Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Roa Guzmán, Rafael; Batanero Bernabeu, Carmen; Díaz Godino, Juan
Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios
Educación Matemática, vol. 15, núm. 2, agosto, 2003, pp. 5-25
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios

Rafael Roa Guzmán, Carmen Batanero Bernabeu y Juan Díaz Godino

Resumen: En este trabajo analizamos las estrategias generales y estrategias aritméticas que aplican los estudiantes universitarios al resolver problemas combinatorios simples (cuya solución viene dada por una única operación combinatoria) y compuestos (cuya solución requiere dos o más operaciones combinatorias). Se propuso a una muestra de 91 estudiantes con fuerte preparación matemática un cuestionario con 11 problemas simples y 2 compuestos en el que los estudiantes tuvieron una dificultad generalizada. El análisis de estrategias tales como traducir el problema a otro equivalente, descomponer en subproblemas, fijar variables, regla de la suma, regla del producto y regla del cociente permite aportar criterios para la mejora de la enseñanza de la combinatoria.

Palabras clave: estrategia, error, dificultad, combinatoria, resolución.

Abstract: In this paper numerical and general strategies in solving combinatorial problems are analysed. A questionnaire with 11 simple combinatorial problems and 2 compound combinatorial problems was given to 91 university students with high mathematical training. The results showed a general difficulty. The analysis of students' strategies, including translating the problem, dividing into sub-problems, fixing variables, sum, product and quotient rules serves to find some criteria in order to improve the teaching of combinatorics.

Key words: strategy, error, difficulty, combinatory, problem solving.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Inhelder y Piaget (1955), el razonamiento combinatorio se desarrolla espontáneamente en el periodo de las operaciones formales, aunque otros investigadores no están de acuerdo con esta teoría. Por ejemplo, Fischbein

Fecha de recepción: diciembre de 2001.

y Grossman (1997a y 1997b) analizaron los esquemas subyacentes en las estimaciones intuitivas de los adultos sobre el valor de las operaciones combinatorias y observaron cálculos tácitos en los que se sustituye el conjunto requerido de operaciones por operaciones binarias que inducen a error en los resultados. Marchand (1994) también indica que muchos sujetos adultos no llegan a alcanzar un razonamiento combinatorio completo.

Navarro-Pelayo (1994) analizó el razonamiento de alumnos de secundaria con y sin instrucción, mostrando una dificultad generalizada en la resolución de los problemas. En este trabajo, así como en Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996) y Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1997a y 1997b) los autores describen y clasifican los problemas combinatorios simples según tres modelos básicos: selección, partición y colocación. Asimismo, describen y clasifican los errores de los alumnos al resolver los problemas combinatorios simples, y los que son más frecuentes en cada uno de dichos modelos. Los autores no analizaron las estrategias seguidas en el proceso de resolución y tampoco tuvieron en cuenta los problemas combinatorios compuestos.

En este trabajo continuamos las investigaciones anteriores, a fin de analizar las estrategias de resolución de problemas combinatorios por alumnos con alta preparación matemática, y aportamos una explicación sobre los errores cometidos. Pensamos que en el campo de los problemas combinatorios es particularmente útil el empleo de algunas de las estrategias generales recomendadas para la resolución de problemas, como traducir el problema a otro equivalente, descomponer el problema en partes o fijar los valores de alguna de las variables. Hemos analizado también el uso de tres reglas combinatorias básicas de carácter aritmético, que son las de la suma, el producto y el cociente.

Todas estas técnicas son de aplicación en gran número de casos y ciertamente útiles cuando el estudiante no ha podido identificar y aplicar la fórmula de la operación combinatoria que resuelve el problema. Sin embargo, no son objeto explícito de enseñanza en España, donde el énfasis del estudio de la combinatoria se centra en la definición de las operaciones combinatorias y su identificación directa, como mejor medio de resolver los problemas.

En lo que sigue, describimos nuestro estudio y las conclusiones obtenidas.

DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO Y RESULTADOS GLOBALES

El cuestionario empleado, Roa (2000), se presenta como apéndice y se compone de 11 problemas combinatorios simples y 2 compuestos. Los problemas combinatorios simples (problemas 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 y 13) han sido tomados del cuestionario de Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996) y pueden dividirse, según el modo en que Dubois (1984) clasifica las configuraciones combinatorias simples, en tres modelos diferentes: *selección, colocación* y *partición*:

- En el modelo de selección (ítems 1, 6, 11 y 13) se considera un conjunto de *m* objetos (generalmente distintos), de los cuales se extrae una muestra de *n* elementos. Este modelo subraya la idea de población y muestra, orden y repetición (en la muestra).
- Otro tipo de problemas (ítems 3, 8, 9 y 12) se refiere a la colocación de una serie de *n* objetos en *m* celdas y las ideas matemáticas implícitas son las de aplicación, conjunto final y original en la aplicación y regla de correspondencia. Tanto el conjunto original como el final pueden estar ordenados.
- Finalmente, podríamos estar interesados en dividir un conjunto de *n* objetos en *m* subconjuntos, es decir, en efectuar una partición de un conjunto (ítems 4, 5 y 10) donde usamos las ideas de conjunto, subconjunto y partición. Tanto el conjunto original como los subconjuntos pueden estar ordenados y las partes pueden también tener un orden.

