Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos

Matías Camacho, Ramón Depool y Sabrina Garbín

Resumen: En este artículo presentamos los resultados de una investigación en la que se muestran las características de las respuestas que un grupo de estudiantes aportó al utilizar el CAS (Computer Algebra System) *Derive* cuando trabajaron un conjunto de prácticas de laboratorio (PL) para el aprendizaje del concepto de *integral definida*. Del análisis de los resultados se obtienen elementos para conjeturar que los estudiantes no muestran dificultades al calcular integrales de funciones continuas, a la vez que las interpretan como el área bajo la gráfica de una función. Sin embargo, cuando las funciones son solamente continuas a trozos, o se trata de integrales que provienen de otro contexto, los estudiantes muestran dificultades que requieren un análisis de los aspectos cognitivos que se relacionan con el uso de un *software*.

Palabras clave: integral definida, problemas en contexto, representaciones semióticas.

Abstract: In this paper we present the research results showing the main features of the students' answers to a set of laboratory practices (LP) when they use the CAS (Computer Algebra System) *Derive*. From the research results analysis we obtain elements to allow us conjecture that students do not have difficulties when calculating definite integrals of continuous functions and at the same time they interpret this as the area under a curve. However, when the functions are only piecewise continuous, or the integrals come from other contexts, the students show difficulties, related to the use of a software, that need to be analysed from a cognitive point of view.

Keywords: definite integral, problems in context, semiotic representations.

Fecha de recepción: 24 de septiembre de 2007.

INTRODUCCIÓN

La *integral definida* es un concepto relevante para abordar una amplia gama de problemas que los estudiantes de Ingeniería utilizan en su programa de estudios. Está presente en diversos contenidos y se requiere en actividades de aprendizaje a lo largo de su formación universitaria. Para llevar a cabo estas actividades, los alumnos deben tener una sólida comprensión de este concepto. Es necesario identificar las dificultades que los estudiantes encuentran al aprenderlo para diseñar actividades de enseñanza que logren en el estudiante un aprendizaje más sólido. El uso de los CAS, en nuestro caso el software *Derive*, genera y opera distintas representaciones del concepto que pueden ayudar a su comprensión. Uno de los aspectos relacionados con el concepto de la integral definida tiene que ver con el tipo de respuesta que dan los estudiantes a problemas en diversos contextos. Se entiende como "problemas en diversos contextos" tanto los planteados en el ámbito estrictamente matemático como las aplicaciones a otras ciencias (Gravemeijer y Doorman, 1999, pp. 111-129).

En nuestra investigación, desarrollamos un curso que combina las clases habituales con prácticas de laboratorio, siguiendo un módulo instruccional diseñado por el equipo investigador que utiliza el CAS *Derive*, para posteriormente recolectar y analizar las actuaciones de los estudiantes en el laboratorio, mientras trabajan una serie de tareas en las que tienen la oportunidad de resolver problemas, en los que se necesita usar la integral definida para calcular el área de una región limitada por las gráficas de funciones continuas y continuas a trozos. Además, se formularon problemas sencillos contextualizados en términos de conceptos utilizados en la Física y la Ingeniería. En estos problemas, la integral definida no se interpreta como el área de una región.

En el módulo instruccional que se implementó, los estudiantes trabajaron en un entorno informático utilizando un programa de utilidades (PU), diseñado específicamente para el uso en el laboratorio (Camacho y Depool, 2003, pp. 119-140; Camacho, Depool y Socas, 2005, pp. 21-46, y Camacho, Depool y Santos-Trigo, 2005, pp. 243-264), que permite al estudiante calcular aproximaciones de la integral definida como área de figuras planas, mediante métodos gráficos y numéricos.

El objetivo general de esta investigación consiste en estudiar la manera en la que el uso del CAS ayuda a identificar aspectos que se consideran importantes al resolver problemas en distintos contextos (identificar información, resolver casos particulares, usar diferentes sistemas de representación, conversión y coordinación entre ellos, comunicar resultados), así como analizar si la interpretación de la integral definida como área determina la concepción de los estudiantes durante la resolución de tales problemas.

A partir del desarrollo de un análisis detallado de los modos de actuación de los estudiantes, nos proponemos aportar elementos que den respuesta a las siguientes peguntas de investigación:

- ¿Son capaces los estudiantes de identificar los aspectos relevantes para la resolución de problemas (identificar información, resolver casos particulares, usar diferentes sistemas de representación, conversión y coordinación entre ellos, comunicar resultados) en los que interviene la integral definida en diversos contextos?
- ¿De qué manera influye en los estudiantes la concepción de la integral definida interpretada como el área bajo la curva en el momento de resolver problemas presentados en varios contextos?
- Al resolver problemas, ¿hasta qué punto el uso de un software ayuda a los estudiantes a visualizar relaciones y aplicar diversos procedimientos?

MARCO CONCEPTUAL

Los elementos teóricos que sustentarán el desarrollo de nuestra investigación se configuran en torno a: representaciones semióticas (Duval, 1998, pp. 173-201), la aproximación instrumental hacia el uso de los CAS (Artigue, 2002, pp. 245-274), la caracterización de dificultades y errores (Socas, 2007, pp. 19-52) y, finalmente, la clasificación de problemas en contexto (Gravemeijer y Doorman, 1999, pp. 111-129).

Al trabajar con situaciones de aprendizaje en el ámbito didáctico-matemático, se requiere el uso de diferentes sistemas semióticos de representación: gráfico, numérico, verbal y algebraico. Duval (1998, p. 175) define los registros de representación semiótica como producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias restricciones de significados y de funcionamiento. Se puede considerar que las figuras de tipo geométrico, un enunciado en lenguaje habitual o una fórmula matemática pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Para Duval (1993, pp. 37-65), "toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa" y, además, "la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de, al menos, dos registros de representación y esta coordinación queda de manifiesto mediante el uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva".

