta razón, el docente analizará cuántas partidas se juegan hasta generar esta necesidad de búsqueda para luego proponer la tercera partida. En esta instancia, no hay ningún tipo de discusión sobre la manera de obtener los resultados; cada equipo tendrá que no divulgar la estrategia que supuestamente le permite ganar el juego.

Parte 2

En esta instancia, el docente anuncia a los alumnos que existen fórmulas que permiten, dado el primero de los diez números consecutivos cualesquiera, obtener como resultado la suma de esos diez números, y que ahora se trata de encontrar una de estas fórmulas.

Parte 3

Cada grupo tendrá que buscar razones para que el resto de la clase pueda comprender por qué la fórmula encontrada sirve para cualquier secuencia de diez números consecutivos.

Tendrán un tiempo para trabajar en el grupo y acordar las razones que expondrán posteriormente.

El docente será el encargado de conducir el debate, cuya finalidad es que cada grupo pueda exponer sus razones y que éstas sean discutidas y aceptadas o rechazada por el resto de la clase.

Posteriormente, el docente recupera todas las explicaciones proporcionadas por los diferentes grupos y las presenta al conjunto de la clase (puede ser en hojas fotocopiadas). Cada grupo deberá analizar las diferentes producciones y decidir cuál es la que elegirá para que todos puedan comprender por qué cada fórmula encontrada sirve para cualquier secuencia de diez números consecutivos. Se deberán proporcionar razones por las cuales elige una de estas explicaciones y razones por las cuales descarta las otras.

DATOS DE LA AUTORA

Verónica Cambriglia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, e Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina
vcambrig@ungs.edu.ar