No podemos suponer que los tres tipos de problemas descritos (selección, colocación y partición) sean equivalentes en dificultad, incluso aunque puedan resolverse mediante la misma operación combinatoria. Más aún, Navarro-Pelayo mostró que el modelo combinatorio implícito en el problema es una variable de tarea fundamental para evaluar la capacidad combinatoria de los alumnos. En el caso particular de los problemas usados en nuestro cuestionario, cada problema puede traducirse de un modelo a otro, aunque esto pudiera no ser evidente para los alumnos.

Además de estos problemas combinatorios simples, en los que tenemos en cuenta las diferentes operaciones combinatorias, tipo de elementos y valores de los parámetros, hemos incluido dos problemas combinatorios compuestos, tomados de Gascón (1988). Son los problemas 2 y 7, en cada uno de los cuales interviene un problema de colocación y otro de selección ligados por la regla del producto.

Cuadro 1 Diseño del cuestionario, según modelo, y operación combinatoria prevista

Operación combinatoria	Esquema combinatorio		
	Colocación	Selección	Partición
Combinaciones	Ítem 3	Ítem 6	Ítem 1
Permutaciones con repetición	Ítem 12	Ítem 1	Ítem 5
Variaciones con repetición	Ítem 9	Ítem 11	Ítem 4
Variaciones	Ítem 8	Ítem 13	
Compuestos	Ítem 2	Ítem 7	

Aunque algunos problemas podrían resolverse por más de una operación combinatoria, nosotros hemos previsto la que sería más natural para el alumno, en función de la enseñanza recibida. Estas operaciones y el esquema combinatorio de cada problema pueden verse en el cuadro 1.

La muestra estuvo compuesta por 91 alumnos de la Licenciatura de Matemáticas, Universidad de Granada; 29 de 4º curso, especialidad Metodología, 49 de 5º curso de la misma especialidad y 13 de 5º curso, especialidad de Estadística. Estos alumnos habían estudiado combinatoria durante la educación secundaria y también en la universidad, como parte de la asignatura del cálculo de probabilidades. En ambos casos, las operaciones combinatorias se definieron, según el modelo de selección, como muestras ordenadas (variaciones) o no ordenadas (combinaciones), que a su vez se pueden diferenciar según se admita o no el reemplazamiento (hay o no repetición). Las permutaciones se definieron como caso particular de las variaciones.

En el cuadro 2 presentamos los porcentajes de soluciones correctas, comparándolos con los obtenidos por Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996). Los resultados sorprenden, ya que en algunos problemas son similares a los de los alumnos de secundaria con instrucción, es decir, alumnos que ya han estudiado en clase y trabajado el tema de combinatoria. El número medio de respuestas correctas fue 5.5 e incluso en algunos problemas (11 y 13) encontramos peores resultados en los alumnos universitarios.

Una posible explicación es que los estudiantes de secundaria habían estudiado el tema más recientemente y que se haya dado un efecto de olvido en los universitarios. Sin embargo, estos alumnos, que se preparaban para ser profesores de matemáticas, fueron avisados una semana antes de que se les iba a pasar el

Cuadro 2 Porcentaje de soluciones correctas en cada problema del cuestionario

Problema	Grupo de alumnos: Secundaria sin instrucción (n = 352)	Secundaria con instrucción (n = 368)	Licenciatura de Matemáticas (n = 91)
1	16.3	27.6	44.0
2			51.6
3	26.9	26.7	69.2
4	0.3	6.0	9.9
5	32.3	39.2	54.9
6	22.6	46.0	61.5
7			6.6
8	3.8	41.8	44.0
9	13.1	7.4	29.7
10	31.0	37.2	62.6
11	12.5	59.1	39.6
12	10.6	29.5	31.9
13	9.5	59.7	48.4

cuestionario, recomendándoles que repasaran el tema de combinatoria. Navarro-Pelayo (1994) no llegó a estudiar con detalle las estrategias de resolución en su muestra. En nuestro caso, los alumnos se repartieron, aproximadamente por igual, entre los que usaron directamente fórmulas y los que trataron de aplicar alguna estrategia en los problemas 11 y 13. Fueron pocos, sin embargo, los que se ayudaron de algún tipo de representación gráfica (como diagrama en árbol) o de la enumeración de casos particulares. Pensamos que estos elementos tal vez fueron usados con mayor frecuencia por los alumnos de Navarro-Pelayo, aunque éste es un tema pendiente de investigar.