Duval (1998, pp. 185-186) argumenta que la adquisición de los conceptos matemáticos en un individuo se dará en el momento en el que haya una coordinación libre de contradicciones en, por lo menos, dos diferentes registros de representación semiótica del objeto. Al analizar el uso de los registros de representación semiótica, se deben tener en cuenta el reconocimiento del registro, las transformaciones en el interior de éste (tratamientos) y la conversión entre ellos.

En nuestra investigación consideramos principalmente tres registros, aunque es obvio que el registro verbal también se verá involucrado. El primer registro es el gráfico, en el que el estudiante elabora gráficos en un sistema de ejes cartesianos con el CAS. El segundo es el algebraico, donde el estudiante plantea, opera y resuelve integrales definidas. El tercero es el numérico, en el que el estudiante utiliza el CAS para obtener aproximaciones numéricas o fórmulas de geometría elemental para aproximar la medida del área de una región.

Es importante mencionar que las diferentes representaciones que utilizan CAS adquieren otras dimensiones debido a las capacidades de cálculo inherentes del sistema.

El uso de CAS ofrece a los estudiantes la oportunidad de representar gráficamente la información y establecer relaciones para resolver los problemas en términos de sus aproximaciones visuales, numéricas y algebraicas. De aquí que resulte importante examinar el proceso que los estudiantes utilizan para transformar un artefacto tecnológico en un instrumento de resolución de problemas, atendiendo a sus propiedades y significados, conectando y relacionando distintas representaciones semióticas y operaciones que surgen mientras resuelven problemas. En este proceso de transformación, los estudiantes necesitan desarrollar habilidades y estrategias para usar el software y generar representaciones apropiadas que les ayuden a proponer y discutir las preguntas pertinentes que surgen al examinar y trabajar con el problema. El uso de la herramienta resulta importante para los estudiantes cuando se trata de explorar diversos enfoques (numérico, algebraico y gráfico). Los estudiantes también pueden usar el software para calcular directamente las integrales definidas. Ahora bien, ¿cómo se pueden reconciliar los aspectos técnicos y algorítmicos cuando se utiliza un CAS? Artigue (2002, p. 248) señala que "las técnicas" poseen también un valor epistémico, puesto que permiten desarrollar una serie de preguntas que facilitan la comprensión de los objetos matemáticos que involucran. Para la comprensión de operaciones y conceptos, resulta importante que los estudiantes analicen y transformen los resultados producidos por el CAS. Es decir, "la técnica", mediada por la tecnología o no, realiza no sólo una función pragmática de resolución de las tareas matemáticas, sino también una función epistémica, que facilita la construcción de los conceptos matemáticos (Ruthven, 2002, p. 283).

Para justificar el proceso de cómo los estudiantes pueden transformar un artefacto en un instrumento de resolución de problemas al hacer uso del CAS, es importante que los estudiantes desarrollen una serie de esquemas cognitivos específicos para transformar un dispositivo físico o material en un instrumento. Artigue (2002, p. 250) señala que, en un principio, el artefacto no tiene un valor de instrumento. Se vuelve un instrumento a través del proceso, denominado génesis instrumental, que requiere la construcción de esquemas personales o, de manera más general, la apropiación de esquemas sociales que existen con anterioridad. Esta génesis instrumental puede explicarse en términos de restricciones y potencialidades del artefacto y su relación con los esquemas cognitivos que los estudiantes desarrollan como resultado de usar la herramienta de manera progresiva en actividades de resolución de problemas.

El proceso que los estudiantes siguen para transformar un artefacto en un instrumento no sólo representa el modo de usar la herramienta, sino también su sentido y conceptualización de las matemáticas y las actividades de resolución de problemas. Es decir, el uso de herramientas influye en la manera en la que los estudiantes tratan directamente con las actividades matemáticas. Este proceso de transformación va acompañado por las características de la herramienta (las potencialidades y restricciones) y por la actividad del sujeto (Trouche, 2005, pp. 137-162). Con el uso del CAS, los estudiantes construyen un sistema conceptual que guía sus conductas matemáticas. Ruthven (2002, p. 279) puntualiza que "construir un sistema conceptual coherente y un concepto sólido involucra la coordinación progresiva de numerosos esquemas específicos".

En el trabajo con un instrumento informático se deben considerar dos aspectos: la congruencia y la transparencia. La congruencia se da cuando una técnica ejecutada en varios entornos puede ser reconocida como tal, y se percibe como dos maneras distintas de aplicar una misma técnica en lugar de dos técnicas diferentes sin relación. En cuanto a la transparencia, ésta consiste en que el estudiante es capaz de "ver a través" del modo en el que encuentra y presenta sus resultados, basándose en su experiencia con lápiz y papel (Drijvers, 2002, pp. 221-228).

Para caracterizar lo que consideramos como "problemas en contexto", podemos mencionar que, en Física, los problemas se refieren a interpretaciones de fenómenos físicos, tales como movimiento de una partícula, flujo de carga eléctrica en un circuito, etc. En Ingeniería, se refieren al cálculo de estructuras, resistencia de materiales, etc. En Matemáticas, a aspectos abstractos, aplicados y didácticos. Consideramos que los "problemas en contexto" son tanto aquellos que se refieren al campo matemático como los que pertenecen a otra disciplina. El papel de los problemas en contexto no sólo debe sujetarse y limitarse a las aplicaciones en otras disciplinas al final de una secuencia de aprendizaje, sino que los problemas deberían considerarse como elementos motivadores del aprendizaje de los estudiantes (Gravemeijer y Doorman, 1999, pp. 111-129; Garbín, 2005, pp. 169-193).

