



Educación Matemática

ISSN: 1665-5826

revedumat@yahoo.com.mx

Grupo Santillana México

México

Mochón, Simón; Tlachy Anell, María Margarita

Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos

Educación Matemática, vol. 15, núm. 3, diciembre, 2003, pp. 5-28

Grupo Santillana México

Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40515302>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos

Simón Mochón y María Margarita Tlachy Anell

Resumen: En este artículo se presentan los resultados de un cuestionario y las entrevistas subsecuentes aplicados a dos grupos de estudiantes de diferentes niveles (tercero de secundaria y primer año del nivel profesional) sobre el concepto y cálculo del promedio. El promedio es un concepto que se aplica en circunstancias muy variadas con los datos presentados en diferentes formatos, de lo cual derivan sus dificultades. En general se observó que ambos grupos tuvieron un desempeño deficiente, con una mejora del grupo del nivel alto. Sin embargo, se encontraron situaciones en las que los estudiantes de secundaria tienen mejores estrategias de solución. Se muestra también que los estudiantes de este nivel ya tienen muchas intuiciones desarrolladas sobre este concepto en las cuales se puede basar una enseñanza más efectiva.

Palabras clave: Promedio, concepciones, dificultades, estudio, estudiantes.

Abstract: In this article we present the results of a questionnaire and subsequent interviews applied to two groups of students of different levels (one of middle high school and the other of college level) about the concept and computation of the average. The average is a concept that is applied to many circumstances and with data presented in different formats, which make it difficult. We observed in general a low performance of the two groups, with some improvement of the higher-level students. However, we found instances in which the lower level group has better strategies of solution. We show also that the students of this level have lots of intuitions about this concept in which it can be based a more effective teaching.

Keywords: Average, concepts, difficulties, study, students.

Fecha de recepción: agosto de 2002.

INTRODUCCIÓN

El promedio aritmético es un concepto muy importante que se usa frecuentemente en la vida cotidiana para dar un valor representativo sobre registros de datos variados: calificaciones, encuestas, censos de población, salarios, velocidades, etc. El promedio se encuentra también en varias disciplinas educativas como la física, la medicina, la sociología, etc. y está inmerso en la estadística como una idea fundamental que aparece reiteradamente.

Los temas de tratamiento de la información y de estadística están contenidos en el programa de estudios de México desde los últimos grados del nivel básico y hasta los niveles profesionales. Sin embargo, en la práctica docente se deja muchas veces de lado. En países europeos, la probabilidad y la estadística tienen un tratamiento más integral dentro del currículum de la enseñanza básica, media y superior.

De acuerdo con Shaughnessy (1992), los estudiantes entran en una sociedad donde el uso de los datos y las gráficas para comunicar información e influir en decisiones es creciente y, por tanto, la investigación en la enseñanza de la estadística y la probabilidad es particularmente importante.

Así, algunas preguntas que sería importante responder son las siguientes:

- ¿Qué interpretación dan los estudiantes de diferentes niveles educativos en México a la información proporcionada mediante un promedio en diferentes instancias?
- ¿Qué deficiencias, en este concepto y su aplicación, se pueden encontrar en los diferentes niveles educativos?
- Según estos resultados, ¿cómo se pueden mejorar las nociones de los estudiantes sobre el promedio?

Puesto que existen varias medidas de tendencia central como la moda, la mediana y la media, aquí nos referiremos al promedio exclusivamente como el promedio aritmético o media aritmética. Así, tomaremos al promedio como:

“La suma de todos los datos dividida entre el número total de datos”

Como se discutirá aquí, aun cuando el promedio parece ser un concepto sencillo, la variedad de situaciones en las que surge y las distintas formas en las que se pueden organizar los datos lo hacen bastante más complejo.

Diversas investigaciones han mostrado que el promedio se utiliza como una regla de cálculo y se dan diferentes interpretaciones a su significado.

Con estas ideas en mente, se realizó una investigación (explicada en este artículo), cuyos objetivos principales son los siguientes:

- Averiguar las concepciones de los estudiantes de diferentes niveles educativos sobre el promedio.
- Observar las estrategias que utilizan estos estudiantes al calcular el promedio dada una serie de datos en distintos formatos.

Para este propósito, se diseñó y aplicó un cuestionario (véase el anexo) a dos grupos de estudiantes de diferentes niveles educativos. Posteriormente se realizaron entrevistas para profundizar sobre las respuestas dadas a este cuestionario.

MARCO TEÓRICO

En un artículo sobre proporcionalidad (Flores, 1995), el autor describe la diversidad de circunstancias en las que aparece el promedio. En este artículo cita dos maneras de calcular el promedio, las cuales se dan a continuación.

