Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

McGee, Daniel; Martínez Planell, Rafael
Un suplemento para un texto de cálculo
Educación Matemática, vol. 15, núm. 1, abril, 2003, pp. 51-65
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Un suplemento para un texto de cálculo

Daniel McGee y Rafael Martínez Planell

Resumen: Un elemento básico en el movimiento de reforma del cálculo es la incorporación de representaciones múltiples de funciones en el curso. El uso de representaciones múltiples de funciones produce diferentes métodos y formas de tratar los tópicos del curso. La "regla de tres", que fue adoptada por el Consorcio de Harvard, consiste en que cada tópico sea presentado desde los puntos de vista algebraico, geométrico y numérico. Éstos corresponden hasta cierto punto al uso de fórmulas, gráficas y tablas para presentar un tópico. Este artículo presenta nuestra motivación para adoptar un curso de cálculo de reforma, describe material suplementario que hemos creado para el curso y provee algunos resultados de un estudio estadístico que llevamos a cabo para evaluar la efectividad de los métodos de reforma en el curso de cálculo.

Abstract: A basic element of calculus reform movement is the incorporation of multiple representations of functions into the course. Using multiple representations of functions produces distinct methods and approaches to the topics of calculus. The "rule of three" adopted by the Harvard Consortium indicates that each topic should be presented from algebraic, geometric, and numeric points of view. To certain extent, these correspond to the use of formulas, graphs, and tables to present a topic. This article presents our motivation for adopting a "reform" calculus course, outlines supplementary material that we have created for this course, and provides some results of a case control study we conducted to judge the effectiveness of reform methods at calculus level.

Fecha de recepción: marzo de 2002.

INTRODUCCIÓN

El uso de representaciones múltiples puede dar a los alumnos varias imágenes mentales para lograr entender el concepto de función (Barker, 1993; Barshinger, 1993; Cuocco, 1994). Una extensión natural de este concepto es lo que se llama en el movimiento de reforma del cálculo "la regla de tres": que cada tópico se debe presentar desde la perspectiva algebraica, geométrica y numérica. Este artículo describe una experiencia con representaciones múltiples y "la regla de tres" al nivel de cálculo.

Hace algunos años, en la Universidad de Puerto Rico en Mayagüez nos dimos a la tarea de implantar un modelo de cálculo de reforma en pos de mejorar la enseñanza de esta materia. En este articulo, discutimos nuestra motivación para hacer este cambio. Luego, describimos un suplemento (Acuña, 1993) que originalmente desarrollamos para ser usado con los materiales del Consorcio de Harvard (CCH) (Hughes-Hallet, Gleason *et al.*, 1995). Este suplemento también puede ser utilizado con cualquier curso de cálculo. Finalmente, compartimos algunos de los resultados de una evaluación que hicimos comparando el rendimiento de los estudiantes en secciones de reforma con el de estudiantes en secciones tradicionales.

LA REFORMA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO Y LA REGLA DE TRES

Los estudiantes tienden a salir de un curso típico de cálculo con una intuición geométrica muy pobre (Eisenberg y Dreyfus, 1991; Tall, 1991; Selden, Selden y Mason, 1994; Zimmermann y Cunningham, 1991). Así, por ejemplo, hace algunos años pedimos en una prueba que se computara la integral de la función valor absoluto en el intervalo de −1 a 1. Muchos estudiantes no pudieron completar exitosamente el ejercicio, a pesar de que la interpretación geométrica obvia proporciona el resultado de inmediato. Más interesante aún fue examinar la naturaleza de los errores cometidos por los estudiantes. La gran mayoría escogió hacer un cómputo analítico de la integral, cometiendo todo tipo de errores algebraicos al no saber manejar correctamente la expresión de valor absoluto. ¿A qué se debe que nuestros estudiantes graviten automáticamente a la manipulación de símbolos incluso en situaciones donde la interpretación geométrica resulta más efectiva? ¿Qué podemos hacer al respecto? A nuestro entender, para desarrollar la intuición geométrica en el estudiante promedio hay que diseñar ejemplos y ejercicios con este fin explícito en mente. Esto es algo que en textos tradicionales de cálculo no sucede con suficiente frecuencia.