Las dificultades y errores al resolver problemas matemáticos pueden influir tanto en el reconocimiento como en el tratamiento y conversión de registros de representación semiótica. Al respecto, Socas (2007, pp. 19-52) presenta una caracterización de las dificultades y errores de una manera organizada que constituirán un referente para el desarrollo de nuestro trabajo. Las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. El error tiene procedencias diferentes, pero, en todo caso, se considera como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de una falta específica de conocimiento.

METODOLOGÍA

El estudio que presentamos es de corte cualitativo, un estudio de casos de tipo interpretativo y descriptivo. El trabajo se desarrolló durante un semestre de la siguiente manera: se impartió el programa oficial de la asignatura Cálculo I (funciones, límites, continuidad, derivadas e integrales). De las dos secciones de 40 estudiantes, se seleccionaron 10 para participar en la investigación y se formaron equipos de 2 estudiantes por computadora. Uno de ellos tomó la decisión de no continuar con la experiencia, por lo que uno de los equipos estuvo constituido por un solo estudiante. Para la selección de los estudiantes, se utilizaron dos criterios: el primero, que no hubieran cursado la materia con anterioridad, a fin de que no tuviesen conocimientos previos de Cálculo Integral, y el segundo fue la calificación obtenida en el primer lapso (de cuatro lapsos que consta el semestre), con el objeto de que la muestra cubriese los diferentes rangos en la escala de evaluación (alto, medio y bajo rendimiento). Los equipos se formaron con la intención de combinar, por una parte, estudiantes con rendimiento medio-alto y con rendimiento medio (parejas 2 y 3) y, por la otra, estudiantes con rendimiento medio y rendimiento

Cuadro 1 Distribución de los estudiantes

Equipos	Integrantes
Pareja 1	Marcos (13/25) y Pedro (9/25)
Pareja 2	Maream (18/25) y Carlos (11/25)
Pareja 3	Dulce (13/25) y Yisbel (23/25)
Pareja 4	Ricardo (8/25) y Vicente (11/25)
Estudiante 5	Juan (13/25)

bajo (parejas 1 y 4). Este criterio para integrar las parejas tenía como finalidad observar la interacción entre estudiantes de diferentes niveles. En definitiva, el grupo quedó constituido por cinco estudiantes de una sección y cuatro de la otra. En el cuadro 1 se identifican los participantes en el estudio.

La secuencia de enseñanza se desarrolló de la siguiente manera: a los estudiantes seleccionados se les impartió un curso, combinando las clases habituales con prácticas de laboratorio (PL) en computadora y siguiendo un módulo instruccional diseñado por el equipo investigador en el que las actividades se debían resolver haciendo uso de *Derive*. El módulo contiene nueve prácticas. En la primera se trabajó sobre conocimientos generales del software. De la 2 a la 5, se estudiaron las funciones, límites y derivadas, respectivamente. En esas prácticas se aplicaron programas sencillos de utilidades, similares a los que aparecen en algunos libros de texto, así como los comandos de cálculo directo contenidos en los diferentes menús del *Derive*. Las prácticas 6, 7, 8 y 9 se utilizaron para el estudio de la integral definida. En las tres primeras, los estudiantes aplicaron el programa de utilidades (Camacho y Depool, 2003, pp. 119-140) para aproximar el valor de la integral definida de manera gráfica y numérica mediante el uso de figuras simples (rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos). En las actividades propuestas en estas PL, las funciones utilizadas eran funciones continuas o continuas a trozos. En la última práctica se propusieron dos problemas en contextos diferentes al estrictamente matemático.

Las sesiones de laboratorio fueron videograbadas y transcritas para realizar el análisis posterior. Durante las sesiones de laboratorio, se requería que los estudiantes explicaran su manera de actuar mientras resolvían las diferentes tareas.

LAS ACTIVIDADES CONSIDERADAS EN EL ANÁLISIS

A continuación, mostramos cuatro de los problemas utilizados en las cuatro últimas PL (6, 7, 8 y 9) en las que centraremos nuestro análisis.

PROBLEMA 1

Dada la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

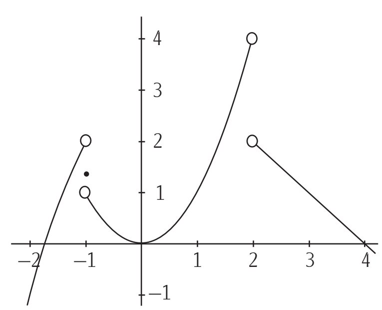
a) Aproxima mediante los métodos gráfico y numérico el área bajo la curva en el intervalo $[-1, 2.5]$.
b) Aproxima mediante los métodos gráfico y numérico el valor de la integral definida en el intervalo $[-1, 2.5]$.
c) Calcula, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, el área de la región en el intervalo $[-1, 2.5]$.
d) Calcula, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, la integral definida en el intervalo $[-1, 2.5]$.

Este problema se enmarca en el contexto matemático. Se trata de una función continua para la que se pide el cálculo del área/integral por los distintos métodos que aparecen incluidos en el PU. La gráfica de la función posee partes situadas tanto por arriba del eje OX como por debajo de éste, lo que permite distinguir cuando se puede interpretar como un área la integral definida.

PROBLEMA 2

Dada la función

$$f(x)\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$$



a) Calcula, en caso que sea posible, el área de la región limitada por la curva en el intervalo [–2, 3].
b) Si es posible, estima el valor de la integral definida en el intervalo [–2, 3]. Si no es posible, explica por qué.

Al igual que en el problema anterior, éste pertenece al contexto matemático. Se trata de una función continua a trozos para la que se pide el cálculo del área/integral en un cierto intervalo que contiene los puntos de discontinuidad.

