Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Guzmán Hernández, José; Kieran, Carolyn; Squalli, Hassane
La calculadora con pantalla multilínea y el surgimiento de estrategias numéricas en alumnos de primero, segundo y tercer año de secundaria
Educación Matemática, vol. 15, núm. 2, agosto, 2003, pp. 105-127
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

La calculadora con pantalla multilínea y el surgimiento de estrategias numéricas en alumnos de primero, segundo y tercer año de secundaria

José Guzmán Hernández, Carolyn Kieran y Hassane Squalli

Resumen: La calculadora graficadora, con su pantalla multilínea, sirvió como herramienta de exploración en el desarrollo de una secuencia de actividades durante una semana, en torno al problema "Los cinco pasos a cero". En este estudio participaron estudiantes de los tres grados de secundaria, cuyas edades oscilaban entre 13 y 16 años. El análisis estuvo enfocado en la interacción entre el poder epistemológico de la tecnología y el surgimiento de estrategias matemáticas. La calculadora desempeñó un papel diferente en cada grupo. Para los alumnos de 13 a 15 años de edad, de primero y segundo año de secundaria, fue una herramienta para calcular y formular conjeturas. Para los alumnos de tercero de secundaria, también sirvió como una herramienta de búsqueda, lo cual los condujo a la obtención de estrategias eficaces que fueron escasamente observadas en los otros alumnos.

Palabras clave: actividad, estrategia, herramienta, teoría, tecnología.

Abstract: The graphing calculator with its multi-line screen served as a tool of exploration in a week-long sequence of activities developed around the "Five Steps to Zero" problem. Three classes of students, aged 13-16 years, participated. The analysis focused on the interaction between the epistemological power of the technology and the emergence of mathematical strategies. The calculator was found to play a different role at each grade level. For the 13- to 15-year-olds of Secondary 1 and 2, it was a tool for calculating and for formulating conjectures. For the older Secondary 3 pupils, it also served as a search tool, thus leading to more powerful strategies than were observed in the other classes.

Key words: activity, strategy, tool, theory, technology.

Fecha de recepción: octubre de 2001.

Desde su llegada a la escena educativa, a mediados de la década de 1980, la calculadora graficadora –con su pantalla multilínea– ha sido utilizada como herramienta en la enseñanza y el aprendizaje; especialmente de funciones y sus distintas representaciones gráficas. En varios estudios se han informado las ventajas que tiene esta herramienta en, por ejemplo, la comprensión del concepto de función (véanse Dunham y Dick, 1994, pp. 440-445; Ruthven, 1990, pp. 23-25, y 1996, pp. 434-468; Streun, Harskamp y Suhre, 2000, pp. 27-40). Sin embargo, el potencial de la calculadora graficadora no está limitado al dominio de las funciones y sus gráficas. Con su pantalla de ocho líneas, en la que se puede mostrar varias operaciones matemáticas y sus resultados, la calculadora graficadora ha sido una herramienta poderosa al abordar la formalización de procedimientos aritméticos (Ruthven, 1993, pp. 431-450).

Drijvers y Doorman (1996, pp. 425-440) sugieren que, mediante actividades apropiadas, se puede conducir al alumno hacia la estructura de una fórmula en la que, a través de la reflexión y de la generalización, pueden resultar teoremas matemáticos interesantes. Estos autores también afirman que, al acrecentarse la confianza de los estudiantes en el uso de la calculadora, se fomenta en ellos la búsqueda de nuevos procedimientos para resolver problemas; en particular, hacen uso del ensayo sistematizado que, a su vez, los lleva hacia el surgimiento o mejoramiento de estrategias eficaces en la resolución de problemas. Así, la pantalla multilínea de la calculadora graficadora nos proporciona una oportunidad pedagógica prometedora que no ofrece cualquier calculadora con pantalla simple de una línea.

Atendiendo a la problemática antes descrita, nos dimos a la tarea de planificar e implementar un estudio que contribuyera al crecimiento del campo de la literatura enfocada en la interacción entre el poder epistemólogico de esta tecnología (véase Balacheff y Kaput, 1996, pp. 469-501) y el surgimiento de estrategias matemáticas.

EL ESTUDIO

Propósito

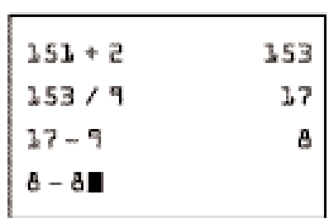
En este estudio se detectaron y analizaron las estrategias numéricas que surgieron en estudiantes de secundaria (13 a 16 años de edad) mediante el uso de la calculadora con pantalla multilínea (TI–83+) y una secuencia de actividades. Dicha secuencia fue planificada e implementada en torno a una situación didáctica particular y en un ambiente particular de juego.

Actividad implementada y su análisis desde el punto de vista de las matemáticas

En este apartado vamos a analizar la actividad que propusimos a los estudiantes en términos de las estrategias que pueden surgir en alguien que la aborda con una herramienta, como lo es la calculadora con pantalla multilínea. Las estrategias que vamos a discutir son las que puede utilizar un experto o un novato o alguien que, siendo en sus inicios un novato, puede convertirse en experto, mediante la utilización de la calculadora. En estos casos, vamos a pensar en aquellas estrategias que sean eficaces, o bien, que no lo sean. Cuando hablemos de estrategias eficaces, pondremos énfasis especial en aquellas que nos permiten resolver la tarea en el menor número de operaciones[1] posibles.

Puesto que la actividad que abordamos en este estudio tiene que ver con números enteros, tomaremos como apoyo en nuestra discusión la teoría relacionada con este tipo de números. He aquí la actividad que propusimos a los estudiantes y en la que se basó toda la fase experimental del estudio aquí presente. A la derecha del enunciado, damos una solución posible para el número 151.