El promedio se puede obtener de dos maneras matemáticamente equivalentes, dependiendo de cómo están presentados los datos. Para una lista de datos, x_1, x_2, \dots, x_n , el promedio se expresa como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Si por otro lado, los datos están enumerados con sus frecuencias absolutas respectivas (f_1, f_2, \dots, f_n), el promedio se expresa de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

Este procedimiento es conocido como el algoritmo del promedio ponderado (el número de veces que aparece cada dato es su “peso” o su ponderación).

Por ejemplo, si un profesor realizó cuatro exámenes durante un mes y desea contarlos con diferentes “pesos”: 10% el primero, 20% los siguientes dos y 50%

el final, y desea obtener el promedio de las calificaciones de sus alumnos, tendrá que realizar un promedio ponderado.

Esta idea de ponderación es más general y aparece en problemas de velocidades, mezclas, etc. Daremos a continuación dos ejemplos sobre esto.

Por ejemplo, si un automóvil viaja a una velocidad de 100 km/h durante 2 horas y después viaja a 40 km/h durante la siguiente hora, su velocidad promedio no será de 70 km/h. El promedio debe realizarse ponderado, usando los tiempos como “pesos”. De esta manera, la respuesta correcta será de 80 km/h.

En un segundo ejemplo, si se mezclan dos metales en una razón de 4 a 1 y sus valores monetarios respectivos son diferentes, el valor de la aleación resultará ser un promedio ponderado de los valores de los dos metales.

Otro de los trabajos pertinentes a la presente investigación es un estudio sobre el desarrollo del concepto de promedio aritmético en niños (Strauss y Bichler, 1988). En él se citan siete propiedades fundamentales del promedio, las cuales se enlistan a continuación (en cada una de ellas hemos incluido un ejemplo a manera de explicación):

- a. El promedio se localiza entre los valores extremos.

Por ejemplo, el promedio de las edades de un grupo de personas no puede ser mayor que la edad de la persona más adulta ni ser menor que la edad de la persona más joven.

- b. La suma de las desviaciones desde el promedio es cero.

Por ejemplo, el promedio de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 es 3.5 y, por tanto, tenemos que:
 $(3.5 - 1) + (3.5 - 2) + (3.5 - 3) + (3.5 - 4) + (3.5 - 5) + (3.5 - 6) = 0$

- c. El promedio es afectado por valores diferentes a él.

Por ejemplo, si el promedio de calificaciones de un estudiante durante 5 años es de 9, cualquier calificación subsecuente diferente de 9 cambiará su promedio.

- d. El promedio no es necesariamente igual a uno de los valores que fueron sumados.

Por ejemplo, el promedio de 1 y 3 es 2. Este valor no forma parte de los datos que fueron promediados.

- e. El promedio puede ser una fracción que no tiene contraparte en la realidad física.

Por ejemplo, el promedio del número de hijos por familia de una población determinada puede ser de 4.7. Este valor decimal no tiene un significado claro dentro de la variable promediada que puede tener sólo valores discretos enteros.

- f. Cuando se calcula un promedio, deben ser tomados en cuenta los valores de cero.
Por ejemplo, al promediar las calificaciones de un grupo de estudiantes en un examen, debemos incluir todos los ceros que haya.
- g. El promedio es un valor representativo de los valores que fueron promediados.
El promedio de los sueldos de las personas en una región determinada es un indicador de alrededor de qué valor se centra esta variable.

Mokros y Russell (1995) investigaron la noción de representatividad del promedio con niños en grados escolares del cuarto al octavo. Encontraron cinco acercamientos diferentes al resolver problemas de promedio, los cuales se dan a continuación con una pequeña explicación:

- Promedio como moda.
En este enfoque los estudiantes manejan el promedio como el valor modal, es decir, como el valor que ocurre con mayor frecuencia. Muestran también una falta de flexibilidad en la elección de estrategias.
- Promedio como algoritmo.
Aquí los estudiantes eligen un acercamiento exclusivamente algorítmico para encontrar el promedio, lo cual resulta con frecuencia poco efectivo.
- Promedio como algo razonable.
En éste, los estudiantes se basan en su experiencia cotidiana y en su intuición para resolver los problemas. Usualmente, estos estudiantes tienen la noción de que el promedio está más o menos centrado dentro de los datos.
- Promedio como punto medio.
Estos estudiantes usan el concepto de punto medio en sus construcciones e interpretaciones para definir el promedio. Impera en ellos la idea de una distribución simétrica.
- Promedio como punto matemático de balance.
En esta noción, que aparece en estudiantes de mayor edad, el promedio es visto como un punto de balance, para el cual, un valor mayor tiene que balancearse con uno menor.

Varios investigadores señalan problemas de comprensión acerca del promedio. Strauss y Bichler (1988), mediante tareas presentadas a niños de 8 a 14 años de edad, estudiaron la dificultad de cada una de las propiedades mencionadas

anteriormente. Estos autores concluyeron que estas propiedades podrían dividirse por su dificultad en dos grupos, siendo las más complejas, las propiedades B (suma de desviaciones = 0), F (ceros en los datos) y G (representatividad del promedio). Estos investigadores sugieren que la instrucción del promedio en el salón de clase se debe realizar en dos tiempos diferentes; uno atendiendo a las propiedades más sencillas y el otro a las propiedades más difíciles.

