Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Flores Peñafiel, Alfinio; Yun, Jeong Oak
El teorema de Pitágoras con frijoles de goma
Educación Matemática, vol. 20, núm. 1, abril, 2008, pp. 103-113
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

El teorema de Pitágoras con frijoles de goma

Alfinio Flores Peñafiel y Jeong Oak Yun

Resumen: Los alumnos de secundaria exploran el teorema de Pitágoras y una extensión utilizando un tablero cercado y frijoles de goma para medir el área de los cuadrados y semicírculos. Utilizan factorización y simplificación de expresiones algebraicas para deducir las equivalencias de los resultados.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, geometría experimental, niveles de Van Hiele.

Abstract: Middle school students explore the Pythagorean Theorem and some of its extensions by using a fenced mat, and jelly beans to measure the area of the squares and semicircles. They use factorization and simplification of algebraic expressions to show the equivalence of results.

Keywords: Pythagorean theorem, experimental geometry, Van Hiele levels.

INTRODUCCIÓN

Las primeras dos actividades presentadas en este artículo permiten a los alumnos de secundaria explorar el teorema de Pitágoras y una extensión, utilizando frijolitos de goma para medir las áreas de cuadrados y semicírculos. Este enfoque empírico puede servir de fundamento para demostraciones analíticas más tarde. Según Van Hiele, los alumnos necesitan oportunidades para desarrollar su pensamiento geométrico a través de cinco niveles (Van Hiele, 1986). Los cinco niveles son: *1)* visualización, *2)* análisis de propiedades, *3)* deducción informal, *4)* deducción axiomática, y *5)* rigor. En el primer nivel de visualización, las figuras geométricas se contemplan como un todo. El estudiante identifica las figuras por su apariencia global. Identifica partes de una figura, pero no analiza las figuras en términos de sus componentes. No piensa en las propiedades como para carac-

Fecha de recepción: 24 de febrero de 2008.

terizar una clase de figuras y no hace generalizaciones. El alumno identifica, nombra, compara las figuras geométricas y opera sobre ellas de acuerdo con su apariencia. En el segundo nivel de análisis de propiedades, el estudiante puede analizar las figuras en términos de sus componentes, describir sus partes y listar sus propiedades. Se utilizan descripciones más que definiciones. El estudiante descubre o prueba propiedades o reglas de manera empírica, por ejemplo, doblando, midiendo, utilizando una retícula o un diagrama. En el tercer nivel de deducción informal, el estudiante puede entender el papel de las definiciones; puede establecer la relación jerárquica entre las figuras (por ejemplo, entre cuadrados y rectángulos), puede ordenar figuras de acuerdo con sus características y puede deducir hechos de manera lógica de hechos que ha aceptado previamente usando argumentos informales. En el cuarto nivel de deducción axiomática, el alumno puede entender el significado de la demostración en el contexto de definiciones, axiomas y teoremas. El estudiante demuestra teoremas de manera deductiva a partir de los axiomas o de teoremas demostrados previamente. En el quinto nivel de rigor, el estudiante puede entender las relaciones entre los diferentes sistemas axiomáticos. El estudiante establece teoremas en diferentes sistemas de postulados y analiza y compara estos sistemas. La investigación en varios países ha mostrado que los alumnos no progresan de un nivel a otro solamente por la edad, que se necesitan intervenciones bien estructuradas para ayudar a los alumnos a hacer la transición de un nivel al siguiente (Fuys, Geddes, y Tischler, 1988; Rodríguez Luévanos y Flores Peñafiel, 1989).

Las actividades presentadas aquí son apropiadas para ayudar a los alumnos en la transición del nivel 2 de desarrollo que corresponde al análisis de propiedades y verificación empírica al nivel 3 de deducción informal. En la tercera actividad, los alumnos utilizan el resultado para los cuadrados y, junto con razonamientos deductivos aplicando expresiones algebraicas equivalentes, establecen el resultado para los semicírculos en los lados del triángulo rectángulo. Los alumnos crean así argumentos inductivos y deductivos acerca de la relación pitagórica, en consonancia con las recomendaciones curriculares para el nivel medio básico de organizaciones profesionales (NCTM, 2000).