PROBLEMA 3

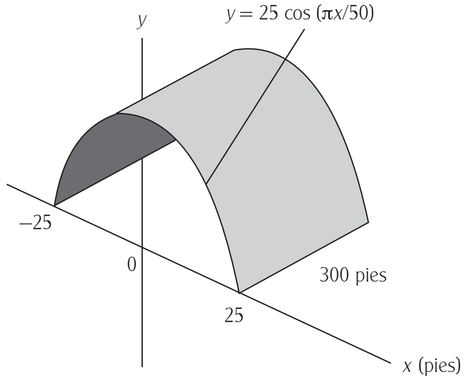
Una partícula se mueve a lo largo de una recta, de modo que su velocidad es $v(t) = t^2 - 2t - 8$, donde el tiempo es t. La velocidad se expresa en metros por segundo.

a) Calcula el desplazamiento de la partícula en el periodo $1 \leq t \leq 6$.
b) Calcula la distancia recorrida durante este lapso (Stewart, 1999, p. 354, 357).

Éste es un problema en el contexto de la cinemática. Se involucran en él diversos conceptos de Física tales como velocidad, posición, distancia recorrida. La integral ayuda a identificar la relación que existe entre estos conceptos.

PROBLEMA 4

Una empresa de Ingeniería se ofrece a construir un túnel. Éste tiene 300 pies de largo por 50 pies de ancho. La forma del túnel es un arco cuya ecuación es $y = 25 \cos(\pi x/50)$. La parte superior del túnel se tratará con un sellador impermeable que tiene un costo de 1.75 dólares por pie cuadrado. ¿Cuál es el costo total de la aplicación del sellador? (Thomas y Finney, 1996, p. 399.)



Por último, un problema en un contexto hipotético de Ingeniería (Barrera y Santos, 2002, pp. 8-37), en el que el cálculo del área de una superficie no resulta como aplicación directa de la integral, sino que el concepto de integral se utiliza para calcular la longitud de un arco de curva y, a partir de esto, se puede calcular el área.

INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta sección presentamos la interpretación y el análisis de las respuestas y actuaciones que exhibieron los estudiantes cuando resolvieron las tareas propuestas.

Para la resolución de las tareas propuestas, los estudiantes utilizaron el PU, el cual tiene como características principales:

- Representación gráfica de las diferentes aproximaciones al área limitada por una función con el eje OX: rectángulos inferiores, rectángulos superiores, punto medio, trapecios y trapecios parabólicos (aproximación de Simpson).
- Aproximaciones numéricas de la integral de una función en un intervalo dado. Las hemos denominado matrices de aproximación y recogen, en la primera columna, el número de subintervalos de integración que se consideran; en la segunda, la aproximación con rectángulos inferiores; en

la tercera, con rectángulos punto medio; en la cuarta, con trapecios; en la quinta, con trapecios parabólicos, y en la sexta, con rectángulos superiores.

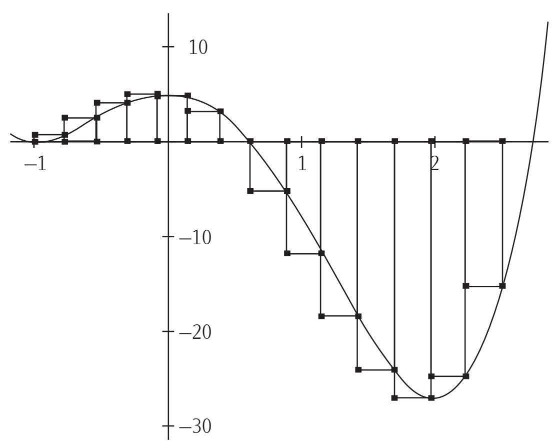
Problema 1

En este problema los estudiantes utilizan eficazmente el CAS, mostrando con ello un manejo adecuado de los procedimientos instrumentales. Por ejemplo, Jisbel y Dulce (pareja 3) presentan su solución haciendo uso de las dos representaciones: la gráfica (figura 1) y la numérica. Construyen con el PU la matriz de aproximación (tablas 1 y 2).

Se observa que identifican los puntos de intersección de la gráfica con el eje OX y calculan el área de los rectángulos de la partición para obtener los valores aproximados del área total y de la integral definida.

Figura 1 Aproximación de área y de integral

Representación gráfica



Representación numérica

Tabla 1 Matriz de aproximación en [0.612564, 2.5]

$$\begin{bmatrix} 10 & -35.94123716 & -32.62523379 & -32.31864584 & -32.52213935 & -28.69605452 \\ 16 & -34.72185046 & -32.56304451 & -32.44317666 & -32.52295147 & -30.16450286 \\ 22 & -34.13984488 & -32.54423456 & -32.4808163 & -32.52305679 & -30.82178773 \\ 28 & -33.79909231 & -32.53614859 & -32.49699299 & -32.52308211 & -31.19489368 \end{bmatrix}$$

Tabla 2 Matriz de aproximación en [–1, 0.612564]

$$\begin{bmatrix} 10 & 3.814328507 & 4.672262771 & 4.618599589 & 4.654783956 & 5.422870671 \\ 16 & 4.136555209 & 4.661323114 & 4.640409601 & 4.654414338 & 5.144263993 \\ 22 & 4\,281093825 & 4\,658033587 & 4\,646979667 & 4\,654366403 & 5.01286551 \\ 28 & 4.362141419 & 4.65662224 & 4.649800199 & 4.654354879 & 4.937458979 \end{bmatrix}$$

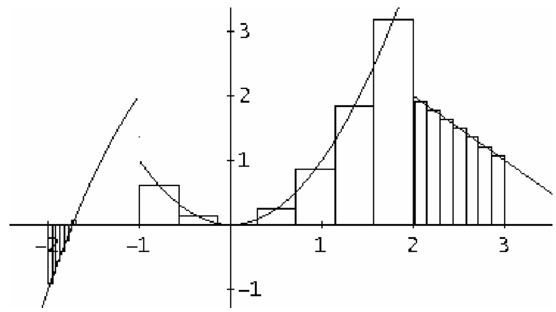
Los estudiantes también calculan la integral de manera directa haciendo uso del comando Cálculo/Integrales de *Derive*. Se evidencia que emplean dos tipos diferentes de registros de representación semiótica. El uso del registro algebraico queda implícito cuando se aplican los procesos internos del software.