Otras investigaciones registran que el promedio es utilizado principalmente como una regla de cálculo, sin poderle dar una interpretación al valor obtenido (Gattusso y Mary, 1996; Gattusso, 1997). En estos estudios se registran las concepciones que tienen los estudiantes de diferentes niveles de escolaridad sobre el concepto de promedio. Estos autores concluyen que el promedio no es un concepto fácil de entender.

Por último, Pollatsek, Lima y Well (1981) estudiaron la noción del promedio y el promedio ponderado en estudiantes universitarios. Un problema del tipo usado en este estudio es el siguiente. Puesto que el peso promedio de 6 hombres es de 180 libras y el peso promedio de 4 mujeres es de 125 libras, se preguntó a los estudiantes cuál sería el peso promedio de las 10 personas. Sus resultados indicaron que una gran proporción de los estudiantes no tiene un buen sentido de los promedios ponderados. Estos autores atribuyen estos problemas a la enseñanza de tipo de reglas de cálculo y recetas sin que los estudiantes obtengan una comprensión de los conceptos.

METODOLOGÍA

Se diseñó un cuestionario con diez problemas sobre promedio (véase el anexo), el cual fue aplicado a un grupo de 21 estudiantes de tercer grado de secundaria (Secundaria Diurna núm. 260 de la Ciudad de México) y a un grupo de 31 estudiantes de primer semestre de ingeniería en sistemas computacionales (Escuela Superior de Computación del Instituto Politécnico Nacional). Los dos objetivos buscados eran observar las estrategias de resolución y dificultades de cada uno de estos dos grupos y hacer una comparación de las respuestas entre estos dos diferentes niveles educativos.

Cada problema del cuestionario tenía un objetivo particular, el cual se describe a continuación:

- Objetivo problema 1: Averiguar si los estudiantes se dan cuenta de la “Propiedad A” de Strauss y Bichler (el promedio se encuentra entre los valores extremos).
- Objetivo problema 2: Averiguar si los estudiantes advierten la “Propiedad C” de Strauss y Bichler (el promedio es afectado por valores diferentes a él).
- Objetivo problema 3: Averiguar si los estudiantes aceptan o rechazan la “Propiedad D” de Strauss y Bichler (el promedio no es necesariamente igual a uno de los valores).
- Objetivo problema 4: Observar cómo calculan los estudiantes el promedio en un caso simple y averiguar si tienen dificultades con un promedio que no tiene contraparte en la realidad física (“Propiedad E” de Strauss y Bichler).
- Objetivo problema 5: Observar si los estudiantes se dan cuenta de que incluir ceros en los datos influye en el valor del promedio (“Propiedad F” de Strauss y Bichler).
- Objetivo problema 6: Averiguar qué interpretación le dan los estudiantes al valor del promedio (“Propiedad G” de Strauss y Bichler sobre la representatividad del promedio).
- Objetivo problema 7: Observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una tabla de frecuencias (promedio ponderado).
- Objetivo problema 8: Observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una lista.
- Objetivo problema 9: Investigar si los estudiantes son capaces de calcular el promedio ponderado en una situación de velocidades.
- Objetivo problema 10: Averiguar qué entienden los estudiantes por promedio cuando el problema admite varias interpretaciones: “el promedio de las tallas”, “el promedio de las ventas”, el promedio de las tallas ponderado por el número de ventas”, etcétera.

Posteriormente, se aplicó un cuestionario de 6 problemas (problemas 1, 2, 5, 7, 8 y 9 del primer cuestionario, con pequeñas modificaciones) a otro grupo de 22 estudiantes de tercer grado de secundaria de la misma institución que la anterior, con el propósito de seleccionar 6 estudiantes para ser entrevistados acerca de sus respuestas dadas. Se escogieron al azar 3 estudiantes que habían contestado completamente el cuestionario y 3 estudiantes que lo habían contestado parcialmente (no tomamos en cuenta cuestionarios con respuestas escasas, ya que estos estudiantes posiblemente nos darían muy poca información sobre sus métodos de resolución).

Las entrevistas fueron semiestructuradas, con algunas preguntas planeadas de antemano para profundizar sobre las ideas de los estudiantes y preguntas adicionales que dependían de las respuestas de cada estudiante.

RESULTADOS DEL CUESTIONARIO Y SU ANÁLISIS

En esta sección se describen los resultados principales del análisis realizado a las respuestas de los estudiantes al primer cuestionario. Recordamos al lector que este cuestionario se aplicó a dos grupos, uno de 21 estudiantes de tercero de secundaria y otro de 31 estudiantes de nivel superior.