Los materiales que se necesitan para la primera actividad son un tablero de cartón (del tamaño de una caja de zapatos), formado por un triángulo rectángulo con los cuadrados correspondientes en los catetos y la hipotenusa, una cerca de cartón que rodea el perímetro exterior formado por los tres cuadrados, otra cerca alrededor del triángulo central y suficientes frijolitos de goma para llenar los cuadrados sobre los catetos con una sola capa, es decir, que no haya frijoles

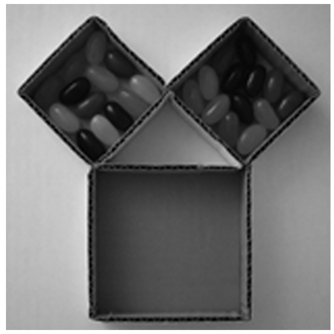

Figura 1 El tablero con las cercas y los frijoles

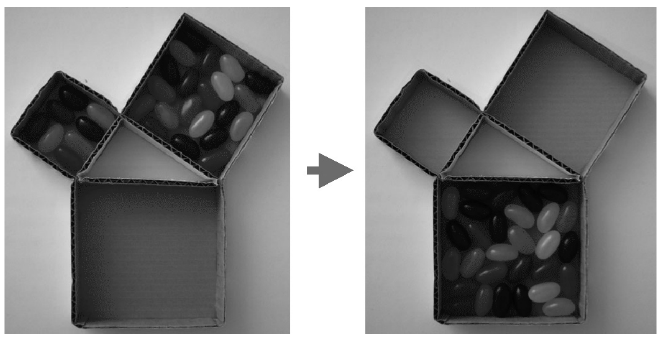

Figura 2 Un ejemplo diferente de triángulo rectángulo

unos encima de otros y que los únicos huecos que queden sean muy pequeños comparados con los frijoles (véase la figura 1). Para hacer la cerca se pueden cortar tiras de aproximadamente 2 cm de ancho de cartón corrugado, con los cortes perpendiculares a las ondulaciones para que las tiras se puedan doblar en la forma deseada. Diferentes grupos pueden tener tableros distintos con diferentes tipos de triángulos rectángulos (véase la figura 2) y luego comparar resultados.

Aunque los frijoles son objetos tridimensionales, al utilizar una sola capa estamos esencialmente utilizando la sección transversal, que es bidimensional, así que los podemos utilizar para medir área. En esta actividad, los alumnos no tienen que contar el número de frijoles para comparar áreas; utilizan sólo el monto total. Cuando cambian los frijoles de un lugar del tablero a otro, pueden ver si los frijoles caben en el nuevo espacio o no y si lo llenan completamente.

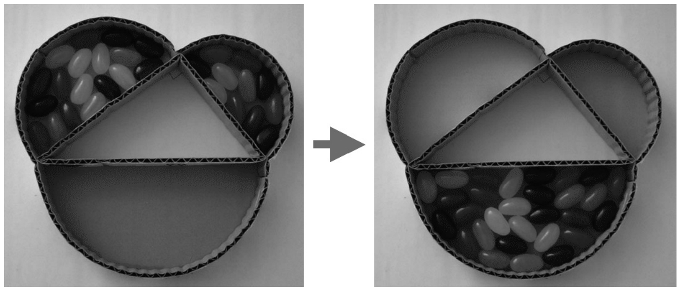

Figura 3 Extensión del teorema de Pitágoras para semicírculos

EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Los alumnos también pueden usar frijolitos de goma para explorar relaciones entre áreas cuando se construyen figuras semejantes en los lados de un triángulo rectángulo. En la figura 3 se muestra un tablero con tres semicírculos alrededor de un triángulo rectángulo y las cercas correspondientes. Los diámetros de los semicírculos son congruentes con los lados correspondientes del triángulo rectángulo. Los alumnos pueden describir la relación entre las áreas de los semicírculos en los lados del triángulo usando los frijolitos de goma. Podrán ver que la suma de las áreas de los dos semicírculos construidos sobre los catetos del triángulo es igual al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa. Desde luego que estas extensiones no son nuevas (Pólya, 1948; Flores Peñafiel, 1992), pero los alumnos siempre se sorprenden de que la relación pitagórica también es válida para figuras distintas de cuadrados.