En lo que sigue analizamos las estrategias de los alumnos en la resolución de cada uno de los problemas, teniendo en cuenta si fueron aplicadas correcta o incorrectamente y presentando ejemplos de dichas estrategias, que se han identificado a partir del análisis de contenido de sus producciones escritas.

Hay que tener en cuenta que, puesto que la actividad de toma de datos se realizó durante una de las sesiones de una asignatura de didáctica de las matemáticas, pedimos a los estudiantes (futuros profesores de matemáticas) que explicasen con todo detalle el proceso de resolución seguido, de modo que un alumno suyo lo pudiese comprender. Los estudiantes se mostraron cooperativos e interesados en la tarea y aportaron todo tipo de detalles sobre el proceso de resolución.

ESTRATEGIAS GENERALES EMPLEADAS POR LOS ALUMNOS

En primer lugar analizamos algunas estrategias básicas en resolución de problemas, que no son específicas de los problemas combinatorios, pero que pensamos son potencialmente útiles para este tipo de problemas. El cuadro 3 contiene los porcentajes de cada categoría en los distintos problemas del cuestionario.

Cuadro 3 Porcentajes de estrategias generales correcta e incorrectamente usadas en cada problema

	Traduce el problema		Fija variables		Descompone el problema	
Problema	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
1	0.0	0.0	12.8	0.0	2.6	0.0
2	0.0	0.0	26.0	1.4	38.4	0.0
3	14.8	0.0	6.2	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	13.2	0.0	41.5	26.4
5	1.3	0.0	6.3	1.3	1.3	0.0
6	1.4	0.0	11.1	0.0	0.0	0.0
7	0.0	8.0	22.0	0.0	52.0	4.0
8	1.6	0.0	29.0	0.0	17.7	0.0
9	1.6	0.0	3.2	0.0	58.7	3.2
10	8.5	1.4	7.0	0.0	0.0	2.8
11	0.0	0.0	37.5	0.0	8.3	0.0
12	12.7	0.0	21.8	0.0	16.4	0.0
13	0.0	0.0	22.0	1.7	4.3	0.0

Traducción del problema a otro equivalente

Para identificar la operación combinatoria que resuelve un problema, los alumnos deben visualizar la situación descrita en el enunciado como un caso particular de la definición aprendida de dichas operaciones que, generalmente, ha sido como muestras ordenadas o no, con o sin reemplazamiento. En los problemas de selección, los alumnos perciben directamente la solución, puesto que las operaciones combinatorias les fueron definidas con este modelo durante la enseñanza. En los problemas de partición o colocación, los alumnos deben hacer una traducción del problema y formularlo en términos de muestreo. El alumno, alternativamente, puede comparar el problema con otro parecido cuya solución conoce y resolver el problema usando la analogía. Hemos tenido en cuenta el uso correcto o incorrecto de esta estrategia.

Consideramos un uso correcto si el estudiante reformula el problema, cambiando el contexto o la naturaleza de los elementos que intervienen, convirtiéndolo en otro problema con idéntica estructura combinatoria. Por ejemplo, transforma el problema 3, que consiste en hallar las formas diferentes en que se pueden colocar tres cartas idénticas en 4 sobres de diferentes colores (modelo de colocación), en otro equivalente que consiste en seleccionar 3 de los 4 sobres (selección) para introducir las cartas en ellos:

> El problema se traduce en seleccionar tres de los cuatro sobres (aquellos en los que introduciríamos una carta). Nos da igual el orden de selección, tan sólo importa el color de las tres cartas que al final nos quedan, o equivalentemente (por paso al complementario), el color de la carta que descartamos. Hay, por tanto, 4 formas. (Estudiante 18; problema 3.)

Consideramos que el uso es incorrecto si, al reformular el problema, se llega a otro cuya solución difiere de la que tenía el problema original:

> Este problema es equivalente al 9, identificando los niños de éste con las habitaciones del otro y los cromos de éste con los niños de aquél. (Estudiante 18; problema 10.)

El porcentaje de estudiantes que intenta traducir el problema a otro equivalente es mínimo en la inmensa mayoría de los problemas y en 5 de los 13 problemas no se utiliza esta estrategia. Especialmente, los alumnos no intentan traducir el enunciado de los problemas de selección (1, 6, 11, 13) porque es con este modelo con el que han aprendido la definición de las operaciones combinatorias.

El mayor porcentaje de uso de esta estrategia correspondió a los problemas 3, 10 y 12, todos ellos de colocación, y aunque dos de ellos tienen un porcentaje alto de éxito, no ocurre lo mismo con el tercero; sin embargo, en todos ellos la traducción se hizo correctamente, es decir, a un problema equivalente.