> *Toma cualquier número entero de 1 a 999 y trata de llevarlo a cero en cinco pasos o menos; usa solamente los números del 1 al 9 y las cuatro operaciones básicas: +, −, ×, ÷ para hacer transformaciones. Puedes usar el mismo número más de una vez* (adaptado de Williams y Stephens, 1992, pp. 233-234).



[1] En este artículo utilizamos las palabras "operaciones" y "pasos" como sinónimas.

Una mirada cuidadosa a esta actividad permite darnos cuenta de que en ella entran en juego conceptos matemáticos relacionados con números enteros positivos; por ejemplo, múltiplos, factores, números pares e impares, así como el de número primo, entre otros. Así, para que los alumnos tengan éxito en esta actividad es necesario que puedan "movilizar" algunos de los conceptos antes mencionados. Aquí es importante que el alumno sepa relacionar los conceptos de factor/divisor o a la inversa; esto, desde luego, no es evidente para un alumno novato en la resolución de este tipo de tareas o, incluso, puede no ser claro para un experto.

Si pensamos en la utilización de estrategias eficaces, es evidente que debemos involucrar –desde el inicio del proceso de solución, aquellas que nos permitan descender el número dado a cero en el menor número de pasos posibles– a los divisores más grandes permitidos en esta actividad, a saber: 9, 8, 7, 6. Tomando en cuenta esta información, se pueden tener las siguientes posibilidades una vez que se haya dado el número entero a los estudiantes:

a) el número dado tiene divisores pequeños, digamos 2 o 3, y esto le impide descender rápidamente a cero, en caso de utilizar la división como primer paso y si dicho número es de tres cifras (digamos entre 500 y 999);
b) el número dado sólo tiene como divisores a 1 y a él mismo (es el caso de los números primos). En éstos se hace necesario sumar o restar al número inicial un número de 1 a 9 y, de esta manera, obtener otro que tenga como divisor a 9 o a 8, por ejemplo.

Analicemos algunos ejemplos. Pensemos en aquellos números que necesitan dos operaciones para llevarlos a cero. Obviamente, son los que resultan del producto de dos factores menores o iguales que 9; en este caso, el mayor número que necesita dos pasos para llevarlo a cero es 81, pues $81 = 9 \times 9$. El lector puede verificar fácilmente esta aseveración si efectúa la división de 81 entre 9 y después una resta.

Siguiendo con la idea de factores de un número entero dado, tendremos que todos aquellos que necesitan tres pasos para llevarlos a cero resultan del producto de tres factores menores o iguales que 9, o bien, que mediante una transformación al número dado nos conduzca a otro que es el producto de dos factores. Éste es el caso de 19, pues $19 - 1 = 18$ y $18 = 9 \times 2$; podría utilizarse cualquier otro procedimiento para llevar 19 a cero, pero siempre son necesarias tres operaciones como mínimo para descender a cero este número. Por cierto, éste es el menor entero positivo que necesita tres pasos como mínimo para llevarlo a cero, mientras que el mayor es 729, pues $729 = 9 \times 9 \times 9$, como puede comprobarse sin dificultad.

De igual manera, todo aquel número entero que sea el producto de cuatro factores menores o iguales que 9 necesita de cuatro pasos para llevarlo a cero o bien aquel que mediante una transformación nos conduzca a otro número que sea el producto de tres factores. El menor de éstos es 92, pues $92 - 2 = 90$ y $90 = 9 \times 5 \times 2$. Cualquier otro procedimiento que utilicemos para llevar 92 a cero implica utilizar cuatro pasos como mínimo. En el rango de números implicados en la actividad, el mayor número que necesita cuatro operaciones como mínimo para descender a cero es 980, pues $980 = 7 \times 7 \times 5 \times 4$.

Hay números que necesitan cinco operaciones para llevarlos a cero. Éste es el caso de aquellos que son el producto de cinco factores menores o iguales que 9, o bien, que mediante una transformación, ésta nos conduzca a otro que sea el producto de cuatro factores; otra posibilidad es que necesite de dos transformaciones para llevarlo a cero. Esto sucede con 417, pues con este número se tienen, entre otras, las siguientes posibilidades:

Figura 1a

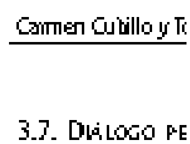
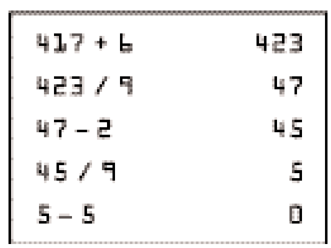


Figura 1b



Las operaciones mostradas en la figura 1a y en la figura 1b sugieren que una de las mejores estrategias para llevar a cero un número dado es buscar aquellos números que sean múltiplos de 9; sin embargo, no siempre resulta apropiado buscar estos múltiplos. Un ejemplo que permite constatar esta aseveración lo constituye el número 987. Veamos qué sucede si buscamos, desde el inicio, a sus dos números vecinos que son múltiplos de 9.

Figura 2a

987 – 6	981
981 / 9	109
109 – 1	108
108 / 9	12

Figura 2b

987 + 3	990
990 / 9	110
110 / 5	22
22 / 2	11

Claramente, las figuras 2a y 2b nos muestran que son necesarias seis operaciones como mínimo para descender 987 a cero. No obstante, es posible llevar 987 a cero en cinco pasos como mínimo; ello puede verse en la siguiente figura 3.