CONEXIONES CON ÁLGEBRA

Los alumnos pueden extender el teorema de Pitágoras a semicírculos usando habilidades algebraicas tales como factorizar y simplificar expresiones algebraicas. Pueden hacer esto trabajando por pares o en pequeños grupos.

LAS LUNAS DE HIPÓCRATES

Utilizando el resultado de la segunda actividad, los alumnos pueden usar razonamiento deductivo para concluir que la suma de las áreas de las lunas formadas por los semicírculos (figura 6) es igual al área del triángulo rectángulo ABC. Las áreas de traslape de los semicírculos es también la diferencia entre el área del semicírculo construido sobre la hipotenusa y el área del triángulo.

COMENTARIOS FINALES

Las actividades descritas aquí no sólo son benéficas para los alumnos. Maestros en ejercicio y maestros en formación participaron activamente en una sesión en la cual se demostró empíricamente la equivalencia de áreas de figuras utilizando frijoles de goma (Yun, 2007). La evidencia empírica de ver cómo la misma cantidad de frijoles llenaba una figura geométrica y otra con la misma área sirvió como una fuente adicional de comprensión para los maestros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Flores Peñafiel, A. (1992), "La feria de Pitágoras", segunda de dos partes, *Educación Matemática*, vol. 4, núm. 2, pp. 62-78.

Fuys, D., D. Geddes y R. Tischler (1988), *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Pólya, G. (1948), "Generalization, Specialization, Analogy", *American Mathematical Monthly*, vol. 55, núm. 4, pp. 241-243.

Rodríguez Luévanos y A. Flores Peñafiel (1989), "Niveles de madurez matemática en el estudio de la geometría", en *Memorias de la Tercera Reunión Centroamericana y del Caribe "Construir sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa"*, San José, Costa Rica, pp. 180-185.

Van Hiele, P.M. (1986), *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press.

Yun, Jeong Oak (2007), *Three Activities for Teaching Geometry 5-8,* Manuscrito inédito, Universidad Estatal de San Goloteo.

ACTIVIDADES PARA LOS ALUMNOS

ACTIVIDAD 1

Para esta actividad vas a utilizar un tablero que consiste en un triángulo rectángulo con cuadrados sobre cada uno de los lados del triángulo. (No te comas los frijolitos que utilices para llenar los cuadrados.) Instala la cerca de cartón alrededor de los tres cuadrados e inserta la cerca triangular alrededor del triángulo central. Vacía frijolitos de goma en los dos cuadrados sobre los catetos del triángulo rectángulo y asegúrate de que los frijolitos llenen completamente los cuadrados con una sola capa y que no queden huecos grandes (figura 4a). Quita el triángulo de cartón que está dentro (figura 4b).

Figura 4a Llena los cuadrados sobre los catetos

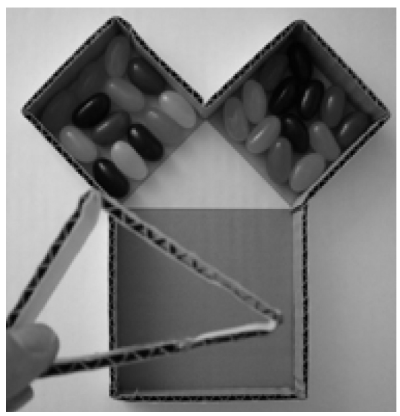

Figura 4b Quita la cerca triangular

Inclina el fondo del tablero para que los frijolitos de goma se deslicen hacia el cuadrado construido sobre la hipotenusa (figura 4c). Inserta la cerca triangular en su posición original otra vez (figura 4d).