Hay que destacar que en los problemas 4 y 7, los de mayor dificultad, o no se ha intentado la traducción o se ha realizado de manera incorrecta. Pensamos, en consecuencia, que la técnica de analizar el enunciado de un problema y formularlo en otros términos de modo que se conserve la estructura debería ser destacada en la enseñanza de la combinatoria y, en general, de la matemática.

Fijación de variables

Según Hadar y Hadass (1981), la necesidad de fijar una o más de las variables para obtener un método coherente de enumeración es característica de los problemas combinatorios. Esto implica añadir una dificultad más a los alumnos y no es un paso convencional, puesto que éstos están acostumbrados a usar sólo las hipótesis y datos dados en el enunciado del problema.

Hemos considerado un uso correcto cuando el alumno da valores concretos a una o más variables del problema para convertirlo en otro del mismo tipo, pero con valores menores que los parámetros. Luego resuelve este problema más sencillo y, a partir de él, generaliza para resolver el problema inicial, correctamente, utilizando la recursión. En el siguiente ejemplo, el alumno primeramente resuelve el problema de emparejar dos personas (las otras estarían determinadas) y luego aplica la regla del producto. Para ello, fija consecutivamente la primera y segunda persona en la pareja, teniendo en cuenta (recursivamente) que, fijada la primera, disminuye el número de casos para elegir. Resuelve el problema original utilizando la regla del producto:

> Tengo que emparejar 4 personas de dos en dos; si elijo 2 primeramente, las otras dos están determinadas: elijo 2 de 4 (para lo cual elijo una y después otra). Elijo 1 de entre 4, son 4 posibilidades; quedan 3, elijo 1 de entre 3, son 3 posibilidades y, por tanto, $4 \times 3 = 12$ posibilidades. (Estudiante 21; problema 5.)

El uso es incorrecto si el alumno fija una o más variables para reducir el problema a otro más sencillo, pero, o bien generaliza incorrectamente, o no tiene en cuenta los casos ya fijados. En el siguiente ejemplo, el alumno fija las parejas que han de asignarse a cada trabajo. El fallo se produce porque no tiene en cuenta, al intentar combinar todas las parejas, que una persona no puede simultáneamente formar parte de dos parejas diferentes (error de repetición):

> 4 amigos: A, B, C, D
> Trabajos: Matemáticas, Lengua.
> Tenemos que hacer dos grupos de chicos, hay que tener en cuenta que AB = BA.
> Entonces tenemos AB, AC, AD, BC, BD, CD que son 6 posibles grupos.
> Si en la primera materia tenemos, por ejemplo AB, nos quedan 5 posibilidades para la segunda materia y, por tanto, tenemos 6.5 = 30 posibles combinaciones. (Estudiante 89; problema 5.)

Esta estrategia ha sido empleada por una parte, más o menos numerosa, de alumnos en todos los problemas. El mayor uso se hizo en los problemas 11 y 8 que tienen una dificultad alta o media. Pensamos que el alumno ha tratado primeramente de resolver el problema directamente y sólo ha recurrido a la fijación de variables en caso de no lograrlo por un método directo.

Cabe destacar que el uso de esta estrategia ha sido correcto casi en la totalidad de los casos en los que se ha utilizado. Parece, por tanto, un factor que hay que tener en cuenta y da buenos resultados en los casos en que se usa; recomendamos, por ello, que la enseñanza de esta técnica forme parte del tema de la combinatoria.

Descomposición en subproblemas

Esta estrategia está en parte relacionada con la anterior, aunque los alumnos la aplican, a veces, de manera independiente. El alumno puede dividir el problema dado en una serie de subproblemas, resolverlos independientemente y combinar las soluciones parciales para resolver el problema en cuestión.

Se ha considerado un uso correcto si se descompone el problema en otros varios, de estructura combinatoria más sencilla y parámetros de menor tamaño, que recogen de manera exhaustiva todos los casos del problema inicial. Combinando adecuadamente las soluciones parciales, resuelve el problema inicial. Por ejemplo, en el caso de un problema combinatorio compuesto:

Supongamos que las tres primeras son CCC, entonces habría dos posibilidades CCCAB y CCCBA.

Ahora la manera de fijar las tres C son combinaciones de los 5 lugares tomados de 3 en 3, es decir, (5!)/ ((3!).(2!) = 10 posibilidades y como por cada una hay dos modos de colocar la A y la B, pues resultan 2.10 = 20 posibilidades. (Estudiante 90; problema 12.)

