Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Barroso, Ricardo; Martel, José
Caracterización geométrica del desarrollo de la triada piagetiana
Educación Matemática, vol. 20, núm. 1, abril, 2008, pp. 89-102
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

ENSAYOS

Caracterización geométrica del desarrollo de la triada piagetiana

Ricardo Barroso y José Martel

Resumen: En este documento mostramos cómo la teoría de Jean Piaget y Rolando García, que fue desarrollada en *Psicogénesis e historia de la ciencia* (1982), puede ser interpretada desde una perspectiva práctica contextualizada y utilizada en geometría.

Hacemos una caracterización de la triada a partir de la revisión de la literatura, según el trabajo de distintos investigadores, realizando una particularización del caso de la geometría. Lo realizamos mediante el desarrollo de un esquema, "resolución de problemas geométricos".

Con dos ejemplos de problemas de diferente nivel de dificultad, analizamos diversas estrategias de resolución que pueden considerarse en cada uno de los tres modos de desarrollo de pensamiento (intra-inter-trans) propuestos por estos autores.

Palabras clave: Piaget, geometría, inter-intra-trans, clasificación jerárquica, resolución de problemas.

Abstract: In this paper we show how the theory by Jean Piaget and Rolando García, which was developed in *Psychogenesis and History of Science* (1982), can be interpreted from a practical perspective and context used in geometry.

We make a characterization of the triad from the literature review, according to the work of various researchers, performing a particular case of geometry. We characterize the development of a scheme "geometric problem solving".

With two examples of problems with different levels of difficulty, we discusse various strategies resolution that can be considered in each of the three modes of development of thought (intra-inter-trans) proposed by these authors.

Keywords: Piaget, geometry, inter-intra-trans, ranking, problem solving.

Fecha de recepción: 11 de noviembre de 2007.

INTRODUCCIÓN

En Piaget y García (1982, pp. 106-107) se señala que hay mecanismos de pasaje de un periodo histórico del desarrollo de las ciencias al siguiente, y que éstos son análogos a los del pasaje de un estadio psicogenético al siguiente.

El primero de estos mecanismos, afirman, está constituido por un proceso general que caracteriza todo proceso cognoscitivo: consiste en que cada vez que hay un rebasamiento, lo que fue rebasado está de alguna manera incorporado en el rebasante.

El segundo mecanismo de pasaje, que hasta ahora no había sido estudiado, pero que constituye el tema central de *Psicogénesis e historia de la ciencia*, es un proceso que también es de naturaleza completamente general: el proceso que conduce de lo intra-objetal (análisis de los objetos) a lo inter-objetal (estudio de las relaciones y transformaciones) y de allí a lo trans-objetal (construcción de las estructuras).

Desde un punto de vista general, la sucesión intra-inter-trans, que encontraremos en todos los dominios y niveles, es la expresión de las condiciones que las leyes de la asimilación y equilibración imponen a toda adquisición cognitiva. Cada vez que el sujeto aborda un dominio nuevo, se encuentra en primer término con la obligación de asimilar los datos a sus esquemas de acción o conceptuales. De aquí surge el carácter intra de estos comienzos del conocimiento. Los nuevos esquemas no podrían permanecer aislados y el proceso asimilador los conducirá con exigencias de equilibración a formas más o menos estables de coordinaciones. De aquí surge el carácter inter de esta etapa. Al haber varios subsistemas se amenazará la unidad del todo, que será contrarrestada por tendencias integradoras. El equilibrio entre las diferencias y la integración hace surgir las estructuras de conjunto que caracterizan el nivel trans.

Clark *et al.* (1997) estudian el caso de la regla de la cadena y encuentran útil la triada para describir los esquemas de desarrollo. Señalan que el estado intra se caracteriza por centrarse en un objeto aislado de otras acciones, procesos u objetos. El estado inter se caracteriza por reconocer relaciones entre diferentes acciones, procesos, objetos o esquemas. Finalmente, señalan estos autores que en el estado trans se construyen estructuras.