Figura 3

987 – 7	980
980 / 7	140
140 / 7	20
20 / 5	4
4 – 4	0

La discusión que hemos hecho hasta el momento, en términos de factores del número dado, parece indicar que todos los números comprendidos entre 1 y 999, con las condiciones señaladas en la actividad, tienen solución en al menos cinco pasos. La respuesta a esta conjetura es negativa, pues hay dos números comprendidos en ese intervalo que necesitan seis operaciones, como mínimo, para descender a cero; tales números son 851 y 853. Es relativamente fácil darse cuenta de que estos números tienen la propiedad antes señalada. Basta observar sus factores y el de sus dos números vecinos más cercanos que son múltiplos de 9. He aquí tal información:

$$851 = 23 \times 37$$
$$853 = 1 \times 853$$

Mientras que los factores de sus dos vecinos más próximos son:

$$855 = 5 \times 9 \times 19$$
$$846 = 2 \times 9 \times 47$$

Y, claramente, tanto 855 como 846 necesitan cinco operaciones como mínimo para llevarlos a cero y, en consecuencia, se verifica la aseveración que hicimos con respecto a la cantidad de operaciones que necesitan los números 851 y 853 para llevarlos a cero.

Retomemos la discusión inicial de esta sección en términos de las estrategias posibles que pudieran surgir en los estudiantes de secundaria cuando abordan esta actividad con ayuda de una calculadora. Se espera que un alumno no experto utilice desde el inicio la división entre números pequeños, digamos entre 2 o entre 3 o bien entre 5; ya sea que el número dado sea divisible entre esos números, o bien, que mediante una transformación (suma o resta de algún número entre 1 y 9) de ese número, se pueda obtener otro que sea divisible entre esos números. Éstas, desde nuestro punto de vista, son las estrategias más primitivas que pueden surgir de forma espontánea cuando los alumnos inicien el trabajo con esta actividad. Las otras tenderían a la búsqueda de divisores grandes del número dado o de alguno de sus vecinos más cercanos.

Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas

En este apartado no pretendemos hacer un análisis exhaustivo del uso de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas. Más bien, nos limitaremos a comentar algunos estudios recientes que muestran el impacto que ha tenido el uso de la calculadora con pantalla multilínea en el ambiente educativo.

En los últimos diez años, la investigación educativa relacionada con el uso de la calculadora se ha incrementado grandemente. En lo concerniente a estudios que tienen relación con el ambiente numérico, podemos mencionar los llevados a cabo por Ruthven (1993, 1996). Este autor menciona que, cuando los estudiantes inician con el uso de la calculadora, la ven como una herramienta que les puede facilitar cálculos numéricos, o bien, el trazo de gráficas de funciones. Sin embargo, a medida que van teniendo confianza en su uso, cambian sus estrategias iniciales y refinan sus procedimientos. Apoyándonos en estos resultados, podemos afirmar que la calculadora permite a los estudiantes encontrar y después refinar sus conjeturas de manera progresiva mediante la retroacción positiva de este instrumento.

De acuerdo con Heid (1997), el uso de la calculadora ha cambiado fuertemente en los últimos años, pues en sus inicios, la utilización de esta herramienta se circunscribía, casi exclusivamente, a la verificación de respuestas en el ámbito de la aritmética. Hoy tenemos en el mercado calculadoras científicas con las que se pueden trabajar problemas de trigonometría y estadística, entre otros temas de interés en la enseñanza escolarizada. También existen otras llamadas "supercalculadoras" o calculadoras avanzadas (TI 89 o 92, por ejemplo) con las que se pueden trabajar diversos temas de matemáticas, tanto elementales como superiores.

A pesar del gran avance en cuanto al uso de esta herramienta, no existe en el ambiente educativo un gran número de investigaciones que aborden completamente los dominios numéricos –que pueden ser considerados como parte de la aritmética– en los que el uso de la calculadora ya no se circunscriba a la "verificación de respuestas numéricas".

En efecto, podríamos pensar que la ausencia relativa de tales estudios, sobre todo con alumnos de secundaria, se debe al hecho de pensar que estos alumnos completan su desarrollo numérico en la escuela primaria. No obstante, hay estudios, como el de Zaskis y Campbell (1996, pp. 540-563), que abordan el dominio numérico con profesores de escuelas elementales, donde los autores argumentan que "Desarrollar una comprensión conceptual de la divisibilidad y de la búsqueda de factores es esencial en el desarrollo de la comprensión conceptual de la estructura multiplicativa de los números" (p. 563); estos autores agregan que es deseable que ello suceda en los primeros años de la escuela secundaria.

MARCO TEÓRICO

La teoría de Brousseau de Situaciones Didácticas (1997), más específicamente la descripción de "La carrera a 20" en el capítulo introductorio del volumen en inglés de su trabajo, sirvió de base para inspirar tanto la creación de secuencias de actividades propias del problema que abordamos, como la forma en que dichas secuencias fueron implementadas en los salones de clase. La naturaleza de las actividades fue diseñada de acuerdo con cuatro fases: *iniciación, acción, formulación* y *validación,* que son parte medular de la teoría de Brousseau.

En lo que sigue, hacemos una descripción de las secuencias de actividades desarrolladas en torno al problema antes descrito, y que llevamos a cabo durante toda una semana con alumnos de secundaria. En la fase de *iniciación,* el profesor de cada uno de los grupos explicaba las reglas del juego a los alumnos; ello marcó el principio de la actividad. En esta fase, el profesor preguntaba a los alumnos qué estrategias les permitían llevar a cero el número 150. Sucedió algo notable en el grupo de tercero de secundaria; por iniciativa propia, el profesor ponía énfasis –mediante preguntas planteadas a los estudiantes– en la búsqueda de estrategias que les permitieran lograr su objetivo, pero con el menor número de operaciones posibles.

La fase de *acción* empezó –en cada uno de los grupos de secundaria– con el trabajo en parejas; éstas fueron sugeridas por el profesor del grupo. Los números 144, 154 y 151 fueron la base para todas las discusiones que tuvieron los alumnos en esta parte de la actividad. Con estos números, los estudiantes generaron varios procedimientos para llevarlos a cero; cada uno de éstos fue registrado en hojas de trabajo por los propios alumnos.