Problema 1

Las respuestas a este problema se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Respuesta	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan el promedio	No es posible	12	15
Suman los datos	No es posible	3	
Explicación sin cálculos	No es posible	3	16
Explicación sin cálculos	Sí es posible	2	

(En este y en los demás problemas no se incluyen los estudiantes que no dieron una respuesta.)

En este problema se esperaba que, *sin hacer cálculos*, el estudiante se diera cuenta de que no es posible el valor dado del promedio (9.20), porque se encuentra fuera del rango de los datos (de 5.30 a 8.10). Ésta es la tercera categoría de el cuadro anterior. Obviamente, si el estudiante realiza los cálculos correspondientes al promedio (primeras dos categorías del cuadro), su valor obtenido lo ayuda a ver que el valor dado no es posible porque no son iguales.

Se puede apreciar que únicamente 3 estudiantes de los 21 de secundaria y sólo 16 estudiantes de los 31 de nivel superior responden que no es posible el valor del promedio *sin necesidad de calcularlo*. Esto indica que la gran mayoría de los estudiantes de secundaria y la mitad del nivel superior no tienen la noción (o no la aplican) de que el promedio debe estar entre los valores extremos.

Se observa también que algunos estudiantes de secundaria suman los datos para calcular el promedio y no dividen entre el número de datos (promedio como una suma).

Problema 2

Para este problema se registrarán solamente las respuestas al inciso (a). Éstas se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Respuesta	Núm. de estudiantes 3º sec	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan el promedio	No influyen	6	13
Operaciones variadas	Sin conclusión	4	3
Explicación sin cálculos	No influyen	2	12
Explicación sin cálculos	Sí influyen	3	3

En este problema se dice explícitamente que el promedio de las primeras seis ventas es de \$47. Por lo tanto, las siguientes dos ventas de \$47 no deben afectar el promedio. Se esperaba entonces que los estudiantes respondieran esto sin realizar ningún cálculo (tercera categoría del cuadro anterior).

Se puede apreciar que únicamente 2 estudiantes de secundaria y sólo 12 estudiantes del nivel superior responden que no influye en el promedio el agregar valores iguales a él, *sin necesidad de calcularlo*. Esto otra vez indica que la gran mayoría de los estudiantes de secundaria y un gran porcentaje del nivel superior no tienen esta noción (o no la aplican) acerca del promedio.

(No se muestran aquí los resultados del problema 3.)

Problema 4

Las respuestas a este problema se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Núm. de estudiantes 3º sec	Núm. de estudiantes nivel superior
Uso de la fórmula usual	8	17
Moda (dato más frecuente)	3	12
Suman el número de teléfonos	3	
Cantidad de datos como promedio	2	
Otras	2	1

En este problema se quería averiguar qué procedimientos utilizan los estudiantes para calcular el promedio de una lista sencilla de valores.

El procedimiento más común es calcular el promedio con la fórmula usual, aun cuando buena parte de los estudiantes consideraron el valor más frecuente (la moda) como el promedio.

También se puede observar del cuadro que tres estudiantes de secundaria consideran la suma de los datos como el promedio (esto ya se observó anteriormente). Dos estudiantes más toman al promedio como la cantidad de datos (10 en este caso).

El valor correcto del promedio de los 10 datos dados es de 1.3. Este valor decimal no tiene sentido en la realidad física (número de teléfonos) y por lo tanto debe de interpretarse de alguna manera.

Las interpretaciones del promedio calculado son muy variadas. Algunas se transcriben a continuación con su categoría respectiva:

“El promedio de teléfonos es de 1 en cada casa” (Uso de la fórmula usual)

En este caso, el estudiante no obtiene decimales al dividir

“En la mayoría de las casas hay uno” (Moda)

“13 el número promedio que hay por casa” (Promedio como suma de datos)

“Por cada casa hay de 1 a 3 teléfonos” (Interpretación de rango)

Nótese que, en el caso del uso de la fórmula, la interpretación es más una afirmación del valor. Las otras tres sí dan una explicación de su significado. Sin embargo, no se observó que el valor decimal del promedio fuera interpretado como tal.

Problema 5

Para este problema se mostrarán solamente las respuestas al inciso (b), que es el más interesante. Éstas se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Respuesta	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan el promedio	Sí se altera	4	11
Calculan el promedio	No hay conclusión	4	
Respuesta sin cálculos (sí)	Sí se altera	5	16
Respuesta sin cálculos (no)	No se altera	7	4

En este problema se esperaba que, *sin hacer cálculos*, el estudiante se diera cuenta de que, al agregar un cero a los datos, éste definitivamente altera el valor del promedio. Ésta es la tercera categoría del cuadro anterior. Obviamente, si el estudiante realiza los cálculos correspondientes al promedio (primeras dos categorías del cuadro), notará que el promedio se ha alterado.