Baker *et al.* (2000) analizan la comprensión de los estudiantes de la gráfica correspondiente a un problema de cálculo. Utilizan la triada para hacer el análisis. Señalan que en el nivel intra dan explicaciones de nivel local y particular, sin ser capaces de relacionar dos problemas. En el nivel inter, el estudiante es consciente de las relaciones y puede coordinar la noción de derivada como la razón de cambio de un punto dado. Puede usar esta idea para describir la variación local en la función. En el estado trans, el estudiante reconoce todas aquellas situaciones que incluyen relaciones con derivadas y las que no, demostrando una coherencia en el esquema formado.

McDonald *et al*. (2000) la utilizan para el análisis del desarrollo del esquema de sucesiones numéricas, series y límites de funciones. Señalan que en estado intra no se reconocen conexiones. En el estado inter, las reconocen, pero no hay coherencia entre ellas, esa coherencia se alcanza en el estado trans, obteniéndose fuertes y numerosas conexiones entre las sucesiones como funciones y las sucesiones como listas numéricas.

Trigueros (2005) señala, citando a Piaget y García (1982), que la triada se puede encontrar en cualquier proceso de construcción del conocimiento y, además, que al estudiar cada una de estas etapas se encuentra que el proceso es anidado, es decir, que dentro de cada etapa del conocimiento se puede encontrar una triada en un nivel diferente. La utiliza para el caso de las gráficas de funciones en las que se conocen datos de las derivadas sucesivas en diferentes intervalos. Encuentra que, en el nivel intra, el estudiante trabaja coordinando la información en intervalos aislados, mientras que cuando hace intersección de distintos intervalos se muestra confuso. En el nivel inter, es capaz de coordinar información en dos intervalos contiguos sin poder coordinar todo el dominio de la función. En el nivel trans, puede coordinar el dominio completo de la función y unir intervalos que no son contiguos cuando comparten la misma información.

APLICACIÓN A LA GEOMETRÍA

Piaget y García (1982), además, indican que la geometría comienza con la síntesis que hace Euclides en un periodo durante el cual se estudian las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos como relaciones internas entre los elementos de dichas figuras o dichos cuerpos. A esta etapa la llaman intrafigural. Sostienen que cuando las figuras se imponen al sujeto desde afuera, a título de "entidades" ya totalmente hechas, el modo de conocimiento es de naturaleza intrafigural y el sujeto ignora o no busca ningún poder constructivo intrínseco, por lo que se somete a lo dado desde el exterior.

Viene luego una etapa caracterizada por una puesta en relación de las figuras entre sí, cuya manifestación específica es la búsqueda de transformaciones que relacionan las figuras según múltiples formas de correspondencia. Esta etapa la denominan interfigural. Con las organizaciones interfigurales, las "entidades" geométricas son solidarias a un conjunto de relaciones de las que participan; el sujeto hace comparaciones entre las relaciones intrafigurales, pero realiza generalizaciones que escapan a las fronteras iniciales.

A continuación, comienza una tercera etapa que Piaget y García denominan transfigural, caracterizada por la preeminencia de las estructuras, que no tienen en cuenta las "figuras", sino que las integra en unos sistemas de construcciones realizables. Una vez superados los conflictos locales, la línea de desarrollo transfigural consiste en subordinar todo lo adquirido en las etapas intrafigural e interfigural a sistemas de conjunto de transformaciones que habrán de generar las figuras o los subsistemas referidos en lugar de sufrir sus resistencias.

DE LA TEORÍA A LA PRÁCTICA A TRAVÉS DE DOS PROBLEMAS

Mediante dos problemas geométricos observaremos cómo se pueden establecer estrategias de resolución en cada una de estas tres etapas.

Primer ejemplo

Dado el triángulo ABC trazar una paralela a AB tal que divida su perímetro por la mitad.

a) Estrategia correspondiente a la etapa intrafigural: argumentos numéricos

Se elige un punto P sobre BC y se traza el segmento PQ paralelo a AB. Se mide con el Cabri II PC+CQ (figura 1). Bastaría, ahora, con desplazar P sobre BC hasta encontrar un punto X y obtener el semiperímetro.