El uso es incorrecto si se descompone el problema en otros varios más sencillos pero que no abarcan en su totalidad los casos del problema inicial. Por ejemplo, en el caso de repartir cuatro coches entre tres hermanos:

Dar los cuatro a un mismo hermano: 3
Dar tres a uno y uno a otro: 3.2 = 6
Dar dos a cada uno: 3
Formas diferentes: 12. (Estudiante 6; problema 4.)

Es también poco frecuente que el alumno divida el problema en partes, aunque esta estrategia aparece en un porcentaje apreciable de alumnos en los problemas 2 y 7 (problemas combinatorios compuestos), y en los 4 y 9 (problemas combinatorios simples). Son precisamente los problemas de partición y colocación, exceptuados aquellos que, al tener valores muy pequeños en sus parámetros (problemas 3, 5 y 10), han permitido al alumno resolverlos directamente mediante enumeración o por ensayo y error.

La estrategia ha sido utilizada en la gran mayoría de los casos correctamente, por lo que pensamos que podría ser una técnica muy interesante de resolución de los problemas compuestos y en los de partición y colocación.

USO DE ESTRATEGIAS ARITMÉTICAS

En el caso de que los alumnos no reconozcan la operación combinatoria y traten de generar un modelo combinatorio mediante la enumeración y el recuento, deberán emplear las tres reglas combinatorias básicas de carácter aritmético, que son las de suma, producto y cociente, solas o combinadas entre sí, dependiendo del tipo de problema. Asimismo, en los problemas combinatorios compuestos será necesaria la regla del producto, incluso cuando los alumnos identifiquen directamente las operaciones combinatorias que dan la solución de los problemas combinatorios simples en que se descompone el problema compuesto. A continuación, analizamos el empleo de estas estrategias.

Regla de la suma

La regla de la suma se usa cuando un conjunto de configuraciones combinatorias se determina como la unión de un número de subconjuntos mutuamente excluyentes. Su uso no será necesario cuando el resolutor aplique directamente una operación combinatoria simple (variaciones, permutaciones, etc.). Para el caso de que el sujeto no recuerde las fórmulas, y trate de generar un modelo, el uso de la regla de la suma será especialmente adecuado.

Se considera un uso correcto si se aplica la regla de la suma en el contexto adecuado, dividiendo el conjunto de configuraciones en subconjuntos mutuamente excluyentes de manera adecuada. Por ejemplo, descompone las configuraciones en función de que un elemento entre o no en el grupo:

1. Andrés hace matemáticas:
   AB, AC, AD tres casos.
   Lengua los otros dos.
2. Andrés no hace matemáticas:
   AB, AC, AD tres casos.
   Matemáticas los otros dos.

Total 6 maneras. (Estudiante 77; problema 5.)

El uso es incorrecto si se aplica la regla de la suma en un contexto inadecuado, porque los subconjuntos dados no son excluyentes o no cubren el conjunto total. Por ejemplo, en el problema 9, los subconjuntos son excluyentes pero se repiten configuraciones cuando se coloca a los niños por parejas:

Es análogo al problema de repartir 4 coches entre 3 hermanos.
La disposición puede ser:

- Si los 4 van a la misma: hay 2 maneras.
- Si 3 van a una y uno a otra, hay ABC, ABD, ACD, BCD que van al salón (o a la buhardilla); por lo que habrá 8 maneras.
- Si 2 van a una y otros 2 a otra; pueden ir al salón AB, AC, AD, BC, BD,

Cuadro 4 Porcentajes de uso de estrategias aritméticas en los problemas

	Regla de la suma		Regla del producto		Regla del cociente	
Problema	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
1	2.6	2.6	6.4	3.8	6.4	6.4
2	2.7	4.1	50.7	20.5	0.0	0.0
3	0.0	2.5	0.0	4.9	0.0	0.0
4	11.3	34.0	15.1	49.1	0.0	0.0
5	1.3	0.0	8.8	18.8	1.3	1.3
6	1.4	0.0	2.8	6.9	2.8	0.0
7	2.0	6.0	12.0	62.0	2.0	0.0
8	1.6	1.6	35.5	22.6	1.6	0.0
9	28.6	27.0	6.3	27.0	0.0	0.0
10	0.0	1.4	2.8	2.8	2.8	0.0
11	6.3	4.2	25.0	10.4	0.0	0.0
12	7.3	1.8	14.5	10.9	0.0	1.8
13	11.9	0.0	25.4	3.4	0.0	0.0

CD con lo que, si también pueden ir a la buhardilla esos mismos, hay 2.6 = 12 maneras.

Con esto habrá 22 maneras de distribuir a los niños. (Estudiante 64; problema 9.)