Del cuadro anterior se observa que solamente 5 de los estudiantes de secundaria y alrededor de la mitad (16) de los estudiantes de nivel superior afirmaron que sí se alterará el valor del promedio cuando se insertan ceros en los datos. En la otra categoría de respuesta afirmativa (4 estudiantes de secundaria y 11 del nivel superior), los estudiantes calculan el promedio y por tanto su respuesta se basa en su resultado numérico y no en su intuición sobre la respuesta.

Dos de las justificaciones dadas por los estudiantes de secundaria en la tercera categoría son las siguientes:

“Sí, porque ahora tendríamos que repartir los dulces y el promedio variaría”
“Sí, porque hay que aumentar otro niño al resultado”

Problema 6

Cuatro de las respuestas de los estudiantes de secundaria se dan a continuación:

“El promedio de 30.5 representa la capacidad física de los reclutas y da a entender que casi todos tienen una capacidad física aproximada de 30.5”

“Que muchos se acercan más a 30.5”

“Que cada recluta tuvo para hacer ejercicios 30 min.”

“Se suman los reclutas y se dividen entre 20”

La primera respuesta muestra la idea de que todos los datos están cercanos al valor del promedio. En general, las respuestas muestran poca idea conceptual de lo que significa el valor del promedio.

La mayoría de los estudiantes del nivel superior manifiestan que el promedio representa que cada recluta tiene la capacidad de hacer 30 minutos de ejercicio (idea de distribución constante). El resto de los estudiantes explican que unos valores se compensan con otros para dar el promedio (punto matemático de balance).

Problema 7

Las respuestas al inciso (a) de este problema se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Núm. de estudiantes 3º sec	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan el promedio ponderado	9	21
Dan el valor más frecuente (moda)		5
Cálculos variados	7	4

Recordamos al lector que el objetivo de este problema era observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una tabla de frecuencias y si utilizaban la idea del promedio ponderado, que consiste en utilizar las frecuencias de cada grupo de datos como factores.

Es interesante encontrar que 9 de los estudiantes de secundaria calculan el promedio multiplicando las cantidades del número de hijos por familia por las frecuencias respectivas (número de familias), aun cuando no conocen todavía la fórmula del promedio ponderado. Esto indica de alguna manera que el procedimiento que esta fórmula contiene de manera oculta resulta más o menos natural para una parte significante de los estudiantes.

Entre los cálculos variados, los estudiantes simplemente suman una o ambas columnas y en el segundo caso dividen los resultados entre sí (ya sea 33 entre 6 o 6 entre 33). Este método se asemeja al cálculo simple del promedio cuando se enlistan todos los datos.

Problema 8

Las respuestas a este problema se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan el promedio ponderado	9	30
Calculan el promedio sumando	4	
Suman sin dividir	5	

De manera similar al problema anterior, el objetivo de este problema era observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una lista.

Es interesante nuevamente encontrar que 9 de los estudiantes de secundaria calculan el promedio multiplicando las calificaciones por sus respectivas frecuencias (no dadas), las cuales obtienen de contar el número de dieces, nueves, ochos, etc. Esto muestra cómo se puede generar la fórmula del promedio ponderado de manera intuitiva.

Se observa también que 5 de los estudiantes de secundaria consideran la suma de los datos como el promedio.

Por otro lado, casi todos los estudiantes del nivel superior calculan el promedio ponderado a través de la fórmula que ya conocen.

Problema 9

Las respuestas a este problema se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan la velocidad ponderando	10	11
Suma de velocidades entre 2		13
Suma velocidades entre suma tiempos	4	3
Cálculos variados	5	4

Este problema es relativamente difícil, ya que la cantidad de la cual se tiene que calcular el promedio (la velocidad) varía de una manera continua y no discreta como en los casos anteriores.

En este problema sucede algo sorprendente. Casi 50% de los estudiantes de secundaria (10 de 21) y sólo 35% de los estudiantes de preparatoria (11 de 31) lo resuelven correctamente, ponderando las velocidades con su tiempo respectivo:

$$\frac{80 \cdot 2 + 120 \cdot 8}{10} = 112 \text{ km/hr}$$

Una gran parte de los estudiantes de nivel superior promedian (incorrectamente) las velocidades sin tomar en cuenta los tiempos:

$$\frac{80 + 120}{2} = 100 \text{ km/hr}$$

Posiblemente la razón de esto es que los estudiantes de secundaria, al no tener un procedimiento automático para realizarlo, reflexionan sobre el mejor método para hacer esto. En cambio, los estudiantes del nivel superior, aplican el algoritmo que conocen de manera mecánica.

Entre los cálculos variados está una simple suma de ambas velocidades.

(No se registran aquí los resultados del problema 10.)

ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

En esta sección se destacarán algunas de las respuestas dadas por los seis estudiantes entrevistados de tercero de secundaria.

Problema 1. En este problema estabamos interesados en observar si los estudiantes podían darse cuenta de que el valor dado del promedio no era posible por no estar dentro del rango de los datos. Cuatro estudiantes mencionaron que el valor propuesto no era el indicado (dos de ellos necesitaron calcular primero el promedio). Sus explicaciones son las siguientes.