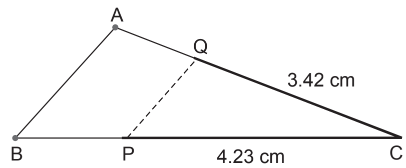

Figura 1

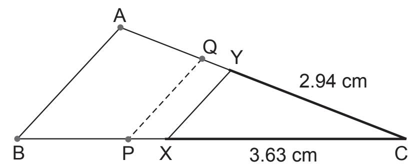

Figura 2

Perímetro = $2p$ = 13.14 cm; semiperímetro p = 6.57 cm

En la figura 1, PC + CQ = 4.23 + 3.42 = 7.65 cm
En la figura 2, XC + CY = 3.63 + 2.94 = 6.57 = p

El resolutor utiliza el programa de geometría dinámica Cabri II para buscar mediante la construcción pedida de paralelismo el cumplimiento de la condición de ser igual a la mitad del perímetro.

Entendemos que las relaciones estudiadas son estrictamente internas a la figura, por lo que se enmarca la estrategia de solución en la etapa intrafigural.

b) Estrategia en la etapa interfigural: argumentos de geométrica sintética

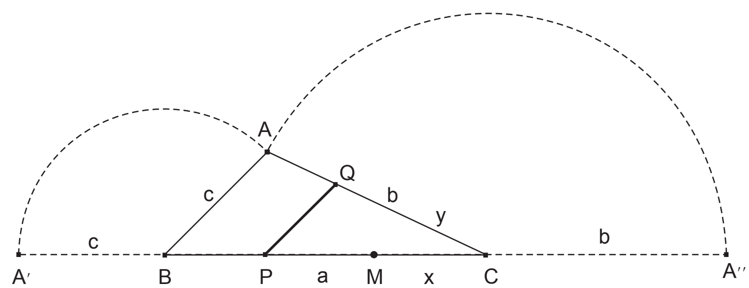

Figura 3

a = BC, b = CA = CA′′, c = BA = BA′
A′A′′ = $c + a + b = 2p$; A′M = MA′′ = p; PC = x, QC = y

Supongamos el problema resuelto; esto es, que PQ es un segmento paralelo a AB que divide al perímetro del triángulo ABC en dos partes iguales.

$$\mathrm{PC} + \mathrm{CQ} = x + y = p \qquad (1)$$

De la semejanza de los triángulos ABC y QPC se desprende:

$$x/a = y/b \text{ , de donde } x/a = y/b = (x + y)/(a + b) = p/(a + b) \qquad (2)$$

De las expresiones (1) y (2), resulta

$$x = \mathrm{PC} = ap/(a + b)$$

La construcción de una cuarta proporcional con los segmentos $a + b = \mathrm{BA}''$, $p = \mathrm{MA}''$ y $a = \mathrm{BC}$, o sea, $(a + b)/p = a/x$, resuelve el problema.

En esta ocasión, el resolutor, entendemos, relaciona figuras entre sí, buscando correspondencias, semejanzas, construyendo la cuarta proporcional, por lo que se puede encuadrar en la etapa interfigural.