En varios de los textos que resultaron del movimiento de reforma del cálculo en Estados Unidos (Darken, Wynegar y Kuhn, 2000; Haver, 1998; Tucker y Leitzel, 1995; Tucker, 1990; Solow, 1994), se hace un esfuerzo genuino por desarrollar la intuición geométrica. En particular, con el texto de cálculo del Consorcio de Harvard (Hughes-Hallet, Gleason, *et al.*, 1995), se populariza "la regla de tres" donde, al mismo tiempo que se desarrolla la intuición geométrica, también se tienden lazos con el entendimiento analítico para fortalecer así ambos modos de pensamiento. También consistentemente a través de este y otros textos que ponen en práctica la "regla de tres", se entrelaza el tratamiento numérico con el geométrico y analítico. Esto se hace con el uso de tablas numéricas que permiten interpretar el cálculo en el contexto de colecciones discretas de datos. El continuo enfocar e interrelacionar de las ideas del cálculo desde estas tres perspectivas (geométrica, analítica, y numérica) puede contribuir a construir una red de ideas que facilite la recuperación de memorias, al mismo tiempo que prepara al estudiante para que enfoque un problema dado desde perspectivas diferentes. Esto está de acuerdo con investigaciones sobre el funcionamiento de la memoria que establecen que, mientras más conexiones se puedan formar entre información que ha de ser recordada, mejor se puede recordar esa información (Hirst, 1988).

Además de la falta de intuición geométrica, los estudiantes típicamente tienen dificultad en transferir el conocimiento matemático obtenido en el curso de cálculo a las situaciones nuevas que se les presentan en los cursos de ciencias aplicadas, en particular de ingeniería. La práctica de presentar las ideas primero en el contexto de una situación sencilla de la vida diaria permite al estudiante utilizar su sentido común como punto de acceso al entendimiento de un nuevo concepto. De esta manera, el estudiante construye sobre lo ya conocido y de inmediato relaciona el mundo que lo rodea con su emergente mundo matemático del cálculo.

PROPÓSITO DEL SUPLEMENTO

El suplemento fue diseñado en un inicio para ser usado conjuntamente con el texto de cálculo del Consorcio de Harvard (CCH). Sin embargo, puede adaptarse para ser usado con cualquier otro texto de cálculo.

El suplemento se concentra principalmente en los tópicos que corresponden a un segundo semestre de cálculo en nuestra universidad, o sea: integración (por tablas, numérica, impropia), aplicaciones de la integral (concentrándonos en aplicaciones a geometría y a física), una breve introducción a ecuaciones diferenciales (campos de pendientes, método de Euler y separación de variables) y, por último, aproximaciones (polinomios de Taylor, serie de Taylor, aplicaciones, y un apéndice que trata de series en general).

Cada sección del suplemento cuenta con tres partes: una introducción, el cuerpo de la sección, y una colección de problemas suplementarios. La introducción, que por lo general es muy breve, está dirigida al profesor del curso. Por lo común, se sugieren aspectos de la materia en la que se va a hacer énfasis y se dan algunas indicaciones referentes a los problemas suplementarios. En algunas secciones esta parte hace referencia al texto del CCH.

La parte más importante y más extensa de cada sección, el cuerpo de la sección, consiste en una serie de ejemplos trabajados con todo detalle. Esta parte ha sido escrita teniendo al estudiante en mente y su propósito es facilitarle el entendimiento del material, proporcionándole una mayor variedad de ejemplos no tradicionales y ejemplos donde se interrelacionan diferentes formas de representación: algebraica, numérica y geométrica. Se incluyen, posiblemente, más detalles de los que un texto típico ofrece.

Finalmente, en cada sección incluimos una colección de problemas suplementarios, en ocasiones para expandir la materia cubierta en una sección dada del texto (CCH) y, en general, para dar al profesor opciones más allá de las contenidas en el texto que esté usando.

EJEMPLO TOMADO DE UNA SECCIÓN DEL SUPLEMENTO

SITUACIÓN

Tenemos una taza de café con una temperatura inicial de 80°F en una habitación donde la temperatura ambiente es igual a 26°F. Después de un minuto, la temperatura es igual a 78°F. Queremos saber cuál es la temperatura del café después de 10 minutos, después de 20 minutos y después de una hora.

Representación de la situación con una ecuación diferencial

Según la ley de enfriamiento de Newton, la razón con que un objeto se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura del objeto. Es decir, si un objeto está a una temperatura 50°F más caliente que el medio ambiente, la temperatura va a bajar mucho más rápido que si sólo estuviese 1°F más caliente que el medio ambiente. Para representar este concepto matemáticamente, podemos definir las variables:

t = minutos transcurridos, y
$x(t)$ = temperatura después de t minutos.