En la fase de *formulación,* decidimos que todo el grupo trabajara en dos equipos (esto fue propuesto en cada uno de los grupos de primero, segundo y tercero de secundaria); cada equipo estaba formado por diez alumnos, aproximadamente. Durante el desarrollo de esta fase, los alumnos trataban de encontrar "estrategias ganadoras"; es decir, aquellas que les permitieran llevar a cero el número dado con el menor número de operaciones posibles. Así, los estudiantes trabajaron con los números 430, 729, 864, 498, 181 y 359; cada uno de estos números –uno a la vez– fue propuesto a los estudiantes por el profesor del grupo a sugerencia nuestra.

El desarrollo de esta fase se dio de la manera siguiente: los miembros del equipo nombraban a un representante para que éste pasara al pizarrón y abordara el número propuesto con ayuda de la calculadora. Ganaba el alumno que terminara más rápido y con el menor número de pasos posibles; obviamente, ellos debían encontrar una "estrategia ganadora". Cuando ambos "jugadores" terminaban su turno, ellos y sus demás compañeros de equipo discutían las estrategias encontradas y las escribían en las hojas de trabajo. Al final de esta fase cada equipo escribió en un pizarrón una síntesis de las "estrategias ganadoras" encontradas.

La fase de *validación* incluía actividades relacionadas con la combinación de divisores y, en ellas, los alumnos pensaban en criterios de divisibilidad, múltiplos y números primos. En esta fase, el grupo completo discutía explícitamente las heurísticas que habían desarrollado para llevar a cero el número dado, en cinco pasos o menos.

La culminación de esta fase consistió en la búsqueda de un número que cada alumno consideraba difícil llevar a cero en cinco pasos o menos para sus demás compañeros. Tenían que justificar por qué lo creían así y, además, dar la solución para el número propuesto.

PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN Y PROCEDIMIENTO

Este proyecto de investigación involucra a grupos completos de estudiantes de primero, segundo y tercer año de secundaria (13 a 16 años de edad), tanto en México como en Canadá. En este artículo sólo presentamos los resultados de la parte mexicana de dicho proyecto. Trabajamos con tres grupos de una escuela secundaria; cada uno de diferente nivel escolar y atendidos por profesores distintos. Los estudiantes, considerados con una habilidad promedio en matemáticas, tenían poca experiencia en el uso de la calculadora de pantalla multilínea en sus clases ordinarias de matemáticas.

La actividad fue implementada y desarrollada de la siguiente manera. A todos los estudiantes se les aplicó un cuestionario inicial; éste contenía preguntas que están orientadas hacia:

- el uso y las actitudes de ellos con respecto a las calculadoras;
- el conocimiento de divisores, múltiplos y números primos.

Antes de iniciar la fase experimental, a todos los estudiantes se les dio una capacitación breve con la calculadora (TI-83+) para que se familiarizaran con ella. Durante una semana completa trabajamos con los alumnos actividades que conformaron el cuerpo principal del estudio. En varias de éstas, el estudiante tenía que mostrar –mediante el uso del *view-screen*– a sus demás compañeros su plan de solución para los números propuestos en las hojas de trabajo.

El plan adoptado por los estudiantes para llevar a cero el número dado proporcionaba al resto del grupo, así como a los investigadores, la posibilidad de observar el tiempo real de todas las estrategias numéricas utilizadas por el alumno con ese número. Todas las actividades implementadas en los grupos de secundaria fueron videograbadas y el investigador en turno tomaba notas de campo de cada sesión. Al término de las sesiones de trabajo se aplicó un examen individual a los estudiantes de los tres grupos y, finalmente, se entrevistó a cuatro alumnos de cada grupo.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Tomamos en cuenta, para el análisis de las estrategias utilizadas por los estudiantes, dos elementos de la secuencia de la actividad propuesta: uno de ellos proviene de la fase de *acción*, en la que los alumnos trataron de llevar a cero el número 151, y el otro es el "número difícil" que ellos propusieron a sus demás compañeros en una de las actividades de la semana en la que abordaron la fase de *validación*.

Antes de discutir las estrategias que surgieron en cada grupo y cómo fueron utilizadas éstas en el transcurso del estudio, listamos a continuación las que consideramos significativas, así como un resumen, contenido en un cuadro, en torno a la utilización de estas estrategias en cada uno de los grupos (véase el cuadro 1).

ESTRATEGIAS PRINCIPALES OBSERVADAS

- **S1.** Aumentar o disminuir el número dado para que éste termine en 0 o en 5 y, después, dividir entre 5.
- **S2.** Aumentar o disminuir el número dado para obtener uno de la forma *abc* de tal manera que se pueda identificar un divisor de *abc*, ya sea a partir de *ab* o de *bc*.
- **S3.** Aumentar o disminuir el número dado para obtener otro que sea divisible entre 9 y, en seguida, dividir entre 9.
- **S4.** Sustraer 9 del número (impar) dado y así obtener el número par más pequeño posible y, en seguida, dividir entre un número par.
- **S5.** Disminuir el número y dividir entre el mayor número posible (de 2 a 9).

PRIMER AÑO DE SECUNDARIA

Estrategias principales utilizadas con el "número difícil"

Cuando a los estudiantes se les preguntó, en la última fase del estudio, cómo encontrar un número que ellos creyeran difícil llevar a cero para sus demás compañeros, los alumnos aplicaban las estrategias aprendidas en las fases previas para encontrar tal número. Se les pidió, además, que mostraran los pasos para

Cuadro 1 Resumen de la evolución de las estrategias utilizadas por los estudiantes en los tres grados de secundaria