Carlos, al preguntarle “¿qué hizo?” contestó: “Comparé los precios”. Al pedirle que explique su respuesta de por qué no era posible, dijo que: “No, porque son diferentes precios muy bajos”. Aquí vemos que tiene la intuición de que el valor “alto” dado del promedio no es posible.

Alejandro calcula inicialmente el promedio y contesta: “No, porque hay precios de 6 y 7 que son los que hay más y no daría el promedio 9.20”. Al insistir el entrevistador, Alejandro respondió: “no hay ningún precio de 9.20, o sea, que rebase los 8.10 más alto”. Aquí observamos dos cosas. El estudiante se da cuenta de que la mayoría de los precios están entre 6 y 7 y que por ello el

promedio no podría llegar hasta 9.20. Después da mas precisión a su idea diciendo que, como el más alto es de 8.10, el promedio no puede ser 9.20.

Pedro, después de calcular el promedio, dice que no es posible y, al pedirle que no use las operaciones, explica: “*Se redondea ... los precios se ve que valen 7, 5 y 8 y si a uno le quitamos y a otro le ponemos no va a dar*”. Esto muestra una técnica para comprobar el promedio que se basa en que unos valores se deben compensar con los otros.

Ana, después de haber calculado el promedio de 6.76, dice lo siguiente: “*el promedio no era 9.20 sino 6.76; además no podía ser porque ahí ni siquiera había un precio de 9.20*”. Sin embargo, cuando posteriormente el entrevistador pregunta: “*¿Tú crees que el promedio puede ser de 4?*”, ella contesta que “*podría ser*”. Esto muestra que, aun cuando tiene cierta idea sobre esto, no está bien fundamentada.

Los otros dos estudiantes también recurrieron al algoritmo y, cuando se les preguntó si podían contestar la pregunta sin realizar las operaciones, contestaron que sí era posible el valor dado del promedio.

Berenice, al preguntársele si el promedio podría ser de 4, respondió que no, “*porque sería muy bajo, los precios están muy altos*”. Aquí muestra algún sentido de que el promedio no puede ser muy bajo, pero posiblemente no pueda definir el rango exacto.

Noemí durante su entrevista dijo: “*Porque si no me dan la posibilidad de hacer operaciones, no sabría*”. Aquí afirma que, si no hace los cálculos correspondientes, no podría saber.

Problema 2. En este problema estabamos interesados en observar si los estudiantes podían dar una respuesta cualitativa del cambio del valor del promedio cuando se agregan más datos: parte *a*) dos datos más con el mismo valor del promedio (el promedio queda igual) y parte *b*) un dato más con un valor mayor que el promedio (el promedio aumenta).

Parte a): Dos estudiantes no hicieron operaciones. Otros tres recurrieron a calcular el promedio. Describimos a continuación cada uno de ellos.

Ana, sin calcular, dice que el promedio será “más grande”. Explica que: *como anexaron dos precios más, se tendría que sumar todo*”.

Noemí también responde que “*Se altera. Nos daría otro promedio*”. Cuando se le pregunta si sería mayor o menor, contesta que mayor, pero su explicación no es clara.

Alejandro calcula el promedio. De igual manera, Berenice y Pedro proceden a calcular el promedio. De sus resultados, se dan cuenta que no cambia.

Parte b) En esta parte, dos estudiantes no hacen operaciones y otros tres calculan el promedio (no los mismos que en el inciso anterior). Sus procedimientos y explicaciones son las siguientes.

Ana en este inciso dice que “*se vuelve a alterar el promedio*”. Cuando se le pregunta cómo, ella contesta que: “*podría ser que aumente o que disminuya*” y después agrega que: “*ni que aumente demasiado ni que disminuya tanto, sino que se queda intercalado*”. Vemos que Ana se basa aquí en una estimación. Tiene la idea de que un valor parecido a los otros no debe afectar mucho al promedio de otras 8 cantidades.

Alejandro, ahora sin calcular, dice que: “*dará un número mayor*”. Su explicación, sin embargo, no es muy clara, ya que puede ser correcta o incorrecta: “*Pensé que era más cantidad de dinero y más personas*”.

También aquí Noemí contesta que el promedio aumentaría.

Berenice y Pedro proceden a calcular el promedio y basan sus respuestas en sus resultados.

De las respuestas anteriores se puede concluir que esta pregunta les resultó particularmente difícil.

Problema 5. En este problema estabamos interesados en observar si los estudiantes se dan cuenta de que un cero adicional en los datos afecta el valor del promedio.

Cinco de los estudiantes indicaron que sí se alteraría el promedio (aunque Carlos no es muy claro en su explicación). Algunas de las razones que dieron fueron: “ahora se divide entre 4” o “ya no son 3 sino 4 niños”.

Noemí dice que “no, porque él llegó sin nada, no aportó ningún dulce, entonces el promedio se queda como está”.