El cuadro 4 contiene los porcentajes de uso de estrategias aritméticas en los distintos problemas del cuestionario. Los resultados muestran una mayor frecuencia de aparición de la regla de la suma en los problemas 9 y 4, ambos problemas son de variaciones con repetición, distinto modelo y bastante dificultad. Ocasionalmente aparece en otros problemas, pero en ninguno de ellos llega a 11% de uso.

Deducimos que no fue completamente intuitivo el uso de la regla de la suma en estos problemas, ni siquiera para aquellos alumnos que tratan de generar un modelo combinatorio mediante enumeración u otro procedimiento. Por otro lado, el uso incorrecto predomina sobre el correcto, a pesar de ser una estrategia aritmética básica para resolver problemas combinatorios.

Regla del producto

Otra regla combinatoria básica de carácter aritmético es la regla del producto, mediante la cual construimos productos cartesianos de conjuntos de elementos un número dado de veces. Su uso será necesario para resolver los problemas compuestos (2 y 7) para todos los alumnos y para resolver el resto de los problemas en caso de que el alumno trate de generar un modelo combinatorio, en lugar de emplear las fórmulas.

El uso es correcto si el alumno aplica la regla del producto en el contexto adecuado para calcular el número de elementos del conjunto producto cartesiano. Por ejemplo, en el siguiente problema combinatorio compuesto:

> 3 figuras, tendré $P_3 = 3!$ modos de ordenarlas; añado una carta más que puedo colocar en 4 lugares distintos (x4); tengo 9 cartas distintas que puedo añadir (x9).
>
> Tendré en total $6 \cdot 4 \cdot 9 = 24 \cdot 9 = 216$ maneras distintas. (Estudiante 49; problema 2.)

El uso es incorrecto si el alumno aplica la regla del producto en un contexto inadecuado, porque o bien el producto cartesiano no es el adecuado, o bien los subconjuntos que se multiplican no son los pertinentes. Por ejemplo, en el caso siguiente:

$$C_{12}^{4} \cdot P_3 = 11880/9$$

> En este caso no influye el orden, por tanto, utilizaré combinaciones; como tengo 12 elementos y selecciono 4, pues tendré combinaciones de 12 elementos tomados de 4 en 4.
>
> Por otro lado, necesito que estén todas las figuras siempre seleccionadas, como tienen que salir siempre tengo permutaciones de 3 elementos. (Estudiante 59; problema 2.)

El uso de la regla del producto ha variado mucho, dependiendo del problema, y ha sido utilizada en todos los problemas con frecuencias que oscilan entre 4.9 y 74 por ciento.

Los problemas en los que más se ha usado han sido el 7 y el 2, ambos problemas son compuestos y mientras que en el 2 se usó correctamente de manera mayoritaria, en el 7 sucedió lo contrario. Éstos son precisamente los problemas en los que todos los alumnos deberían utilizar esta regla, por lo que apreciamos que, aunque su uso es mayoritario, todavía 28.8% en el problema 2 y 26% en el problema 7 no la emplean, lo que indica que no han sido capaces de relacionar la solución de los problemas combinatorios simples para resolver el problema compuesto.

En los restantes problemas se fueron alternando los éxitos y los fracasos, siendo su uso mayor en los problemas de colocación y partición, así como en el problema 11 de permutaciones con repetición; sólo una parte de los sujetos que trata de generar un modelo la usa. Esto indica que los estudiantes tuvieron dificultad en generalizar el número de configuraciones en un subconjunto de casos para obtener los factores en la regla del producto. También el porcentaje de aplicaciones incorrectas de la regla, entre los alumnos que la emplean, señala en esta misma dirección.

Regla del cociente

La regla del cociente se emplea para relacionar entre sí combinaciones y variaciones o bien permutaciones ordinarias y permutaciones con repetición, es decir, su uso estará especialmente indicado en los problemas 3, 6, 10, combinaciones y 1, 5, 12, permutaciones con repetición. Usar la regla del cociente implica establecer una relación de equivalencia dentro de un conjunto de configuraciones combinatorias. Cuando el alumno identifica directamente la operación combinatoria no será necesario el uso de esta regla a nivel consciente, pero sí en los alumnos que tratan de generar un modelo.

El alumno aplica correctamente la regla del cociente, cuando lo hace en el contexto adecuado, estableciendo una relación de equivalencia dentro de un conjunto de configuraciones combinatorias e identificando el número de elementos en cada clase de equivalencia. Por ejemplo, identifica una clase de equivalencia en dos permutaciones obtenidas al intercambiar la posición de dos números iguales, como ocurre en el ejemplo siguiente. Aunque el estudiante no resuelve totalmente el problema, pues le falta seleccionar 3 de los 4 números diferentes a 8, el uso que hace de la regla del cociente es correcto.

$$(V_{5,2}/2) \cdot P_3 = (5 \cdot 4/2) \cdot 6 = 60$$

> $V_{5,2}$ es la manera de obtener las distintas posiciones que pueden ocupar los dos ochos dentro de los 5 puestos posibles. Hemos dividido por 2 porque con $V_{5,2}$ suponemos que los dos ochos son números diferentes pero como eso no es así, cada dos casos se reducen a uno y, por eso, divido los posibles casos por 2.
>
> Luego hemos multiplicado por $P_3 = V_{3,3}$ que serían las posibles posiciones por ocupar de los 3 números restantes para los tres puestos que quedan, tras haber colocado los dos ochos. (Estudiante 48; problema 7.)