c) Estrategia en la etapa transfigural: argumentos proyectivos

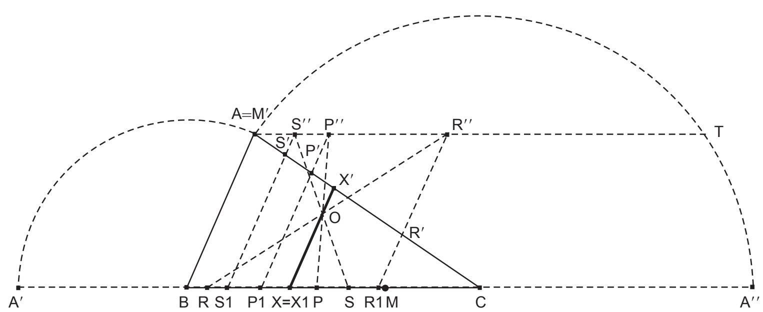

Figura 4

En la figura, $\mathrm{A'M} = \mathrm{MA''} = p$, y se toman los puntos R, P, S sobre BC de manera que R′, P′ y S′ se construyen sobre AC con la condición de ser: RM = AR′, PM = AP′, SM = AS′, por lo que las series (PRS...) y (P′R′S′...) son proyectivas, al ser puntos que conservan las respectivas distancias desde A y M y, por ello, verifican que $\mathrm{CR} + \mathrm{CR'} = \mathrm{CS} + \mathrm{CS'} = \mathrm{CP} + \mathrm{CP'} = p$. Proyectando esta última serie (P′, R′ , S′...) , paralelamente a BA sobre BC y su paralela AT, resultan las series (P1, R1, S1...) y (P′′, R′′, S′′...) que, lógicamente, también son proyectivas. La perspectividad de las series (PRS...) y (P′′R′′S′′...) permitirá determinar su centro O, que es el punto en el que concurren los segmentos PP′′, SS′′, RR′′ constituidos por pares de puntos homólogos.

La paralela por O a AB resolverá el problema. X = X1 es el punto doble propio de las series (PRS...) y (P1, R1, S1...). Por otro lado, al ser X′ el punto homólogo de X en la primera proyectividad, AX9 tendrá que ser igual a XM, y así, CX + CX′ = *p*, con lo que el segmento pedido es XX′.

En esta tercera estrategia, la preeminencia de la estructura proyectiva lleva a caracterizarla en la etapa transfigural.

Haciendo lo mismo para los otros dos lados, los segmentos correspondientes (XX′ paralelo a BC, YY′ paralelo a AC, y ZZ′ paralelo a BA) forman un triángulo interior A* B* C* que es homotético con el ABC. Kimberling (2004, p. 7) ha catalogado 3 217 puntos del triángulo en su *Enciclopedia de Centros del Triángulo*. Según nuestras indagaciones, el centro de la homotecia se corresponde con el catalogado por X(333).

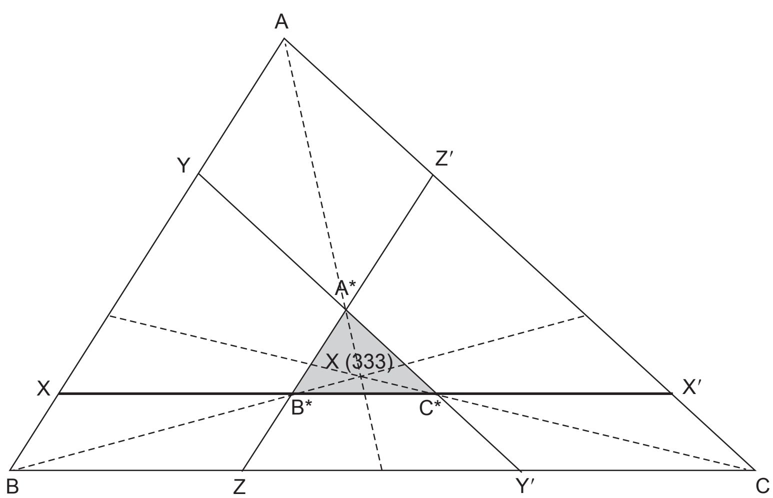

Figura 5

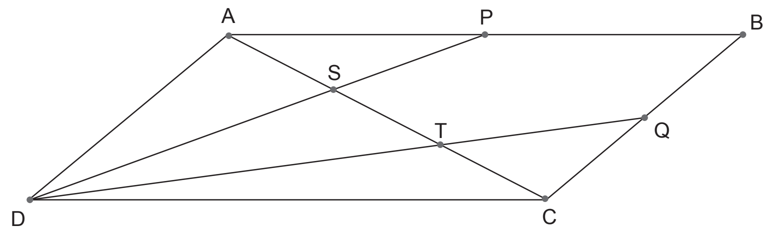

Figura 6

Segundo ejemplo

Dado un paralelogramo ABCD, sean P y Q los puntos medios de AB y BC.
Sea la diagonal AC y los segmentos DP y DQ que cortan en S y T a dicha diagonal.
Demostrar que AS = ST = TC.

a) Estrategia de solución en la etapa intrafigural

Si el resolutor mide directamente en la figura las longitudes de los segmentos indicados, se tiene:

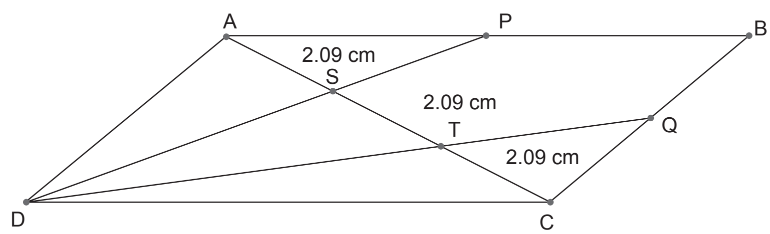

Figura 7

Hecha con Cabri II, la medición da el resultado pedido. Al ser un estudio de las relaciones internas, se trata de la etapa intrafigural.