Con estas variables, la relación de Newton se puede expresar como

$$\frac{dx}{dt} = k(x(t) - 26), \ x(0) = 80$$

donde k es la constante de proporcionalidad para el enfriamiento de café. Las constantes de proporcionalidad para distintas sustancias están en libros de referencia o se pueden conseguir de manera experimental. Vamos a suponer que hemos determinado que nuestra constante de proporcionalidad es $k = -0.2$. Entonces, la ecuación diferencial va a ser:

$$\frac{dx}{dt} = -0.2(x(t) - 26), \ x(0) = 80$$

Soluciones algebraicas

La primera alternativa para conseguir los datos que buscamos es resolver la ecuación diferencial algebraicamente utilizando el método de separación de variables. Al separar las variables e integrar ambos lados

$$\frac{dx}{dt} = -0.2(x(t) - 26)$$

llega a ser

$$\int \frac{dx}{x(t)-26} = \int -0.2dt$$

Completando la integración, tenemos la fórmula

$$\ln(x - 26) = -0.2t + C, \text{ donde } C \text{ es constante.}$$

Aplicando la función exponencial a ambos lados, obtenemos

$$x - 26 = e^{-0.2t - C} = e^{-0.2t}e^{C} = C_2e^{-0.2t}, \text{ donde } C_2 = e^{C}$$

y así terminamos con la fórmula

$$x(t) = 26 + C_2e^{-0.2t}, \quad x(0) = 80$$

Sustituyendo la condición inicial, tenemos:

$$80 = 26 + C_2e^{0}.$$

Así, podemos concluir que $C_2 = 54$ y nuestra fórmula es

$$x(t) = 26 + 54e^{-0.2t}$$

Con esta fórmula podemos concluir que, después de 10 minutos, $x = 26 + 54e^{-2} \approx 33.308°$. Después de 20 minutos, $x = 26 + 54e^{-4} \approx 26.989°$ y después de una hora, $x = 26 + 54e^{-12} \approx 26°$.

Soluciones geométricas

La ecuación diferencial nos da la fórmula para la pendiente $m = \frac{dx}{dt} = -0.2(x - 26)$ de la recta tangente a una curva solución $y = x(t)$ en un punto $(t, x(t))$. Con esta fórmula, podemos construir el cuadro 1, donde para cada (t, x), el cuadro nos da la pendiente asociada.

Cuadro 1 Pendiente en el punto (t, x)

	Minutos (t)					
Temperatura (x)	0	15	30	45	60	75
0	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2
20	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
26	0	0	0	0	0	0
40	–2.8	–2.8	–2.8	–2.8	–2.8	–2.8
60	–6.8	–6.8	–6.8	–6.8	–6.8	–6.8
80	–10.8	–10.8	–10.8	–10.8	–10.8	–10.8

Con este cuadro, podemos dibujar el sistema de coordenadas y poner en cada uno de los puntos (t, x(t)) un pequeño segmento de recta con la pendiente que indica el cuadro. Observamos que una curva $x(t)$ que sea solución de la ecuación diferencial y que pase por un punto (t, x (t)) va a tener como tangente el segmento de recta que está ahí dibujado. La figura 1 contiene el campo de pendientes que resulta al seguir este procedimiento con los datos del cuadro anterior.

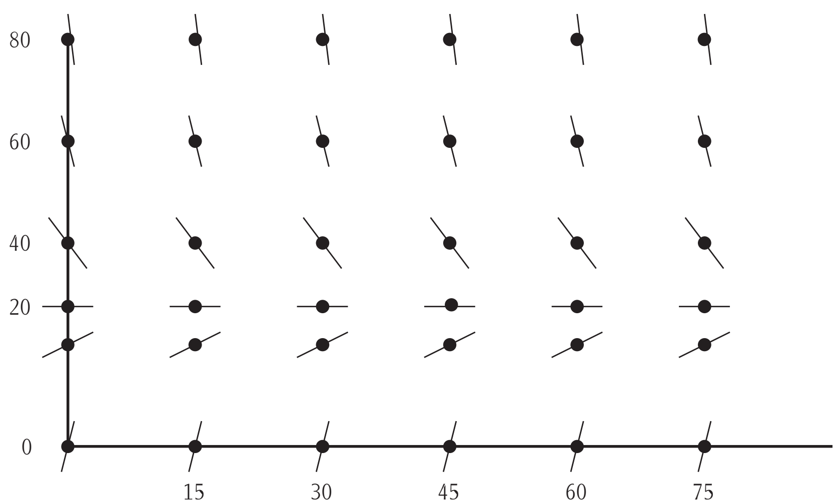

Figura 1

Con la ayuda de la tecnología, podemos mejorar este campo de pendientes para incluir muchos más puntos y las pendientes asociadas. Esto se muestra en la figura 2.