Es incorrecto si aplica la regla del cociente inadecuadamente, porque la relación de equivalencia identificada no es pertinente o porque no identifica correctamente el número de elementos en cada clase de equivalencia. Por ejemplo, no es pertinente permutar los grupos entre sí y la relación establecida es, por tanto, inadecuada:

> Están 4 personas para hacer 2 trabajos distintos, con lo cual tenemos varias posibilidades:
>
> AB, AC, AD
>
> CD, BD, CB
>
> Hay 6 posibilidades para cada grupo, por tanto, se pueden hacer 3 grupos distintos de parejas. (Estudiante 47; problema 5.)

El uso de la regla del cociente, tan ligado a muchos de los procesos de resolución de problemas combinatorios, ha sido prácticamente testimonial en los problemas previstos: sólo en el problema 1, de dificultad media, la usó 12.8% de los estudiantes, unas veces satisfactoriamente y otras tantas no, a pesar de que en este problema aproximadamente 70% de los estudiantes trataron de generar un modelo con diversos métodos. Menos uso se hizo aún en los problemas 7 (en donde 86% de alumnos trata de generar un modelo) y 12 (en donde 76% de alumnos trata de generar un modelo). En los problemas 3, 5 y 10, debido al tamaño pequeño de la solución, puede comprenderse mejor que el alumno trate de resolverlo simplemente por ensayo y error, sin recurrir a la regla del cociente. En el problema 6, casi 70% de los alumnos resolvieron directamente el problema mediante una operación combinatoria, y 30% restante prácticamente nunca usa la regla del cociente.

Debido al escasísimo empleo, no siempre correcto, no parece que sea una regla intuitiva ni que haya aportado nada a la resolución de problemas combinatorios. Pensamos que no se hizo suficiente énfasis en esta regla durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la combinatoria que, en su día, protagonizaron los alumnos de esta muestra.

En general, podemos decir que tanto la regla de la suma como la del cociente se han manifestado inoperantes y, únicamente, la regla del producto parece constituir una herramienta con una cierta popularidad en cuanto a su uso entre los estudiantes, aunque con unos resultados que deberían mejorarse.

CONCLUSIONES

La combinatoria constituye uno de los núcleos centrales de la matemática discreta, o conjunto de conceptos y métodos matemáticos que estudia los problemas en los que intervienen conjuntos discretos y funciones definidas sobre los mismos. A pesar de ello, alumnos con una alta preparación matemática encuentran una dificultad generalizada en resolver este tipo de problemas, según hemos mostrado en nuestro trabajo.

En general, los alumnos no emplean estrategias para reducir la complejidad del problema y en la enseñanza no se aprovechan los problemas combinatorios para mostrar el uso de técnicas generales de resolución de problemas ni tampoco de estrategias aritméticas específicas de este tipo de problemas.

En nuestro trabajo hemos visto que las estrategias empleadas espontáneamente para resolver un problema dependen, sobre todo, del modelo al que pertenece el problema, de la operación combinatoria de que se trate y del tamaño de los parámetros:

- La traducción del problema a otro equivalente es más frecuente en los problemas de partición y colocación, porque el alumno sólo reconoce directamente la operación combinatoria en los problemas de selección debido a la definición que le ha sido enseñada.
- El alumno fija variables en los problemas con mayor tamaño de solución, puesto que no es capaz de una enumeración sistemática o de generalizar directamente cuando los parámetros tienen un tamaño elevado.
- La descomposición del problema en partes se emplea en los problemas compuestos y problemas de partición y colocación; en estos últimos porque el alumno no reconoce la operación combinatoria.
- El uso de la regla del producto es generalizado en los problemas compuestos, y este uso es adecuado.

- El uso de la regla de la suma en los problemas de variaciones con repetición, aunque muchas veces es innecesario.
- Hay un uso puramente testimonial de la regla del cociente.

Estos resultados cuestionan los métodos actuales de enseñanza de la combinatoria con un énfasis excesivo en las definiciones de las operaciones combinatorias y en la identificación de las mismas como único método de resolución de problemas. La combinatoria es, por el contrario, un campo donde las estrategias de resolución de problemas, tales como dividir el problema en partes, traducir el enunciado a un problema equivalente, fijar variables, etc., pueden ser adecuadamente ejemplificadas.