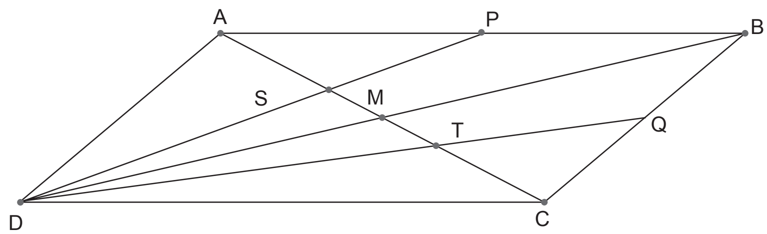

Figura 8

b) Estrategia en la etapa interfigural

Si se traza la otra diagonal BD, en el paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio.

Lo que significa que en el triángulo ADB los segmentos DP y AM son medianas, y S es su baricentro.

Por las propiedades del baricentro, 2SM = AS.

Análogamente, al considerar el triángulo DCB se tiene 2MT = TC.

Pero por ser AM = MC, resultará

SM = MT, y ST = 2SM = AS= TC, *c.q.d.*

En esta estrategia se relacionan elementos que no son internos de la figura inicial, estableciendo relaciones entre un nuevo elemento, la segunda diagonal y las medianas de los nuevos triángulos, teniéndose en cuenta sus propiedades euclideanas para la resolución, es decir, el resolutor se halla en la etapa interfigural.

c) Estrategia correspondiente a la etapa transfigural

En la red de paralelogramos de la figura, la transformación homotecia de centro D y razón 3, permite las siguientes correspondencias:

$$AS \rightarrow WV,\ ST \rightarrow VX,\ TC \rightarrow XY$$

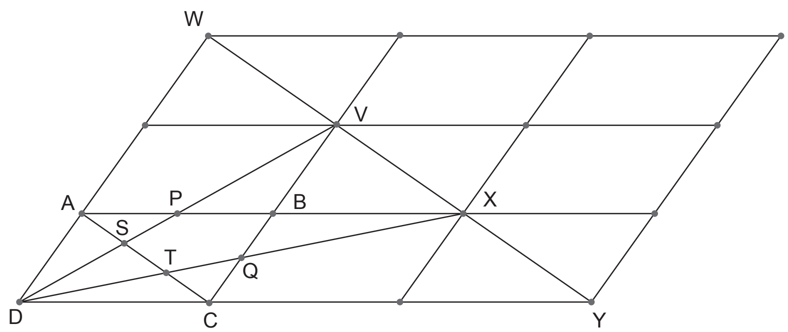

Figura 9

Dado que las tres imágenes transformadas, WV, VX y XY, son diagonales de paralelogramos de las mismas medidas, los orígenes, AS, ST y TC, han de ser iguales.

Como se puede apreciar, en esta ocasión la estrategia de solución se caracteriza por la preeminencia de la estructura de la transformación homotecia. Se puede afirmar que el problema se ha resuelto según una estrategia en la etapa transfigural.

A este problema geométrico se le puede aplicar una doble perspectiva, concretización en tres figuras geométricas y generalización hacia otras dos figuras geométricas, lo que desde una visión didáctica, entendemos, puede ser significativo para la geometría.

Concretización y generalización del problema

Si concretamos el problema, lo podemos hacer en primer lugar partiendo del paralelogramo hacia el rectángulo, al incluir la restricción al paralelogramo de tener un ángulo recto, que según Hoffer (1981, p. 15) es una definición que estaría en el nivel de deducción de Van Hiele.

En un segundo caso de concretización, podemos obtener el cuadrado, al restringir en el rectángulo la propiedad de igualdad de la longitud de los lados.