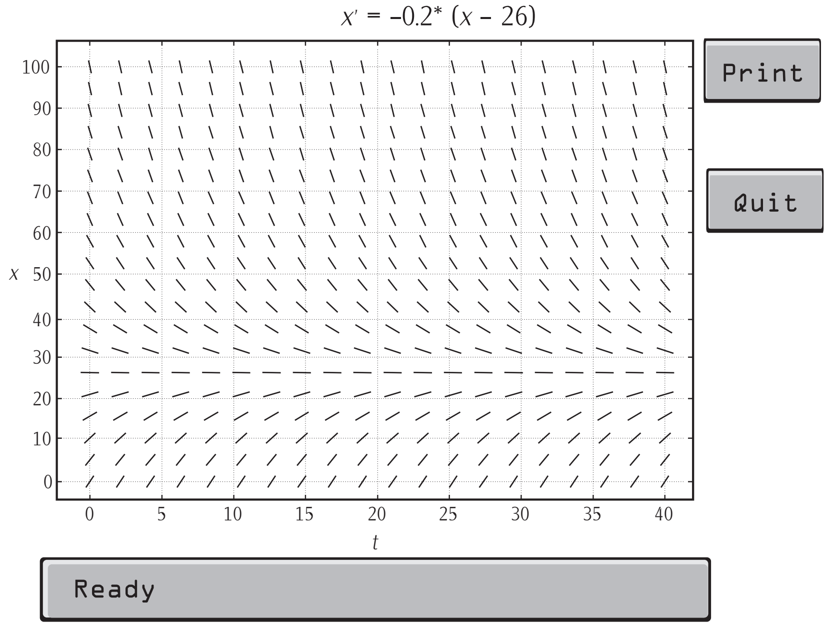

Figura 2

Sabemos que al comienzo del experimento, o sea cuando $t = 0$ minutos, la temperatura es igual a 80°F. Por tanto, la curva de la solución va a pasar por el punto (0, 80) y, además, debe ser consistente con el campo de pendientes que obtuvimos de la ecuación diferencial. Con estos dos datos podemos aproximar la curva solución como en la figura 3.

Al inspeccionar visualmente la curva solución, podemos ver que los puntos asociados con $x = 10$, $x = 20$ y $x = 60$ son aproximadamente (10, 33), (20, 27) y (60, 26). Así, después de 10 minutos la temperatura es aproximadamente 33°F, después de 20 minutos la temperatura es aproximadamente 27°F, y después de 60 minutos la temperatura es aproximadamente 26°F. Esto es congruente con los resultados obtenidos anteriormente con métodos algebraicos.