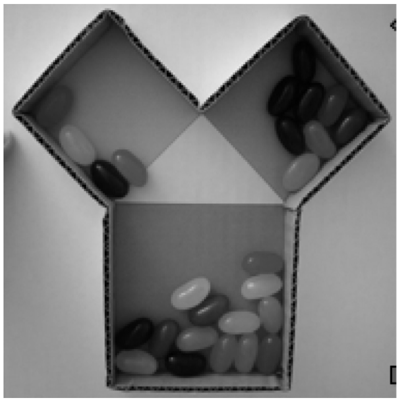

Figura 4c Desliza los frijolitos

Figura 4d Reinserta la cerca triangular

Aplana los frijolitos y observa si los frijolitos caben completamente dentro del cuadrado construido sobre la hipotenusa en una sola capa y si lo cubren completamente (figura 4e).

Figura 4e Los frijolitos cubren el cuadrado sobre la hipotenusa

¿Qué puedes decir acerca de la suma de las área de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo comparada con el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa?

Denota los catetos del triángulo como a y b y la hipotenusa como c. Expresa el área de cada uno de estos cuadrados utilizando estas letras. Área del cuadrado sobre el lado a ______. Área del cuadrado sobre el lado b ______. Área del cuadrado sobre el lado c ______. Escribe una expresión algebraica para describir la relación que descubriste entre las áreas. ____________________________

Actividad 2

Extensión del teorema de Pitágoras

Para esta actividad vas a usar el tablero que consiste en un triángulo rectángulo con semicírculos construidos sobre cada uno de sus lados (figura 5).

Instala la cerca de cartón alrededor de los tres semicírculos e inserta la cerca triangular alrededor del triángulo central. Vacía frijolitos de goma en los dos semicírculos construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo y asegúrate de que los frijolitos llenen completamente los cuadrados con una sola capa y que no queden huecos grandes. Quita el triángulo de cartón que está dentro.

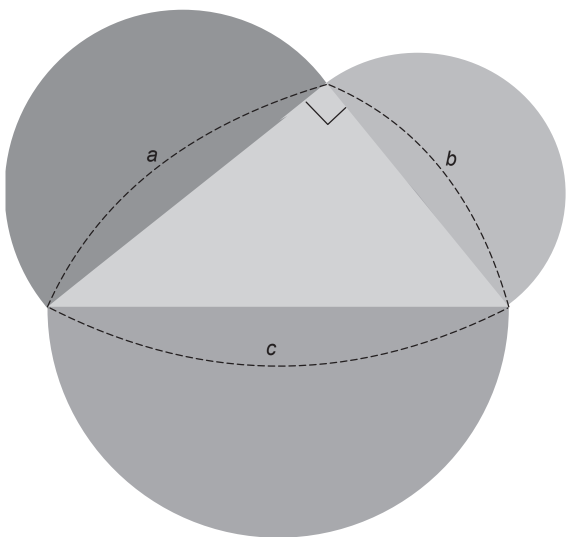

Figura 5 Tres semicírculos alrededor de un triángulo rectángulo

Inclina el tablero para que los frijolitos de goma se deslicen hacia el semicírculo construido sobre la hipotenusa. Inserta la cerca triangular en su posición original otra vez. Aplana los frijolitos y observa si caben completamente en una sola capa dentro del semicírculo construido sobre la hipotenusa y si lo cubren completamente. ¿Qué puedes decir acerca de la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo comparada con el área del semicírculo construido sobre la hipotenusa? Expresa tu hallazgo con tus propias palabras.