Estrategias	Primero de secundaria (13 a 14 años)		Segundo de secundaria (14 a 15 años)		Tercero de secundaria (15 a 16 años)	
	Con el número 151 (n = 21)	Con "el número difícil" (n = 19)	Con el número 151 (n = 25)	Con "el número difícil" (n = 24)	Con el número 151 (n = 15)	Con "el número difícil" (n = 18)
S1	9 (42.86%)	8 (42.10%)	17 (68%)	10 (41.67%)	6 (40%)	5 (27.77%)
S2	2 (9.52%)	6 (31.57%)	5 (20%)	4 (16.67%)	1 (6.66%)	3 (16.66%)
S3	1 (4.76%)	1 (5.26%)	3 (12%)	6 (25%)	0	9 (50%)
S4	3 (14.28%)	1 (5.26%)	0	1 (4.16%)	2 (13.33%)	0
S5	0	0	0	2 (8.33%)	1 (6.66%)	1 (5.55%)
Otra o ninguna	6 (28.57%)	3 (15.79%)	0	1 (4.16%)	5 (33.33%)	0

Figura 4

Dunia		Érika		Ashyadeth	
741		757		971	
741 + 9	750	757 – 7	750	971 + 4	975
750 / 5	150	750 / 5	150	975 / 5	195
150 / 5	30	150 / 5	30	195 / 5	39
30 / 5	6	30 / 5	6	39 / 3	13
6 – 6	0	6 – 6	0	13 – 4	9
				9 – 9	0

llevar a cero dicho número. A partir del análisis de sus estrategias, encontramos que las dominantes fueron dos, a saber: S1 y S2. La manera en que se utilizó S1 se ilustra en la figura 4.

Como podemos ver, cuando no era posible aplicar la división de manera inmediata, el primer paso de los estudiantes fue transformar el número dado en otro; de tal manera que éste terminara en 0 o en 5 y, después, dividir entre 5.

La estrategia más popular –utilizada por los estudiantes para el "número difícil"– fue S2: llevar el número a la forma *abc*, la cual, entonces, les sugería un divisor posible mayor que 5 (véase la figura 5).

Figura 5

Mariana V		Mariana P		Marisol	
891		823		683	
891 + 9	900	823 – 4	819	683 – 3	680
900 / 9	100	819 / 9	91	680 / 8	85
100 / 5	20	91 / 7	13	85 / 5	17
20 / 5	4	13 / 9	4	17 + 3	20
4 – 4	0	4 – 4	0	20 / 5	4
				4 – 4	0

Como podemos notar en la figura 5, Mariana V agregó 9 al número 891; así obtuvo 900, que es un múltiplo de 9. Podemos percibir que su estrategia es consistente con la regla: "Cualquier número que pueda ser escrito como *a*00 es un múltiplo de *a*". Mientras que en el otro caso, Mariana P después de haber sustraído 4 de 823 obtuvo 819; este último número está compuesto de los bloques de números 81 y 9, los cuales son múltiplos de 9. Parece que, entonces, Mariana P utiliza la regla: "Si el número compuesto por dos dígitos *ab* es múltiplo de *c*, entonces el número *abc* compuesto por tres dígitos es múltiplo de *c*".

Creemos que, incluso, esas dos reglas están basadas matemáticamente en el uso empírico que ellas hicieron de dichas reglas. En la tercera columna de la figura 5, de izquierda a derecha, mostramos el trabajo de Marisol, que restó 3 de 683 para obtener 680 y luego dividió entre 8; al parecer ella utilizó la regla no general: "Si *bc* es un múltiplo de *p*, entonces *abc* es también un múltiplo de *p*" (esta regla es falsa en el caso de 780, ya que 80 es divisible entre 8, pero 780 no lo es).

La tendencia general de los alumnos a transformar los números dados en otros que terminaran en 0, lo mismo que la elaboración de reglas implícitas subyacentes, como S2, muestra la necesidad de trabajar con ellos el dominio numérico de dos dígitos; un dominio que es muy familiar para los estudiantes. Por un lado, los números de la forma *ab*0 o *a*00 permiten a los alumnos ver con mayor facilidad los divisores de esos números y, por otro, pueden visualizar el número, digamos 981, como una yuxtaposición de 9 y 81; ello los conduce, entonces, a la inferencia de la divisibilidad del número inicial, tomando como base la divisibilidad de 81 y 9.

Es pertinente comentar que sólo una estudiante de este grupo utilizó S3, y esto fue con el número 771. Esta alumna sustrajo 6 de 771 para obtener 765; que después dividió entre 9. Notemos que el razonamiento heurístico que apoya las dos estrategias previas (S1 y S2) no se aplica en el caso de la división de 765 entre 9.

Evolución de las estrategias de los alumnos al ser comparadas con su trabajo inicial sobre 151

Con el número 151, 15 de 21 alumnos propusieron soluciones (parece que el resto fue incapaz de hacerlo, o bien, no sintieron la necesidad de registrar sus ensayos); éstas involucraron las estrategias S1, S2, S3 y S4. La estrategia dominante, S1, fue utilizada por nueve alumnos; de los cuales, cuatro usaron la misma estrategia con el "número difícil". Los otros cinco alumnos evolucionaron hacia S2 ($n = 4$) y hacia S3 ($n = 1$). Parece que S1 fue una estrategia natural, *robusta* y atractiva.

Los dos alumnos que usaron S2 para llevar a cero el número 151, también la aplicaron con el "número difícil", mientras que el alumno que utilizó S3 con 151 no la aplicó en su trabajo posterior; por lo que el uso de esta estrategia se atribuye al azar más que a la intención. La estrategia más primitiva S4, en comparación con las aquí reportadas, fue utilizada por tres alumnos tal como se ilustra con el trabajo de Dunia, que mostramos en seguida: 151 - 9 = 142; 142 / 2 = 71; 71 - 9 = 62; 62 / 2 = 31; 31 - 6 = 25; 25 / 5 = 5; 5 - 5 = 0. Como puede notarse, esta estrategia consiste en sustraer –usualmente 9– para obtener un número divisible entre 2. Finalmente, sólo uno de los tres alumnos que aplicó la estrategia S4 la continuó utilizando en la última fase de la actividad; los otros dos alumnos desarrollaron estrategias más eficaces.