Problema 7. En este problema estabamos interesados en observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una tabla de frecuencias.

Berenice calculó intuitivamente el promedio ponderado: “... el 4 por 0 y el 8 por 1, porque se supone que éstos son número de familias y éstos son los hijos”. Después de corregir un error encuentra el valor de 1.8 para el promedio.

Ana, Pedro y Alejandro no saben cómo manejar las dos columnas de datos. El procedimiento que siguieron para calcular el promedio fue el de sumar cada una y dividir los resultados uno entre el otro. Pedro explica: “Sumé los hijos y lo dividi entre las 33 familias y no daba ni siquiera uno” (Ana, al contrario, divide 33 entre 6).

Noemí calcula el promedio de la primera columna del número de hijos (6 entre 4) e ignora la segunda columna.

Carlos únicamente suma la columna del número de hijos y dice que el promedio es de 6.

Obviamente, esta forma de presentar los datos es muy confusa para estos estudiantes y sólo uno logra calcular el promedio ponderado de manera intuitiva.

Problema 8. En este problema estabamos interesados en observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una lista.

Ana, Alejandro, Berenice y Pedro agrupan de manera intuitiva cantidades para sumar y calcular el promedio: Por ejemplo, Pedro explica así su procedimiento: “luego el 6 lo multipliqué por 3 ... luego el 7 por 3 ... luego el 8 por 7 ...”

Carlos y Noemí sumaron los datos y dividieron para obtener el promedio.

Es interesante observar que la mayoría de los niños intuitivamente agrupan las cantidades para calcular el promedio. Esto puede tomarse como base para formar tablas de frecuencia y para calcular la fórmula del promedio correspondiente.

Problema 9. En este problema estabamos interesados en observar si los estudiantes son capaces de calcular el promedio ponderado en una situación más compleja de velocidades.

Ana calcula el promedio con el procedimiento correcto (pero en vez de dividir entre el tiempo total (10 horas) divide entre el promedio de las horas (5)). Ella explica: “Pues yo multipliqué 80 km por 2, que son las dos horas, me dio 160; después los 120 km por 8 que son las horas ... le sumé y me salió 1 120. Luego eso lo dividi entre 5”.

Berenice sigue un procedimiento similar al de Ana, pero al final divide entre 2. También Noemí hace algo muy similar, pero no divide.

Alejandro divide cada velocidad entre su tiempo respectivo y suma estas cantidades para dar el promedio.

Pedro suma directamente las dos velocidades y las divide entre dos.

Carlos tuvo muchos problemas con este ejercicio, haciendo varios cálculos un poco al azar.

Es impresionante observar que, para un problema tan complejo como éste, tres de los seis estudiantes realizaron procedimientos en la dirección apropiada y casi correctos.

CONCLUSIONES

El desempeño de los estudiantes en los primeros seis problemas fue bajo para el grupo de secundaria y mediano para el del nivel superior. Estos problemas están

relacionados con cada una de las propiedades descritas por Strauss y Bichler sobre el promedio, lo cual indica que existen deficiencias conceptuales fuertes en los estudiantes de secundaria que permanecen en menor grado en los estudiantes del nivel superior.

En los problemas relacionados con el cálculo del promedio con datos en formatos diferentes, se encontraron dificultades principalmente con los estudiantes del nivel medio. Éstos aplican más lo que podríamos llamar “fórmulas falsas”, es decir, variaciones incorrectas del algoritmo, como sólo sumar. Éstos no sólo son errores de cálculo, sino que reflejan que los estudiantes tienen otras concepciones del promedio como por ejemplo, “Promedio = Suma”.

También se observó en ambos niveles una interpretación deficiente del valor obtenido del promedio, aun cuando, al comparar los resultados de los dos grupos de estudiantes, si se nota un progreso en el cálculo e interpretación del promedio de los estudiantes de nivel superior.

Se puede también observar en los resultados de los problemas 7, 8 y 9 del cuestionario que los estudiantes del nivel medio los resuelven correctamente a base de sus intuiciones y que el conocimiento de fórmulas mecánicas de los estudiantes del nivel superior les dificulta aplicar una estrategia apropiada.

Las entrevistas confirman estas conclusiones

El análisis nos permite darnos cuenta de que hace falta mejorar las prácticas de la enseñanza del promedio. Entre otras se sugiere:

- Discutir una gama amplia de tipos de problemas en los que aparezca el promedio.
- Presentar datos en diferentes formas.
- Hacer énfasis en el significado del valor obtenido del promedio en cada caso particular.
- No enseñar prematuramente la fórmula del cálculo del promedio. Basarse más bien en descripciones numéricas sobre el procedimiento de este cálculo y la razón de éste.

ANEXO. CUESTIONARIO APLICADO

PROBLEMA 1

Los datos que vienen a continuación corresponden a los precios observados en cinco tiendas diferentes para una lata de atún de la marca MAR:

Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Tienda 5
7.50	5.30	8.10	6.20	6.70

Alguien calculó que el promedio de estos precios es de 9.20.
¿Puede ser posible? Explica.