En la resolución de esta actividad, los estudiantes, apoyándose en la representación gráfica, no muestran dificultades para diferenciar los conceptos de área e integral definida.

PROBLEMA 2

Es importante notar que tres de los equipos (1, 4 y 5) siguieron el proceso de aproximar, gráfica y numéricamente, áreas e integrales utilizando el PU, pasando por alto que al sólo pedirles el cálculo del área y la integral, bastaba con utilizar directamente el comando de *Derive* Cálculo/Integrales. Cometen errores cuando toman los extremos de los intervalos de integración en los puntos de discontinuidad de la función. Podemos afirmar que el proceso de enseñanza seguido haciendo uso del PU sin suficiente reflexión los conduce a resolver el problema de manera rutinaria.

Figura 2



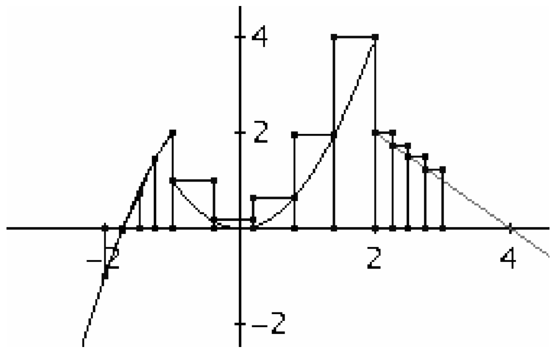
Por ejemplo, Ricardo y Vicente (pareja 4) construyen la gráfica (figura 2) y consideran los intervalos [−2, −1.69], [−0.999, 1.999], [2.01, 3] para aproximar mediante rectángulos en el punto medio. Se observa que esta pareja no toma como extremos de los subintervalos de integración los puntos donde la función es discontinua. En su lugar, eligen valores aproximados (−0.999 en lugar de −1, 1,999 y 2,001 en lugar de 2). Estos estudiantes eligen lo que ellos consideran "el punto más próximo al extremo". Este error podría estar relacionado con al menos dos conceptos centrales del cálculo: continuidad y completitud de los números reales. Para una mejor comprensión de estas dificultades, se debería profundizar en los aspectos epistemológicos y cognitivos de dichos conceptos. Se observa, además, que no representan rectángulos en el intervalo [−1.69, −1].

El equipo formado por la pareja 2 calcula el área directamente con el comando Cálculo/Integrales de *Derive* y considera que el intervalo de integración es [−2, 3]. Los estudiantes no se percatan de que la función está definida de diferente manera en los distintos subintervalos. Es decir, plantean y resuelven la integral definida, calculándola sólo en el intervalo [−2, 3].

El esquema cognitivo que estos estudiantes han desarrollado en el trabajo con funciones continuas no les resulta útil para resolver este tipo de problemas; las discontinuidades de la función los llevan a cometer una serie de errores.

Yisbel y Dulce (pareja 3) utilizan también los métodos gráfico (figura 3) y numérico sin que se les pida, pero en este caso utilizan trapecios para la primera sección de curva, aunque no lo hacen para la última (en ésta daría el valor exacto del área). El esquema que mantienen consiste en la aplicación de un procedimiento rutinario sin cuestionarse sobre la mejor manera de resolver el problema. Es una

Figura 3



automatización de un proceso, "me dan un problema que parece similar a uno anteriormente trabajado y aplico el mismo esquema".

La resolución algebraica del problema la extrapolan directamente del procedimiento utilizado para el caso de una función no definida a trozos, es decir, calculan directamente la integral con el comando "Cálculo".

Figura 4

$$\int_{-2}^{3} \begin{bmatrix} \mathrm{IF}(x < -1,\ -x^2 + 3) \\ \mathrm{IF}(x = -1,\ 1.36) \\ \mathrm{IF}(-1 < x < 2,\ x^2) \\ \mathrm{IF}(x > 2,\ -x + 4) \end{bmatrix} dx \quad \begin{bmatrix} 0.6666777639 \\ 0 \\ 3.000132202 \\ 1.545712809 \end{bmatrix}$$

Y añaden que:

Las integrales nos dan positivas, lo que hicimos fue sumar y nos dio un valor. Después calculamos la integral, pero de toda la matriz y nos dio un resultado en forma de matriz (figura 4). *Pero sabemos que estos resultados son los mismos que nos dieron, aproximados a los que nos dieron cuando lo calculamos por separado. Entonces lo que hicimos fue sumar y nos dio un valor muy aproximado al que nos dio cuando la calculamos por separado.*

El área es 5.212522774.

Escriben en la pantalla:

Al calcular la integral definida entre −2 y 3, el resultado se expresa en una matriz, debido a que es una función seccionalmente definida, dándonos el valor del área en cada porción de la gráfica. El valor del área sería la suma de los valores absolutos de la medida de cada porción.

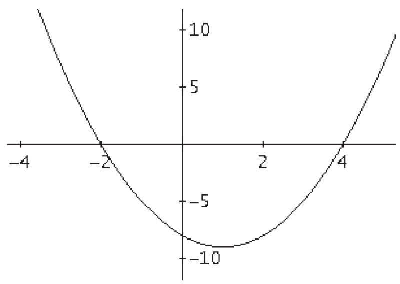
Estas estudiantes, a pesar de que calculan el valor de la integral definida, no se cuestionan la manera como *Derive* presenta la información. Simplemente aceptan las respuestas que les da el software.