En un tercer caso, si le damos al paralelogramo la restricción de tener los cuatro lados iguales, tendremos el rombo.

Como señala De Villiers (1994, p. 15), entre algunas funciones importantes de la clasificación jerárquica de los cuadriláteros está la de simplificar la sistematización deductiva y la de proporcionar a menudo esquemas conceptuales útiles durante la resolución de problemas, proporcionando una perspectiva global, es decir, que si una propiedad es cierta, por ejemplo, para un paralelogramo, lo será para el cuadrado sin necesidad de tener que volver a la demostración de ella. Es de señalar que si se adopta una clasificación exclusiva, donde el cuadrilátero requiere tener lados opuestos diferentes y ángulos no rectos, no sería posible tal "traspaso" de propiedades y debería comenzar de nuevo la demostración de la correspondiente propiedad.

Así, con De Villiers entendemos que, al adaptar la clasificación inclusiva de los cuadriláteros en la que no se exige la desigualdad de los lados ni el que los ángulos tengan que ser no rectos, podemos considerar el siguiente esquema:

<table>
<tr><th colspan="3">Clasificación jerárquica inclusiva de los cuadriláteros</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Cuadriláteros</td><td>Irregular</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Paralelogramo</td><td>Rombo ⊃ Cuadrado</td></tr>
<tr><td>Rectángulo ⊃ Cuadrado</td></tr>
<tr><td>Trapecio</td><td></td></tr>
<tr><td>Cometa ⊃ Rombo ⊃ Cuadrado</td><td></td></tr>
</table>

Llevada la teoría de De Villiers a nuestros tres casos concretos, podemos deducir que la propiedad es cierta para el rectángulo, el cuadrado y el rombo.

Si generalizamos la propiedad, nos encontramos con tres casos.

En primer lugar, el trapecio, que mantiene dos lados paralelos. Para este cuadrilátero no se cumple dicha propiedad, pero tampoco se desvanece por completo, sino que podríamos decir que se "trunca". De los tres segmentos que se obtienen, dos son iguales, pero no así el tercero, DU (véase la figura 11). Proponemos al lector interesado que haga un análisis desde la triada de la situación geométrica creada.

En segundo lugar, para el cuadrilátero denominado cometa, que se caracteriza por tener dos pares de lados consecutivos iguales, la diagonal, que une los vértices donde concurren lados desiguales, también desmorona la regularidad, pero sin derrumbarla por completo. En este caso quedan dos segmentos no consecutivos iguales.

Es $DU = VB$. En esta ocasión es la simetría de la figura respecto a la otra diagonal AC la que permite "ver" la propiedad.