PROBLEMA 2

A la salida de un centro comercial se le preguntó a un grupo de personas la cantidad de dinero que habían gastado en la compra de alimentos. Éstas fueron las respuestas:

\$35, \$39, \$28, \$93, \$62, \$25

El promedio de estas 6 ventas es de \$47.

- Dos personas que salían, mencionaron que habían gastado \$47 cada una. ¿Cómo influyen estos dos valores al nuevo promedio de las 8 ventas?
- Otra persona al salir, manifiesta que se gastó \$65 en alimentos. ¿Cómo influye este nuevo valor al promedio de las 9 ventas anteriores?
- ¿Cuál es el valor del promedio?

PROBLEMA 3

Observa los 10 valores siguientes:

2, 4, 4, 4, 5, 5, 8, 8, 10, 10

¿Crees que el promedio tiene que ser igual a uno de estos valores?
Explica tu respuesta.

PROBLEMA 4

En 10 casas de una cuadra se realizó una encuesta en la que se preguntaba por “el número de teléfonos” en cada casa. Los datos obtenidos se muestran a continuación:

Número de teléfonos en cada casa: 1, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1

¿En promedio, cuál es el número de teléfonos que hay por casa?
Interpreta y explica tu respuesta.

PROBLEMA 5

Mayra, Jaime y Pedro se reunieron en una fiesta. Cada uno trajo un cierto número de dulces. Mayra trajo 12 dulces, Jaime 8 y Pedro 16.

- ¿Cuántos dulces trajeron en promedio por niño?
- Un cuarto niño llega a la fiesta sin dulces. ¿Se altera el promedio de dulces por niño?
- ¿Cuál será ahora el promedio de dulces por niño?

PROBLEMA 6

A los reclutas de una academia de policía se les solicitó presentar un examen que mide la capacidad que tienen para hacer ejercicio. Esta capacidad (medida en minutos) se obtuvo para cada uno de los 20 reclutas:

25, 21, 35, 33, 40, 32, 30, 34, 30, 27, 16, 25, 29, 31, 31, 32, 44, 32, 33, 20

El promedio de estos valores es de 30.5
¿Qué representa este valor? Explica tu respuesta.

PROBLEMA 7

Se realizó una encuesta acerca del número de hijos que tiene una familia mexicana. Los datos obtenidos de 33 familias de una cuadra se presentan en el cuadro siguiente:

Número de hijos por familia	Número de familias
0	4
1	8
2	11
3	10

- ¿Cuál es el número de hijos promedio que hay entre las 33 familias encuestadas?
- ¿De qué manera interpretas el valor que representa el promedio?

PROBLEMA 8

Se aplicó un examen a un grupo y las calificaciones obtenidas por los alumnos fueron las siguientes (en una escala del 0 al 10):

4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10

¿Cuál es el promedio de las calificaciones?

PROBLEMA 9

Un automóvil viaja a una velocidad de 80 km/hr durante 2 horas y después a una velocidad de 120 km/hr durante 8 horas. ¿Cuál será su velocidad promedio?

PROBLEMA 10

El departamento de mercadotecnia de una fábrica de zapatos tenis realizó una encuesta relativa a las tallas de los alumnos de secundaria:

Talla	Ventas
3	0
4	10
5	20
6	30
7	40

Obtén el promedio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Flores Peñafiel, A. (1995), "Nexos en el razonamiento proporcional: Palancas, media aritmética, promedio ponderado, mezclas, porcentajes de bateo y velocidades", *Educación Matemática*, vol. 7, núm. 2, pp. 113-125.
- Gattusso, L. (1997), "La moyenne, un concept élémentaire?", *La Revue del IADOOQ*, vol. 9, núm. 3, pp. 12-14.
- Gattusso, L. y C. Mary (1996), "Development of the Concepts of the Arithmetic Average from High School to University", en *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, núm. 2, pp. 401-408.
- Mokros, J. y S. J. Russell (1995), "Children's Concepts of Average and Representativeness", en *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, núm. 1, pp. 20-39.
- Pollatsek, A., S. Lima y A. D. Well (1981), "Concept of Computation: Students' Understanding of the Mean", en *Educational Studies in Mathematics*, núm. 12, pp. 191-204.

- Shaughnessy, J. M. (1992), "Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics", en *Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions*, núm. 19, pp. 465-494.
- Strauss, S. y E. Bichler (1988), "The Development of Children's Concepts of the Arithmetic Average", en *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 19, núm. 1, pp. 64-80.

DATOS DE LOS AUTORES

Simón Mochón

Departamento de Matemática Educativa,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
smochona@sni.conacyt.mx

María Margarita Tlachy Anell

Departamento de Matemática Educativa,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
mtlachy@conafe.edu.mx

www.santillana.com.mx/educacionmatematica