En este problema se observan varias cuestiones: a pesar de que, cuando trabajaron en el problema anterior con la función continua, fueron capaces de determinar cuáles eran las propiedades relevantes para su resolución, en este problema sucedió lo contrario, es decir, no son capaces de establecer una conexión entre los resultados obtenidos con los registros algebraico y gráfico, son incapaces de identificar con coherencia la información suministrada por el problema y no coordinan coherentemente los diferentes registros utilizados. Resuelven correctamente la tarea y cometen errores. El hecho de que la función sea continua a trozos parece influir de manera notoria en su razonamiento. Los integrantes del equipo 3 trataron de aplicar el mismo procedimiento directo que el utilizado en el primer problema. Se puede decir que se centraron exclusivamente en los aspectos instrumentales, sin que mediase una reflexión en relación con lo que pudiese ser la mejor manera de resolver el problema.

Problema 3

En este problema, los estudiantes fueron capaces de representar sin dificultad la función cuadrática y calcular la integral en los intervalos [1, 4] y [4, 6]. Sin embargo, cuando descomponen el intervalo de integración no consideran el valor absoluto de la función para el cálculo de la distancia, sino que calculan la integral y luego toman el valor absoluto, lo que evidencia el error conceptual que identifica $\int_b^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$ (figura 5).

Figura 5



$$\int_1^4 (t^2 - 2 \cdot t - 8)\, dt$$

-18

$$\int_4^6 (t^2 - 2 \cdot t - 8)\, dt$$

14.66666666

$$\int_1^6 (t^2 - 2 \cdot t - 8)\, dt$$

-3.333333333

$\text{Area} := |-18| + 14.66666666$

$\text{Area} := 32.66666666$

Cuando se les preguntó acerca del significado de los resultados, Marcos (M) y Pedro (P) (pareja 1) señalaron:

P: El desplazamiento es algo así como el arco (figura 6)*, la distancia total recorrida y el desplazamiento es la medida de lo recorrido.*

M: Si lo llevamos a matemática, el desplazamiento es la integral y la distancia es el área.

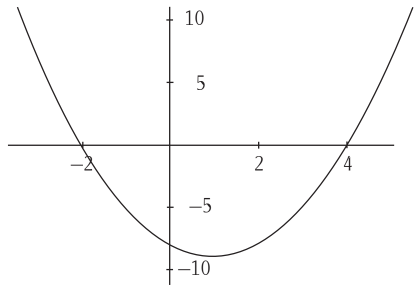
Figura 6

Dulce (D) y Yisbel (Yi) (pareja 3) indicaron al respecto:

Yi: Que la distancia es todo el recorrido que hizo la partícula (indicaron con el cursor las porciones en la gráfica, figura 7) *y el desplazamiento es como la distancia que se encuentra del punto de partida. Por ejemplo, porque él puede ir y venir al mismo punto, entonces el desplazamiento será cero, y si recorre más a la izquierda del punto será negativa.*

Figura 7

Figura 8



Juan (J) dijo:

J: *Que es un desplazamiento que va hacia la izquierda y, cuando voy a buscar la distancia, es el valor absoluto de las integrales, entonces sería desde 1 hasta 4* (señaló en la gráfica la porción), *en valor absoluto, porque éste es negativo* (señaló la porción bajo el eje OX) *y desde 4 hasta 6* (señaló en la gráfica la porción). *Entonces calculo primero la integral. Entonces, sumaría los dos resultados... y ése es el valor de la distancia recorrida* (figura 8).

Ricardo (R) y Vicente (V) (pareja 4) señalaron ante la pregunta del investigador (I):

I: *¿Qué significa* $s(t) = -3.3333333333$*?*
R: *Que se desplaza a la izquierda, ya que es negativa.*
I: *¿Ésa es la primera parte?*
R: *Sí.*
I: *La segunda parte ¿cómo piensas hacerlo?*
R: *Vamos a ver cómo lo hacemos.*
V: *Vamos a tener que graficar y resolvemos por integrales, los intervalos que den por debajo y los que den por arriba.*
I: *¿Por qué?*
V: *Porque la parte de abajo será negativa y una distancia no puede ser negativa.*
I: *¿Cómo sabes que es negativa?*
R: *Primero hay que graficar para ver si hay parte negativa.*
V: *Suponiendo si una parte por debajo, le aplicamos valor absoluto.*

Finalmente, Maream (Ma) y Carlos (C) (pareja 2) dicen:

C: *El desplazamiento nos da negativo, pero sabemos que es que se desplaza hacia la izquierda.*
I: *¿Cuánto te da la distancia?*
C: *32.6666.*
I: *¿Cuál sería el movimiento de la partícula? Porque una te da −3 y el otro 32.666.*
Ma: *Este 3, es que él se devuelve varias veces.*

Nótese que, en el proceso de solución de este problema, los estudiantes no usan los métodos de aproximación por rectángulos, trapecios, etc. Se ha podido observar que la interpretación de los conceptos físicos involucrados es poco precisa e, incluso, la representación matemática de dichos conceptos es equivocada, pues no tienen claro que la igualdad $\int_b^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$, no se cumple en general.

Yisbel y Dulce (pareja 3) relacionaron la integral definida con el desplazamiento y el valor del área con la distancia; mientras que Marcos y Pedro (pareja 1) confundieron estos términos con la longitud de la curva; Maream y Carlos (pareja 2) creyeron que el valor negativo está asociado con una cierta oscilación de la partícula; Juan supuso que el problema se remite al simple cálculo de la integral y el área, aunque no se puede asegurar que lo relacione con el movimiento de la partícula sobre una recta; Ricardo y Vicente (pareja 4) tienen la misma concepción que Juan. Los estudiantes no logran interpretar adecuadamente el significado de la integral definida cuando se aplica a una situación en un contexto diferente al matemático.