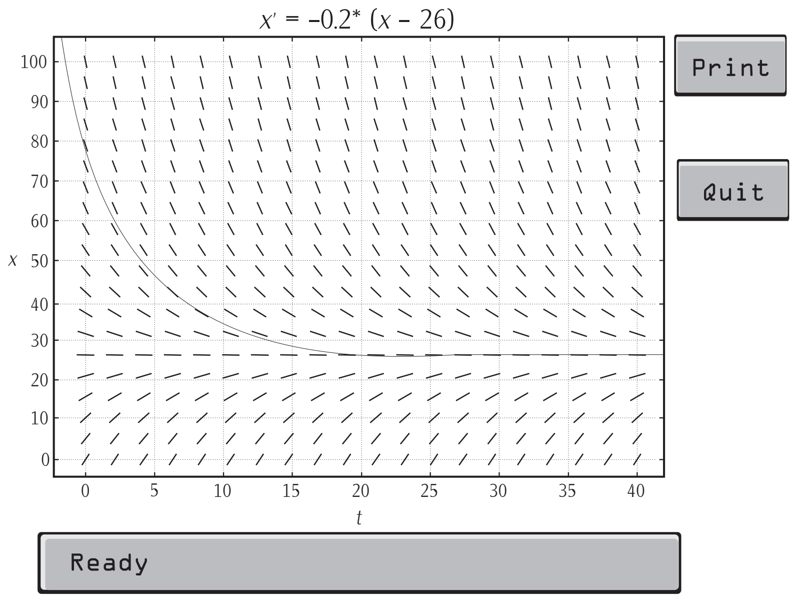

Figura 3

Soluciones numéricas

Ahora, vamos a conseguir la solución numéricamente utilizando el método de Euler. Para comenzar, tomamos $\Delta t = 2$, es decir, vamos a aproximar los puntos $(t, x(t))$ de la curva solución tomando intervalos de 2 minutos: partiendo de $(0, x(0))$ aproximamos $(2, x(2))$, luego, partiendo de esta aproximación de $(2, x(2))$ aproximamos $(4, x(4))$, y continuamos de esta manera. Para hacer esto, mantendremos la pendiente constante en intervalos de 2 minutos a la vez.

Durante el primer intervalo de 2 minutos, comenzamos en $t = 0$ minutos con una temperatura de 80°F, o sea, en el punto (0, 80). La pendiente de la curva en este punto es $m = \frac{dx}{dt} = -0.2(80 - 26) = -10.8$. Al trazar una recta que comienza en (0, 80) y sigue hasta $t = 2$ con pendiente igual a –10.8, vamos a terminar en el punto (2, 58.4).

Ahora estamos listos para comenzar el segundo paso de nuestra iteración. Comenzamos en $t = 2$ minutos con una temperatura de 58.4°F, o sea, en el punto

(2, 58.4). La pendiente de la curva en este punto es $m = \frac{dx}{dt} = -0.2(58.4 - 26) = -6.48$. Al trazar una recta que comienza en (2, 58.4) y sigue hasta $t = 4$ con pendiente igual a −6.48, vamos a terminar en el punto (4, 45.44).

El proceso durante los primeros dos intervalos, se puede visualizar en la figura 4.

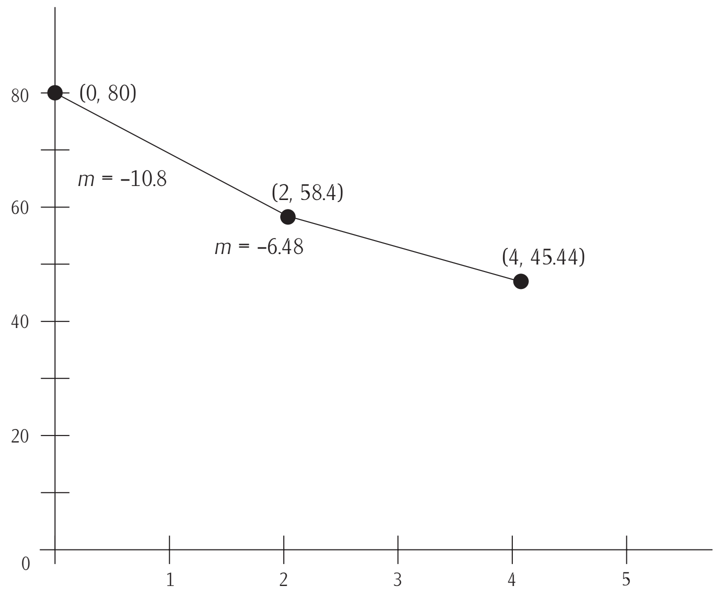

Figura 4

Al repetir este procedimiento 30 veces para todos los intervalos de 2 minutos entre 0 y 60 minutos, obtenemos la figura 5.

Con los valores de la gráfica 5 encontramos que, después de 10 minutos, la temperatura es aproximadamente 30.20°F, después de 20 minutos la temperatura es aproximadamente igual a 26.33°F y después de 60 minutos la temperatura es aproximadamente 26°F. Claramente los resultados que se obtienen dependen del tamaño de Δt. En este caso vemos que los resultados que obtuvimos son algo distinto a los obtenidos anteriormente.