Segundo año de secundaria

Evolución de las estrategias: de 151 al "número difícil"

Con el número 151, abordado en la fase de *acción*, 17 de 25 alumnos usaron S1 –transformaron 151 a 150, o bien, a 155 y, en seguida, dividían entre 5– cinco emplearon S2, y tres, S3. Por el contrario, con el "número difícil", 10 de 24 alumnos utilizaron S1, cuatro S2; seis, S3, y uno, S4. Dos de ellos usaron S5, una estrategia no detectada en primer año de secundaria: "Disminuir el número y, en seguida, dividir entre el mayor número posible". Por ejemplo, Erika hizo lo siguiente: 769 – 1 = 768; 768 / 8 = 96; 96 / 4 = 24; 24 / 4 = 6; 6 - 6 = 0. La diferencia entre esta estrategia (S5) y S3 es que aquí la transformación del número inicial no está en función de un divisor fijado de antemano.

Este grupo mostró una evolución hacia S3, la estrategia más eficiente en comparación con las otras aquí presentadas. En efecto, el número de estudiantes que la utilizó pasó de tres a seis, entre la primera y la última fase del estudio. Estos tres alumnos habían utilizado la estrategia S1 en la fase de *acción*. También fue notorio un refinamiento en el uso de la estrategia S3 en el transcurso del estudio. Mariana, que agregó 5 a 931 para obtener 936, al parecer utilizó la regla: "9*bc* es divisible entre 9 si *bc* es divisible entre 9".

Hubo tres niveles de uso de la estrategia S2, por parte de los estudiantes. El más primitivo se basó en la regla: "*abc* es divisible entre *c*" (aquí el alumno generaliza las reglas de divisibilidad entre 2 y 5, y considera sólo los dígitos de las unidades). El segundo nivel implica llevar el número inicial a la forma *ab*0 y utilizar la regla: "Si *p* divide a *ab*, entonces *p* divide a *ab*0" (aquí el alumno toma como dominio la posición de los dos dígitos). El tercer nivel es el más sofisticado y se basa en una de las dos reglas siguientes: *i)* "Si *a* divide *bc*, entonces *a* divide *abc*"; *ii*) "Si *c* divide *ab*, entonces *c* divide *abc*".

Tercer año de secundaria

Evolución de estrategias

Consideramos que, en el grupo de tercero de secundaria, la mayoría de los estudiantes empezó con la utilización de la estrategia S1 –cuando trabajaron con el número 151–, pero sus estrategias evolucionaron rápidamente y pronto comenzaron a buscar el divisor más grande posible del número dado o de alguno de sus vecinos más cercanos. Por ejemplo, como fue el caso de Éric –cuya estrategia con el "número difícil" mostramos más abajo– los alumnos transformaban sistemáticamente el número inicial en un múltiplo de 9 u 8 y, en seguida, lo llevaban a cero en el menor número de pasos posibles. Los *videotapes* muestran que ellos ensayaron con estrategias diferentes antes de decidirse por la óptima.

Sin embargo, de acuerdo con los datos disponibles, no parece que los alumnos conocieran el criterio de divisibilidad entre 9. Más bien, ellos procedían de la manera siguiente:

> Disminuir el número inicial en 1 y, en seguida, tratar de dividir entre 8 o entre 9; iterar este proceso hasta encontrar un cociente entero, llevar el número a cero, tener cuidado en elegir el divisor más grande de los permitidos o bien, si es necesario, transformar el número en un múltiplo de 9. Si toma cinco pasos o más para descender a cero, entonces debemos reiniciar el proceso: incrementar el número inicial en 1, tratar de dividir entre 8 o entre 9; iterar este proceso hasta obtener un cociente entero, y así sucesivamente.

En seguida mostramos el trabajo de Éric con el número 879: 879 + 3 = 882; 882 / 9 = 98; 98 / 7 = 14; 14 / 7 = 2; 2 - 2 = 0. Podemos inferir –a partir de las operaciones utilizadas por él– que su estrategia es óptima. En efecto, los múltiplos de 8 o de 9 (diferentes de 882) más cercanos a 879 son 873, 872, 880; de tal modo que, si transformamos 879 en cualquiera de estos números mediante una adición o sustracción, se requieren seis pasos para descender 879 a cero. Con este proceso –consistente en la transformación de un número entero dado en otro– se debe realizar una serie de cálculos aritméticos para obtener el mejor múltiplo; un procedimiento en el que la calculadora desempeña un papel primordial.

El papel de la teoría de Brousseau en el surgimiento y desarrollo de estrategias numéricas en los estudiantes

La primera fase contemplada en la teoría de Brousseau es la *iniciación*. En esta investigación, tal como se dijo en el marco teórico, el profesor explica a los estudiantes la situación problema y las reglas del juego que son tomadas en cuenta. Sugerimos al profesor que propusiera a los estudiantes trabajar con el número 150; ello tuvo como propósito que los alumnos se "familiarizaran" con la actividad. Elegimos este número porque con él pueden intentarse varias operaciones como primer paso para llevarlo a cero; la más simple y que casi todos los alumnos de los tres grupos eligieron fue dividir entre 5; otros prefirieron dividir entre 2.

Después de este ejemplo, el profesor del grupo pidió a los estudiantes que propusieran otros números; éstos fueron abordados por ellos atendiendo a las indicaciones dadas en la actividad. Fue notorio que los alumnos consideraran números cuya última cifra es 0 o 5. Algunos de estos ejemplos son: 75, 120, 160, 200, 350, 400, 900, desde luego, hubo estudiantes que aplicaban mal las hipótesis dadas en esta actividad. Esto era corregido por el profesor del grupo o por alguno de los alumnos que se percataban del error cometido. Así, esta fase del estudio resultó benéfica para su desarrollo posterior, pues sirvió para que los alumnos comprendieran todos los elementos contenidos en la actividad y corrigieran, cuando era necesario, algunos errores en la utilización de las hipótesis.