Pensamos que es una oportunidad interesante de ayudar al alumno a desarrollar estas herramientas, mediante la práctica adecuada de estas destrezas en el aula. Como afirma Sáenz (1998), la cuestión clave del proceso educativo, y lo que diferencia un método inefectivo de otro que logra sus objetivos, es la adquisición por los estudiantes de un pensamiento matemático equilibrado, que incluye no sólo el dominio de algoritmos y automatismos, sino también la capacidad de plantear problemas y de hacer uso de heurísticas personales apropiadas y creativas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo forma parte del proyecto BSO2000-1507 (M.E.C. Madrid).

APÉNDICE: CUESTIONARIO PARA LA EVALUACIÓN DEL RAZONAMIENTO COMBINATORIO

ÍTEM 1

En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta manera hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer la selección de las fichas?

Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden, blanca, azul, roja y azul.

Ítem 2

Un niño tiene doce cartas: nueve de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas, con la condición de que siempre estén las tres figuras?

Ejemplo: sota, caballo, rey, 1.

Ítem 3

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta, ¿de cuántas maneras podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes?

Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

Ítem 4

Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas maneras diferentes puede regalar los coches a sus hermanos?

Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Ítem 5

Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas maneras pueden dividirse para realizar los trabajos?

Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

Ítem 6

Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas maneras puede elegir tres de estos alumnos?

Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

ÍTEM 7
¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos.

Ejemplo: 88 124.

ÍTEM 8
El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Éste es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Ángel puede estacionar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas maneras posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen estacionar sus coches en la cochera?

ÍTEM 9
Cuatro niños, Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Ésta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar a los niños para dormir. ¿De cuántas maneras diferentes puede la abuela colocar a los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía.)

Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

ÍTEM 10
María y Carmen tienen cuatro cromos numerados de 1 a 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos cromos para cada una). ¿De cuántas maneras se pueden repartir los cromos?

Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2, y Carmen con los cromos 3 y 4.

ÍTEM 11
En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola del bombo y anotamos su número. La bola extraída se introduce en el bombo. Se elige una segunda bola y se anota su número. La bola extraída se

vuelve a introducir en el bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?

Ejemplo: se puede obtener el número 222.

Ítem 12

Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A, B, C, C y C. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de la otra formando una hilera?

Ejemplo: pueden estar colocadas de la siguiente manera ACBCC.

Ítem 13

Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: presidente, tesorero y secretario. Para seleccionarlo, disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos?

Ejemplo: Arturo presidente, Carlos tesorero y David secretario.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C., J. D. Godino y V. Navarro-Pelayo (1997a), "Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 32, pp. 181-199.

------ (1997b), "Assessing Combinatorial Reasoning", en I. Gal y J. Garfield (eds.), *The Assesment Challenge in Statistics Education,* Amsterdam, International Statistical Institute e IOS Press, pp. 239-252.

Dubois, J. G. (1984), "Une systematique des configurations combinatoires simples", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 11, pp. 37-57.

Fischbein, E. y A. Grossman (1997a), "Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 34, pp. 27-47.

Fischbein, E. y A. Grossman (1997b), "Tacit Mechanism of Combinatorial Intuitions", en E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Lahti, Lahti Research and Training Centre, vol. 2, pp. 265-272.

Gascón, J. (1988), *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas,* tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

Hadar, N. y R. Hadass (1981), "The Road to Solving a Combinatorial Problem is Strewn with Pitfalls", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 12, pp. 435-443.

Inhelder, B. y J. Piaget (1955), *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent,* París, Presses Universitaires de France.

Marchand, H. M. (1994), "The Resolution of Two Combinatorial Tasks by Mathematics Teachers", en J. P. Ponte y J. F. Matos (eds.), *Proceedings of the 18 PME Conference,* Universidad de Lisboa, vol. 1, p. 53.

Navarro-Pelayo, V. (1994), *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria,* tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Navarro-Pelayo, V., C. Batanero y J. D. Godino (1996), "Razonamiento combinatorio en alumnos de Bachillerato", *Educación Matemática,* vol. 8, núm. 1, pp. 26-39.

Roa, R. (2000), *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada,* tesis doctoral, Universidad de Granada.

Sáenz, C. (1998), "Teaching Probability for Conceptual Change", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 35, pp. 233-254.

DATOS DE LOS AUTORES

Rafael Roa Guzmán
Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación,
Universidad de Granada, España
rroa@ugr.es

Carmen Batanero Bernabeu
Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación,
Universidad de Granada, España
batanero@goliat.ugr.es

Juan Díaz Godino
Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación,
Universidad de Granada, España
jgodino@goliat.ugr.es

www.santillana.com.mx/educacionmatematica