Si repetimos el mismo procedimiento usando $\Delta t = 0.01$ encontramos que, después de 10 minutos, la temperatura es 33.2935, después de 20 minutos, la temperatura es igual a 26.9879 y, después de 60 minutos, la temperatura es igual

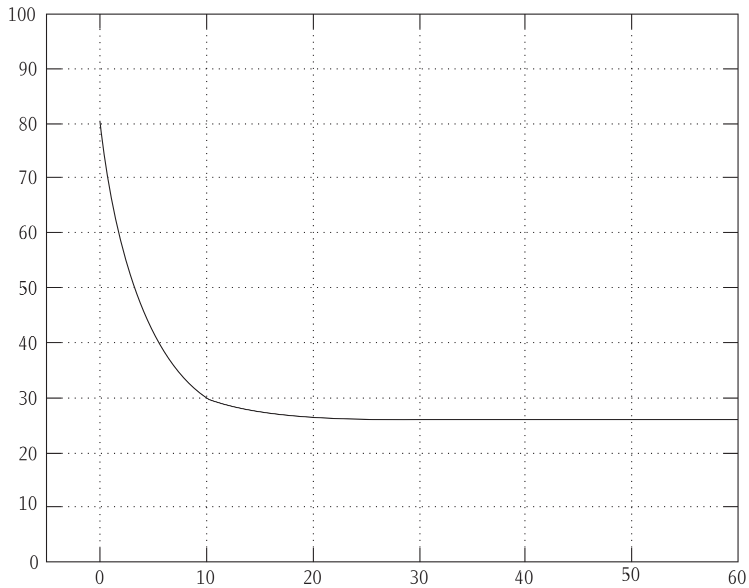

Figura 5

a 26.0003. Comparado con los valores precisos que conseguimos con el método algebraico, podemos ver que este método es extremadamente preciso si utilizamos un valor de Δt muy pequeño.

Resumen de los métodos

En conclusión, hemos buscado la temperatura después de 10, 20 y 60 minutos empleando tres métodos distintos. Encontramos que todos los métodos nos dieron aproximadamente la misma respuesta, aunque con el método numérico tenemos que tener cuidado de utilizar un valor de Δt suficientemente pequeño.

RESULTADOS

Como parte de la evaluación de la implantación del modelo del cálculo de reforma (CCH), formamos un comité que incluía a tres profesores del curso tradicional y a tres profesores del curso de la reforma. Este comité escogió 10 preguntas comunes para los exámenes finales del curso tradicional y del curso de la reforma. De estas 10 preguntas, 3 requerían un buen dominio de la interpretación geométrica y/o numérica de conceptos de cálculo. Estas preguntas fueron consideradas por el comité como ligeramente orientadas hacia el método de Harvard. Otras 3 eran preguntas donde se pedía hacer un cómputo que sólo requería buena destreza algebraica. Éstas se consideraron como ligeramente orientadas hacia el método tradicional. Hubo otras 4 preguntas que se consideraron neutrales. Aproximadamente 500 estudiantes hicieron la prueba en igualdad de condiciones. Más o menos la mitad de los estudiantes habían usado el cálculo de la reforma y la otra mitad, el cálculo tradicional.

Para asegurar que las poblaciones de estudiantes en ambas modalidades de cálculo tenían una preparación matemática comparable previa al curso, usamos la Prueba Estandardizada de Aprovechamiento en Matemática que es administrada por el Puerto Rico College Board y que los estudiantes realizan antes de entrar en la universidad. Habíamos observado en estudios anteriores que esta prueba era un buen predictor del desempeño académico de los estudiantes en los cursos de matemática.

Creamos 5 grupos distintos como se aprecia en el cuadro 2.

Solamente hicimos comparaciones entre alumnos del mismo grupo. Se adjudicó un total de 30 puntos para las preguntas comunes. Los resultados están en el cuadro 3.

Estos resultados son sólo parte de los que se obtuvieron en el estudio estadístico que se realizó después de un segundo semestre de cálculo. Se pueden obtener más resultados del análisis estadístico que se hizo para la primera porción del curso de cálculo en Acuña y Martínez-Planell (1995).