____

Actividad 3

Las áreas de los semicírculos

Vamos a denotar los dos catetos del triángulo rectángulo como a y b y la hipotenusa como c. En la actividad 1 descubriste que puedes expresar la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo como $a^2 + b^2 = c^2$. En la actividad 2 descubriste que la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo es igual al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa. Ahora vas a escribir expresiones algebraicas para las áreas de los semicírculos y sus relaciones. El diámetro de cada semicírculo es congruente con el lado correspondiente del triángulo. ¿Cuál es el radio de cada uno de los semicírculos sobre los lados del triángulo rectángulo? Radio del semicírculo sobre el lado a ______. Radio del semicírculo sobre el lado b ______. Radio del semicírculo sobre el lado c ______. ¿Cuál es el área del círculo de radio $\frac{a}{2}$? ____________ ¿Cuál es el área de un semicírculo de radio $\frac{a}{2}$? ______. Escribe una expresión algebraica para cada una de las áreas de los semicírculos. Área del semicírculo sobre el lado a ____________. Área del semicírculo sobre el lado b ____________. Área del semicírculo sobre el lado c ______. Usa notación algebraica para expresar la suma de las áreas de los dos semicírculos de radios $\frac{a}{2}$ y $\frac{b}{2}$ ____________. Utiliza notación algebraica para expresar que la suma de las áreas de los semicírculos sobre los catetos a

y *b* del triángulo rectángulo es igual al área del semicírculo sobre la hipotenusa *c*. ____

Factoriza y simplifica ambos lados de la ecuación $\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi+\frac{1}{2}\times\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi$ $=\frac{1}{2}\times\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi$ para mostrar que es equivalente a la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$.

Puedes hacer esto en varios pasos. Puedes, por ejemplo, multiplicar ambos lados por 2 y dividir ambos lados entre π. Escribe la ecuación simplificada __________________________. Ahora puedes expandir los términos cuadrados. Escribe la ecuación correspondiente ___________________. Finalmente puedes multiplicar ambos lados por 4 ___________________. Verifica que puedes invertir todos los pasos. Esto es, empieza con la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ y muestra paso a paso que, a partir de esta relación, puedes obtener la relación entre los semicírculos.

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi+\frac{1}{2}\times\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi=\frac{1}{2}\times\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi$$

Actividad 4

Área de las lunas de Hipócrates

Se construyen semicírculos sobre los lados del triángulo rectángulo ABC (figura 6). El semicírculo sobre la hipotenusa está encima del triángulo en vez de afuera. Este semicírculo forma dos lunas (cuartos crecientes c_1 y c_2) con los semicírculos de los catetos. El semicírculo sobre la hipotenusa se traslapa con los semicírculos de los catetos (áreas a_1 y a_2 fuera del triángulo de área *t*). El área del semicírculo construido sobre la hipotenusa está formada por la suma de las áreas $t + a_1 + a_2$. El área del semicírculo en uno de los catetos es igual a la suma $c_1 + a_1$. El área del semicírculo en el otro cateto es $c_2 + a_2$.

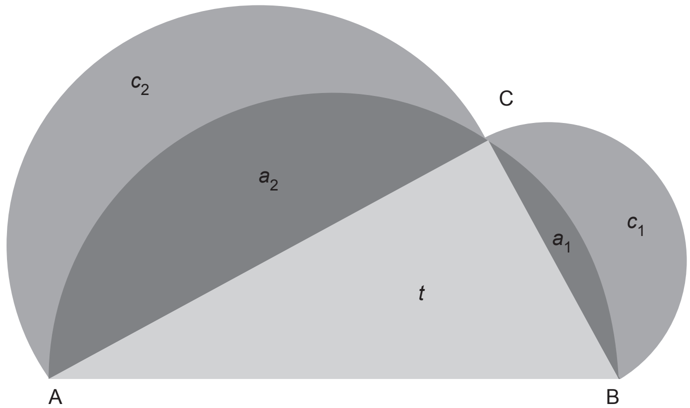

Figura 6 Lunas formadas por los semicírculos

En la actividad 2 descubriste que el área del semicírculo sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos sobre los catetos del triángulo. Usa este resultado y las relaciones de las áreas enunciadas arriba para encontrar la relación entre la suma de las áreas de las dos lunas con el área del triángulo rectángulo ABC. Enuncia esta relación con tus propias palabras.

DATOS DE LOS AUTORES

Alfinio Flores Peñafiel
Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Delaware
alfinio@udel.edu

Jeong Oak Yun
Curriculum and Instruction, Arizona State University
joyun@asu.edu