Problema 4

En cuanto a este problema, los estudiantes, al usar *Derive*, debían calcular la longitud del arco de curva entre −25 y 25 para, a continuación, calcular el área de la superficie que cubre el túnel (multiplicando por 300), para finalmente calcular el monto total multiplicando por 1.75. En la siguiente figura se muestra el cálculo hecho con *Derive*.

Figura 9

$f(x) := 25\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{50}\right)$	$\int_{-25}^{25}\sqrt{1+\left(-\frac{\pi\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\pi\cdot x}{50}\right)}{2}\right)^2}\,dx$	$2.195543208\cdot10^4$
$\frac{d}{dx}f(x)$	73.18477362	$2.195543208\cdot10^4\cdot1.75$
$-\frac{\pi\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\pi\cdot x}{50}\right)}{2}$	$73.18477362\cdot300$	$3.842200613\cdot10^4$

El costo total es aproximadamente de $38 422.

En este problema se observaron una serie de dificultades que se manifestaron a partir de algunos errores cometidos por los estudiantes.

Marcos (M) y Pedro (P) (pareja 1):

M: *Nos piden que busquemos el costo total por la aplicación del sellador sobre la superficie de un túnel, pero entonces, para poder buscar toda el área de la superficie del túnel, nos daban la función del arco del túnel. Entonces buscamos el área.*
I: *¿El área?*
M: *La integral.*
P: *Integramos la función.*
...
I: *¿Cuánto dio la integral?*
M: *Desplaza el cursor sobre las sentencias sin escoger ninguna.*
I: *¿Dónde está la función?*
M: (Indican la expresión)

$$f(x) := 25\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{50}\right)\int_{-25}^{25}25\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{50}\right)dx \quad 2.387324146.10^5$$

...

I: *¿Tú crees que la medida del arco se calcula con la integral de esa función?*

M: *El arco en sí no es la función que nos dieron y la integral.*

P: *Viene siendo la medida del que nos daba aquí, entre −25 y 25,* ***la medida del área del arco,*** *pero así, en forma plana, multiplicándola por una profundidad de 300 pies, nos da el área total del túnel.*

Se observa que, a pesar de que los estudiantes tienen la idea de cómo resolver el problema, cometieron varios errores; el primero corresponde a la aplicación de la fórmula para calcular la longitud del arco; esto tiene que ver con el contenido matemático. El segundo está relacionado con la idea que mantienen los estudiantes de la integral definida asociada al área de una región plana.

Por otra parte, Maream (Ma) y Carlos (C) (pareja 2) señalaron:

Ma: *Primero copiamos la ecuación.*

I: *¿Después?*

Ma: *Graficamos. Como me dicen que está entre −25 y 25. Entonces calculamos la integral de esa ecuación. Eso me da 795.7747154.*

I: *¿Eso es qué?*

Ma: *No sé.*

I: *¿Qué tienes escrito en el papel?*

Ma: *Lo que copié. Aquí me dicen que tiene 300 pies de largo por 50 de ancho. El área de esa lámina, que es como un rectángulo, sería para mí 15 000 pies^2. Ahí me dicen que por cada pie^2 es 1.75 dólares. Entonces dije que 15 000 pies^2 por 1.75, para mí éste sería el costo, pero así manual, pero aplicando la integral me da 795.7747154.*

Maream y Carlos consideran que el problema se resuelve calculando la integral directamente. No relacionan el concepto de integral definida con lo que les pide el problema y, como consecuencia, no logran explicarse por qué se obtienen resultados diferentes cuando resuelven (mal) el problema con lápiz y papel (figura 10) y cuando creen que lo resuelven con *Derive*. Esta falta de coordinación entre dos registros les impide avanzar. Al igual que la pareja anterior, las respuestas de estos estudiantes muestran que no han identificado cuál es la información relevante del problema.

Figura 10

Largo = 300pies
Ancho = 50pies.
Costo = 1,75 dolares por pie^2

$$A = l\ a$$
$$A = 300\ 50$$
$$\boxed{A = 15000\ \text{pie}^2}$$

$$15000\,\cancel{\text{pie}^2}\ \frac{1{,}75}{1\,\cancel{\text{pie}^2}} =$$

Ricardo (R) y Vicente (V) (pareja 4), manifestaron lo siguiente:

R: *Primero nos piden la longitud del arco que describe el túnel.*
I: *¿La longitud del arco? ¿Cómo es eso? ¿Qué es lo que piden?*
R: *El costo total es la cosa. De la forma que forma un túnel, que es moldeado por un sellador y nos dan la ecuación del túnel. Pero para buscar la longitud de una curva, primero hay que usar una ecuación, primero derivamos la función, elevamos al cuadrado, le sumamos 1 y elevamos a la raíz, integramos. Pero nos piden el costo, el costo sería esto por 300, que sería el largo del túnel y luego multiplicado por 1.75, que es el metro cuadrado, nos daría el costo del túnel, del material. En conclusión el costo total del túnel será de $38 422.*

Se observa que Ricardo y Vicente identificaron correctamente la información y los procesos que les ayudaron a resolver el problema. Sin embargo, aparecen en sus intervenciones algunas imprecisiones en la manera de comunicar sus ideas matemáticas.

Juan (J), indicó que:

J: *Lo primero que dicen es que calcule el costo total, entonces tendría* $F(x) := 25\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{50}\right)$ *Esa F(x) derivada, ese valor lo elevo al cuadrado para poderlo meter en la fórmula, a eso le busco la integral* $\int_{-25}^{25} \sqrt{\left(1+\left(-\frac{\pi\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\pi\cdot x}{50}\right)}{2}\right)^2\right)}$*, eso me daría 73.18477362.* ***Este resultado es el largo.*** *Para calcular el área total, es el largo por el ancho, entonces sería 73.18477362 por 50, que el ancho, eso me da 3659.238681; eso lo multiplicamos por 1.75 dólares, que es lo que vale cada pie cuadrado y eso me daría el valor total del costo (le da 6 403.66).*

Se observa que, al igual que la pareja anterior, Juan no muestra dificultades en la resolución del problema. Sin embargo, confunde la profundidad del túnel con su ancho.