Cuadro 2

Grupo	Nota en la Prueba Estandarizada
I	Mejor que 749
II	700-749
III	650-699
IV	600-649
V	Menos de 600

Cuadro 3

Grupo	Promedio de los alumnos en el curso de reforma	Promedio de los alumnos en el curso tradicional
I	29.0	22.5
II	21.3	18.3
III	19.0	16.4
IV	18.5	11.2
V	17.5	19.0

CONCLUSIÓN

El estudio estadístico que se hizo comparando el aprovechamiento de los estudiantes en las secciones de cálculo de reforma con el de los estudiantes en las secciones tradicionales sugiere que, al finalizar el curso, los estudiantes de reforma habían logrado una mejor comprensión de conceptos básicos de cálculo que los de las secciones tradicionales. Claramente este estudio estadístico no permite concluir sin lugar a dudas que los resultados positivos obtenidos se deben a la aplicación consistente de representaciones múltiples a través del curso. Son demasiadas las variables que pueden afectar el aprendizaje de la matemática. Sin embargo, estos resultados sí indican que vale la pena continuar utilizando representaciones múltiples en la presentación de los conceptos de cálculo y seguir estudiando el efecto de este enfoque en el aprendizaje que se da en los estudiantes.

En resumen, nuestra experiencia con la reforma fue una experiencia muy positiva, tanto en términos de los resultados como en términos de la experiencia pedagógica. Algunos aspectos que hemos señalado del suplemento ayudaron a que la implantación del programa fuera un éxito. Así, nos gustaría ofrecerlo como opción a otros profesores e instituciones. Tanto el suplemento como resultados más completos de nuestro estudio de la efectividad del programa del Consorcio de Harvard se pueden conseguir poniéndose en contacto con los autores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña, E. y R. Martínez-Planell (1995), "Comparing the reform calculus with tradicional calculus at the University of Puerto Rico", *en Proceedings of the Eighth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics,* Menlo Park CA, Addison Wesley, pp. 10-14.

Artigue, A. (1998), "Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 1, pp. 40-55.

Barker, W.H. (1993), "Pendulum motion-the value of multiple solution methods", *PRIMUS,* vol. III, núm. 3, Rose-Hulman Institute of Technology, Indiana, pp. 225-244.

Barshinger, R. (1993), "Calculus revision: exploratory data analysis and the rule of three", *PRIMUS,* vol. III, núm. 4, Rose-Hulman Institute of Technology, Indiana, pp. 430-436.

Cuocco, A.A. (1994), "Multiple representations for functions, in Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning", en J. Kapunt y E. Dubinsky (eds.), MAA notes núm. 33, Washington, Mathematical Association of America, pp. 121-140.

Darken, B., R. Wynegar y S. Khun (2000), "Evaluating calculus reform: a review and a longitudinal study", en E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kapunt (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV,* Providence RI, CBMS Issues in Mathematics Education, vol. 8, American Mathematical Society, pp. 16-41.

Eisenberg, T., T. Dreyfus (1991), "On the reluctance to visualize in mathematics", en W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics",* MMA notes núm. 19, Washington, Mathematical Association of America, pp. 25-38.

Haver, W.E. (ed.) (1998), *Calculus: Catalyzing a National Community for Reform,* Washington, Mathematical Association of America.

Hirst, W. (1998), "Improving memory", en M. Gazzaniga (ed.), *Perspectives in Memory Research,* MIT.

Hughes-Hallet, D., A.M. Gleason *et al.* (1995), *Cálculo,* México, Compañía Editorial Continental.

Martínez-Planell, R., D. McGee, K. Wayland *et al.* (1996), *Suplemento de cálculo II,* Mayagüez, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez.

Selden, J., A. Selden, y A. Mason (1994), "Even good calculus students can't solve non-routine problems", en J. Kapunt y E. Dubinsky (eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning,* MAA notes núm. 33, Washington, Mathematical Association of America, pp. 17-26.

Solow, A. (1994), *Preparing for a New Calculus, Mathematical Association of America,* MAA notes núm. 36, Washington, Mathematical Association of America.
Tall, D. (1991), "Intuition and rigor: the role of visualization in the calculus", en W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* MAA notes núm. 19, Washington, Mathematical Association of America, pp. 105-119.
Tucker, A. y J. Leitzel (1995), "Assessing calculus reform efforts", MAA report núm. 6, Washington, Mathematical Association of America.
Zimmermann, W. y S. Cunningham (1991), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* MAA notes núm. 19, Washington, Mathematical Association of America.

DATOS DE LOS AUTORES

Daniel McGee
Departamento de Matemática, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez, Puerto Rico
mcgee@quiz.uprm.edu

Rafael Martínez Planell
Departamento de Matemática, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez, Puerto Rico
rafael@math.uprm.edu

www.santillana.com.mx/educacionmatematica