Siguiendo el orden de las fases propuestas por esta teoría, continuamos con la fase de *acción*. El trabajo en parejas dio buenos resultados, pues con la idea de "juego" los alumnos empezaron a tratar de encontrar "estrategias ganadoras". El primer número abordado en esta fase fue 144; con éste, varios estudiantes de los tres grupos percibieron que el número de operaciones se reducía considerablemente si elegían como primera operación dividir entre 9, pues sólo requerían de tres pasos para llevarlo a cero. En varias hojas de trabajo observamos la secuencia de operaciones: 144 / 9 = 16, 16 / 8 = 2, 2 – 2 = 0, aunque este procedimiento no es el único registrado en las hojas de trabajo.

El siguiente número que abordaron fue 154. Con éste, la mayoría de los alumnos de los tres grados prefirió utilizar como primera operación dividir entre 2 que, después de llevarla a cabo, les sugería una nueva división, pero entre 7. Otros alumnos eligieron transformar 154 a 150 o a 155, y después dividir entre 5 que, como ya lo hemos dicho antes, fue una de las estrategias más utilizadas. De nuevo, el objetivo al proponer este número a los estudiantes era que ellos empezaran a detectar o a elegir las estrategias que les permitieran resolver el problema con el menor número de pasos posibles.

El último número que abordaron en esta fase fue 151; el cual ya hemos comentado en párrafo anteriores, en cuanto al uso de las estrategias de los alumnos para llevarlo a cero. Sin embargo, vale la pena resaltar el impacto que tuvo haber abordado este número en la generación de estrategias, pues era necesario transformar 151 en otro antes de utilizar la división.

Por ejemplo, aunque fueron pocos los casos encontrados, percibimos que algunos transformaron 151 a 144 mediante una resta; es decir, 151 - 7 = 144, y de aquí procedieron a dividir entre 9. Esta estrategia fue observada, sobre todo, en alumnos de segundo y de tercer año de secundaria, lo que, desde nuestro punto de vista, señala el inicio del surgimiento de sus "estrategias ganadoras"; donde éstas son apoyadas desde el punto de vista matemático. Es decir, transformar el número dado en otro del cual ya se conoce su solución.

En seguida, resumimos los resultados obtenidos en la fase de *formulación* de cada uno de los grupos que participaron en el estudio. La idea de buscar "estrategias ganadoras" en un ambiente de juego generó discusiones interesantes en los alumnos. A manera de ejemplo, transcribimos las conclusiones a las que llegaron al final de esta fase. Respetamos la forma y el estilo de redacción utilizadas por los estudiantes. Empezamos con las conclusiones de los alumnos de primero de secundaria.

1. Si es par lo divido entre algún número par y que sea el más grande.
2. Le resto un número para convertirlo en un múltiplo de 9.
3. Si termina en 0 o 5 lo divido entre 5.
4. Busco el divisor más grande (del 5 al 9).
5. Le resto el número más grande para aproximarme al 0 a la derecha o al 5.

Como podemos notar, en estas descripciones subyacen las estrategias que ya hemos comentado antes, aunque no de manera explícita tal como nosotros las enumeramos.

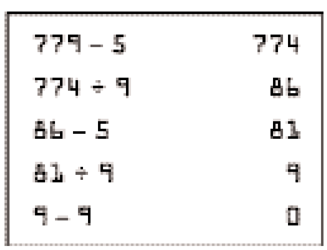
Por el contrario, puede notarse una ligera evolución, en comparación con las anteriores, en las estrategias de los estudiantes de segundo año de secundaria. He aquí lo que ellos anotaron en el pizarrón, al final de esta fase.

1. Sumas o restas hasta llegar a un número divisible entre el número que quieras.
2. Divides entre el mayor número que se pueda.
3. Volver a dividir entre el mayor número posible.
4. Cuando te da un número entre 1 y 9 lo restas, y ya te sale cero.

Finalmente, los alumnos de tercer año de secundaria no sólo describen sus estrategias sino que las apoyan con un ejemplo. He aquí la información que dieron.

> Se busca en un principio múltiplo de qué números es ese número y se divide, así sucesivamente hasta llegar entre 1 y 9 para restar.
>
> En caso de un número primo se suma o se resta para llegar a un número que no sea primo y se repiten los pasos de arriba.

Figura 6



Son lo mismo en diferentes palabras

En la fase de *validación* sobresalen, en los tres grupos, los usos de las estrategias antes descritas en la búsqueda del número difícil, tal como ya fue comentado anteriormente en este artículo. Sin embargo, conviene mencionar algunos ejemplos que fueron significativos en el desarrollo de esta fase y que muestran, de hecho, la influencia que tuvo la teoría adoptada en esta investigación.

En primer grado de secundaria, el ejemplo significativo fue dado por Mariana P (mostrado en la columna central de la figura 5 de este artículo), pues no fue fácil llegar a la solución para todos los integrantes del grupo. Una dificultad manifestada por varios alumnos de este grado fue no detectar la divisibilidad de 91 entre 7; que raramente se estudia como criterio de divisibilidad en este grado escolar, y que, en este ejemplo, no fue percibida "a simple vista" tal divisibilidad.

En segundo grado de secundaria, hay varios ejemplos de números que los alumnos consideraron como difíciles. En esta línea podemos ubicar 789, que fue dado por Sara B, quien utiliza dos transformaciones para llevar este número a cero. He aquí su procedimiento y su argumentación de por qué cree ella que es difícil.

Figura 7

789 – 6	783
783 / 9	87
87 – 6	81
81 / 9	9
9 – 9	0

Es difícil porque es un número primo y aparte es muy grande.

También los alumnos de tercer grado de secundaria dieron ejemplos interesantes; en la mayoría de ellos subyace el uso de la estrategia S3. A manera de ejemplo, transcribimos el que fue dado por Martín M; de igual modo, anotamos su opinión con respecto al número propuesto por él como difícil.