En la resolución de este problema, se tienen elementos para conjeturar que los estudiantes no aplican correctamente la interpretación de una integral definida en contextos no matemáticos, incluso cuando la integral se utiliza para calcular longitudes de arco en lugar de áreas (pareja 1). Es pertinente destacar que Maream y Carlos (pareja 2) exhiben conflictos en el proceso de transitar entre representaciones. También muestran una interpretación errónea de la información.

CONCLUSIONES

Del análisis realizado se ha podido observar que, cuando los estudiantes trabajan con funciones continuas en problemas situados en un contexto matemático, logran identificar con eficiencia la información suministrada en el problema y utilizan los diferentes sistemas de representación haciendo conversiones entre ellos y logrando la coordinación que señala Duval (1993).

Sin embargo, trabajando también en el contexto matemático, cuando en el problema intervienen funciones continuas a trozos, presentan dificultades de interpretación, lo que muestra una falta de coordinación entre los diferentes sistemas de representación, tanto cuando plantean su resolución como cuando calculan las integrales. Hemos observado que, cuando tienen que utilizar como límites de integración puntos en los que la función no es continua, cometen errores relacionados con una comprensión parcial del concepto de continuidad.

Cuando los problemas están fuera del contexto matemático, como es el caso de los problemas 2 y 3, en los que la integral no está asociada al cálculo del área, los estudiantes muestran diferentes errores que nos permiten afirmar que, al introducir el concepto con un fuerte componente geométrico (haciendo uso de la diversidad de aproximaciones suministradas por el PU), se presentan grandes dificultades para interpretar la integral definida como un valor que puede medir longitudes (desplazamientos, arcos de curva, etc.). Los estudiantes identifican, en algunos casos, de manera incorrecta la información contenida en el problema, haciendo un uso incorrecto de las diferentes representaciones.

En cuanto al uso del CAS, hemos visto que contribuye eficientemente a promover la construcción del concepto de integral definida cuando aparece asociado al cálculo del área. Sin embargo, en otros contextos distintos al matemático, se convierte en un simple artefacto de cálculo y se queda incompleto el proceso de génesis instrumental necesario para una apropiación total de la herramienta tecnológica como un instrumento de aprendizaje de los conceptos matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al doctor Fernando Barrera Mora por sus valiosas sugerencias y aportaciones a la versión final de este trabajo, fruto de una serie de discusiones realizadas durante su estancia en la Universidad de La Laguna, financiada por el Proyecto de Investigación PIFI 3.4 Cuerpos Académicos. Asimismo, también quieren agradecer a los árbitros sus críticas e indicaciones que ayudaron a mejorar sustancialmente el trabajo.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente con el Proyecto de Investigación de la DGI del Ministerio de Educación y Ciencia con referencia SEJ2005-08499, España. Proyecto de la Dirección de Investigación y Postgrado de la Universidad Politécnica “Unexpo”, P-EB-2008-01, Venezuela.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2002), "Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and dialectics between technical and conceptual work", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 7, núm. 3, pp. 245-274.

Barrera-Mora, F. y L.M. Santos-Trigo (2002), *Fascículo II.1: Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: Un caso hipotético de suministro de medicamento,* Serie Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza, vol. 2, México, Grupo Editorial Iberoamérica/Sociedad Matemática Mexicana, pp. 8-37.

Camacho, M. y R. Depool (2003), "Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *Derive*", *Educación Matemática,* vol. 15, núm. 3, pp. 119-140.

Camacho, M., R. Depool y M. Santos-Trigo (2005), "La comprensión del concepto de área e integral definida en un entorno computacional. Perfiles de actuación", *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática,* núm. VI, pp. 21-46.

Camacho, M., R. Depool y M. Socas (2005), "La integral definida. Una propuesta de enseñanza utilizando el *Derive*", en J. Cortés y F. Hitt (eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del Cálculo y su enseñanza,* México, Morevallado, pp. 243-264.

Drijvers, P. (2002), "Learning mathematics in a computer algebra environment: Obstacles are opportunities", *ZDM,* vol. 34, núm. 5, pp. 221-228.

Duval, R. (1993), "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", *Annales de Didactique et de Science Cognitives,* núm. 5, pp. 37-65.

——— (1998), "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento", en F. Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* México, Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 173-201.

Garbín, S. (2005), "¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos", *RELIME,* vol. 2, núm. 8, pp. 169-193.

Gravemeijer, K. y M. Doorman (1999), "Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example", *Educational Studies in Mathematics,* Kluwer Academic Publishers, núm. 39, pp. 111-129.

Ruthven, K. (2002), "Instrumenting mathematical activity: Reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems", *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* vol. 7, núm. 3, pp. 275-291.

Schoenfeld, A. H. (1992), "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics", en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Nueva York, Macmillan, pp. 334-370.

Socas, M. (2007), "Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico", *Investigación en Educación Matemática,* vol. XI, pp. 19-52.

Stewart, J. (1999), *Calculo. Trascendentes tempranas,* 3a. ed., México, Thomson.

Thomas, G. y R. Finney (1996), *Calculus and Analytic Geometry,* Nueva York, Addison Wesley.

Trouche, L. (2005), "An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environment", en D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrumen*t, Nueva York, Springer, pp. 137-162.

DATOS DE LOS AUTORES

Matías Camacho
Universidad de La Laguna, Tenerife, España
mcamacho@ull.es

Ramón Depool
Universidad Politécnica Unexpo, Venezuela
rdepool@bqto.unexpo.edu.ve

Sabrina Garbín
Universidad Simón Bolívar, Venezuela
sgarbin@usb.ve