Por último, para un cuadrilátero cualquiera, con los cuatro lados de diferente

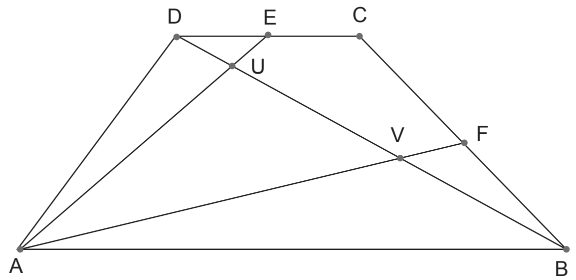

Figura 10

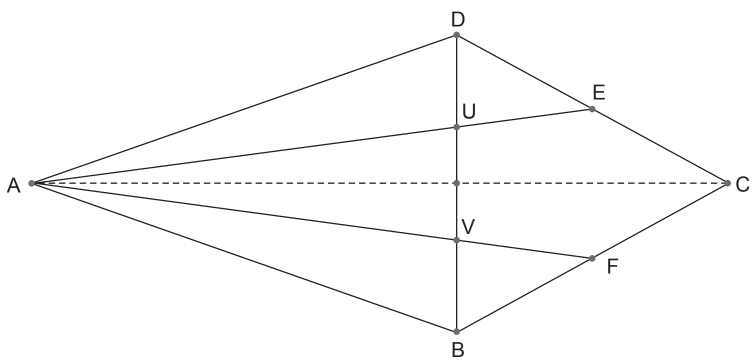

Figura 11

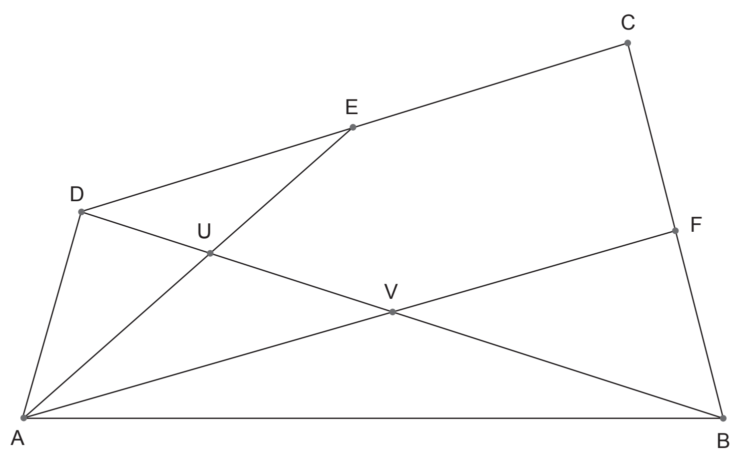

Figura 12

tamaño y sin paralelismo de lados opuestos, la propiedad estudiada deja de tener consistencia por completo, no se mantiene.

COMENTARIOS FINALES

Consideramos que una teoría puede ser llevada a una mejor comprensión si se observa desde la resolución de problemas en los que se aplique dicha teoría. La triada que presentaron Piaget y García (1982) ha sido analizada con dos ejemplos.

Se muestran varias investigaciones que utilizan el marco teórico de la triada por varios autores (Baker *et al.* 2000; Clark *et al.* 1997; McDonald *et al.* 2000; Trigueros, 2005) para analizar la comprensión de diversos conceptos matemáticos. Estos autores pertenecen al grupo RUMEC (investigadores liderados por Ed. Dubinsky, que desde mediados de la década de 1980 estudia las ideas piagetianas como la abstracción reflexiva o la triada intra-inter-trans en las investigaciones sobre la educación matemática).

La evolución de un estudiante hará que vaya incorporando etapas de la triada y, como señalan los autores, el desarrollo psicocognitivo no procede linealmente por acumulación de conocimientos, sino que exige, cada vez que se alcanza un nuevo nivel, la reconstrucción de lo adquirido en los niveles precedentes.

Si se considera una clasificación jerárquica, las propiedades permanecen en las restricciones y pueden desaparecer gradualmente en las generalizaciones. El profesor debe tenerlo en cuenta en sus clases, ya que la economía en las demostraciones le permitirá hacer comprender mejor las propiedades y relaciones geométricas a sus alumnos.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos agradecer los comentarios de los árbitros en la primera versión del artículo, que nos han ayudado a mejorar, así como al Dr. D. José María Gavilán Izquierdo por sus indicaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baker, B., L. Cooley y M. Trigueros (2000), "A Calculus Graphing Schema", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, núm. 5, pp. 557-578.

Cabri II (Programa de Geometría Dinámica).

Clark, J.M., F. Cordero, J. Cottrill, B. Czarnocha, D.J. DeVries, D. St. John, G. Tolias y D. Vidakovic (1997), "Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule?", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 16, núm. 4, pp. 345-364.

De Villiers, M. (1994), "The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals", *For the Learning of Mathematics*, vol. 14, núm. 1, pp. 11-18.

Hoffer, A. (1981), "Geometry is more than Proof", *Mathematics Teacher*, núm. 1, pp. 11-18.

Kimberling, C. (2004), http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

McDonald, M.A., D.M. Mathews y K.H. Strobel (2000), "Understanding Sequences: A Tale of Two Objects", *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, pp. 77-102.

Piaget, J. y R. García (1982), *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México, Siglo XXI Editores.

RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community).

Trigueros, M. (2005), "La noción de esquema en la investigación en educación matemática educativa a nivel superior", *Educación Matemática*, vol. 17, núm. 1, pp. 5-31.

DATOS DE LOS AUTORES

Ricardo Barroso
Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla, España
rbarroso@us.es

José Martel
Profesor emérito de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España
jmartel@dma.ulpgc.es