Figura 8

869 – 5	864
864 ÷ 9	96
96 ÷ 8	12
12 ÷ 4	3
3 – 3	0

No creo que sea difícil, simplemente es un número primo y te tomas mínimo 5 pasos en llegar a cero.

Tal como podemos percibir en la información contenida en esta sección y en todas las anteriores, la influencia de la teoría de Brousseau desempeñó un papel fundamental en el surgimiento y desarrollo de estrategias numéricas en los estudiantes que participaron en esta investigación.

CONCLUSIONES

En las secciones precedentes hemos descrito, entre otras cosas, las estrategias que surgieron y posteriormente fueron desarrolladas por los estudiantes de secundaria que participaron en este estudio. En nuestra discusión, señalamos la tendencia general de los alumnos a transformar el número dado cuando éste no era divisible desde el inicio; de igual modo, dijimos que la estrategia más popular fue S1 al inicio de la actividad en los tres grados escolares.

En los tres grupos fue notoria una evolución de sus estrategias; sin embargo, en cada uno de ellos está fuertemente marcada tal evolución. Por ejemplo, en primero y segundo año de secundaria, la calculadora permitió a los alumnos intuir en un principio y, posteriormente, verificar sus conjeturas con respecto a los divisores del número. Así, mediante la retroacción positiva, esta herramienta fue utilizada por ellos como medio para validar sus conjeturas y favorecer, en consecuencia, el surgimiento de teoremas en acción.

En efecto, la escritura horizontal de las operaciones en la calculadora enlazaba (en dos líneas sucesivas de la pantalla) el dividendo, el divisor y el cociente; ayudaba a establecer vínculos entre la forma del primero (dividendo) con los otros dos (divisor y cociente). Por contraste, para los alumnos de tercero de secundaria, el despliegue de varias líneas en la calculadora les permitió no perder de vista todos los pasos de su estrategia para llevar el número a cero, y cambiar la estrategia si era necesario.

Es pertinente recalcar que la mayoría de los alumnos de primero y de segundo año de secundaria utilizó la calculadora, sobre todo, como herramienta para calcular y como un medio que favorecía la formulación de sus conjeturas. Razonando de manera local, podemos afirmar que estos alumnos basaron sus juicios en un análisis de la forma de los números (*e.g.*, al considerar el número dado *abc* como la yuxtaposición de los números *ab* y *c* y, mediante ello, transformarlo a la forma *ab*0). Desde luego, esta aseveración no es aplicable a los alumnos que fueron capaces de evolucionar a la estrategia S3.

Por el contrario, para los alumnos de tercer año de secundaria –que razonaban de manera global– la calculadora sirvió, primeramente, como herramienta de cálculo numérico, y pronto la utilizaron como artefacto que los ayudó en la búsqueda de estrategias óptimas. Este trabajo permitió a los estudiantes de este nivel educativo desarrollar estrategias eficaces, como S3, que comentamos anteriormente.

No obstante, en los tres grados escolares fue notoria su evolución en el uso de estrategias al abordar el número dado, a medida que fueron pasando por las diferentes etapas señaladas por Brousseau. Esto sugiere que la calculadora con pantalla multilínea, con la supresión en detalles de cálculo, nos mantiene en una proximidad –tanto física como temporal– entre los números y los resultados de las operaciones llevadas a cabo con esta herramienta. Lo anterior sirvió para que los estudiantes mejoraran el sentido de los números que, junto con otras extensiones conceptuales importantes de éstos, pueden trabajarse con ellos en un ambiente de juego con el auxilio de la calculadora con pantalla mulitilínea.

AGRADECIMIENTOS

Nuestro más sincero agradecimiento al Social Sciences and Humanities Research Council de Canadá (subvención núm. 410-99-1515) y a Conacyt de México (subvención núm. I 32810-S) por sus fondos para el desarrollo de la investigación aquí descrita.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. y J. Kaput (1996), "Computer-based Learning Environments in Mathematics", en A. J. Bishop *et al.* (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* Dordrecht, Kluwerpp, PP. 469-501.

Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics,* ed. y trad. de N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer.

Drijvers, P. y M. Doorman (1996) "The Graphics Calculator in Mathematics Education", *The Journal of Mathematical Behavior,* núm. 15, pp. 425-440.

Dunham, P. H. y T. P. Dick (1994), "Research on Graphing Calculators", *The Mathematics Teacher,* núm. 87, pp. 440-445.

Heid, M. K. (1997), "The Technological Revolution and the Reform of School Mathematics" *American Journal of Education,* núm. 106, pp. 5-61.
Ruthven, K. (1990), "The Influence of Graphic Calculator Use on Translation from Graphic to Symbolic Forms", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 21, pp. 431-450.
—— (1993), "Developing Algebra with the Supercalculator" *Micromath,* vol. 9, núm. 1, pp. 23-25.
—— (1996), "Calculators in Mathematics Curriculum: The Scope of Personal Computational Technology", en A. J. Bishop *et al.* (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* Kluwer, pp. 435-468.
Streun, A. V., E. Harskamp y C. Suhre (2000), "The Effect of the Graphic Calculator on Students' Solution Approaches: A Secondary Analysis", *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* núm. 8, pp. 27-40.
Williams, D. y M. Stephens (1992), "Activity 1: Five Steps To Zero", en J. T. Fey (ed.), *Calculators in Mathematics Education,* Reston, VA, The Council, pp. 233-234.
Zazkis, R. y S. Campbell (1996) "Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers' Understanding.", *Journal for Research in Mathematics Education,* núm. 27, pp. 540-563.

DATOS DE LOS AUTORES

José Guzmán Hernández
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, México
jguzman@mail.cinvestav.mx

Carolyn Kieran
CIRADE, Faculté d'Éducation, Université de Québec en Montreal, Canadá
kieran.carolyn@ugam.ca

Hassane Squalli
Facultad de Educación, Université de Sherbrooke, Canadá
hassan.squalli@courrier.usherb.ca

www.santillana.com.mx/educacionmatematica