Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Elichiribehety, Inés; Otero, María Rita
La relación entre los marcos de resolución y los modelos mentales en la enseñanza del álgebra
Educación Matemática, vol. 16, núm. 1, abril, 2004, pp. 29-58
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

La relación entre los marcos de resolución y los modelos mentales en la enseñanza del álgebra

Inés Elichiribehety y María Rita Otero

Resumen: En este trabajo se presentan resultados acerca de los marcos de resolución utilizados por 264 estudiantes de enseñanza secundaria en la resolución de dos problemas. Empleando la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird (1983, 1990a, 1990b, 1996), se describen los modelos aritméticos y algebraicos empleados por los sujetos. Los resultados muestran que, independientemente de la edad, en un porcentaje elevado los sujetos resuelven orientados por los procesos estratégicos de comprensión del enunciado. Cuando la transformación del enunciado verbal no puede realizarse en el marco algebraico, los sujetos emplean exitosamente el marco aritmético. La ejecución generalizada del marco algebraico depende fuertemente de un tratamiento escolar adecuado, que contemple los procedimientos espontáneos, ejecutados por un porcentaje significativo de alumnos.

Palabras clave: modelos mentales, modelos aritméticos y algebraicos, resolución de problemas, pensamiento matemático, educación matemática.

Abstract: This paper presents the results of solving frameworks used by 264 students of secondary school when solving two problems. By using Johnson-Laird's Theory of Mental Models, the arithmetic and algebraic models used by the students are described. The results show that the students solve in a high percentage, independently of the age, guided by the strategic processes of statement comprehension. When the transformation of the verbal statement cannot be carried out within the algebraic framework, the students use the arithmetic one successfully. The general performance of the algebraic framework would strongly depend on an adequate school treatment that considers the spontaneous procedures carried out by a significant percentage of students.

Key words: mental models, arithmetic and algebraic models, problem solving, mathematical thinking, mathematics education.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación más amplio que estudia la génesis escolar de formulaciones algebraicas y la modelación de situaciones matemáticas, desde una perspectiva cognitiva. En esta instancia, se presentan resultados parciales referidos a la resolución de dos problemas en una población de $N = 264$ sujetos, correspondientes a tres escuelas de la ciudad de Tandil. El rango de edad es desde 13 a 18 años.

Se asume la tesis propuesta por Gascón (1999) que interpreta el Álgebra escolar, no como "aritmética generalizada", sino como un instrumento esencial de la "modelación matemática". Al entender el Álgebra de esta manera, como un instrumento al servicio del trabajo matemático, es fundamental el papel que juega la instrucción en la construcción de la modelación algebraica. Por esta razón, se decidió indagar el desempeño de los estudiantes para analizar sus estrategias de resolución.

Cuando los procedimientos algebraicos forman parte de la estructura cognitiva del sujeto, se produce *un cambio radical en las condiciones del trabajo matemático, al reemplazar mediante el trazo escrito ciertos usos de la memoria humana permitiendo, además, la explicitación y la manipulación de la estructura del problema tratado* (Gascón, 1999, p. 79).

El problema de la enseñanza del conocimiento algebraico en la escuela y en la educación formal está aún muy lejos de haber sido resuelto. Este tema es de relevancia e interés creciente (Córtes, Vergnaud y Kavafian, 1990; Chevallard, 1989a, 1989b, 1990; Filloy, 1993, 1999; Drouhard, 1996; Gascón 1985, 1993, 1994, 1999; Grupo Azarquiel, 1993; Hebert, 1991; Kieran y Filloy, 1989; Meavilla Segui, 1995; Rojano, 1994; MacGregor y Stacey, 2000; Cedillo, 1999). Sin embargo, la mayor parte de estos trabajos realizan un abordaje didáctico. En esta parte de nuestra investigación, el énfasis está puesto en lo cognitivo, más que en lo didáctico. Nos interesa analizar las representaciones mentales que los sujetos emplean para razonar y el modo en que lo hacen, cuando tienen que resolver dos problemas típicos en el currículum escolar.

Los dos problemas elegidos para esta investigación se trabajaron previamente en diferentes estudios exploratorios. El primer problema integró una serie de tres, para indagar si los parámetros en una ecuación funcionan como variable didáctica (Elichiribehety *et al.*, 1995). Es decir, si provocan la necesidad de procedimientos algebraicos en la resolución de problemas.

El segundo problema fue abordado por Otero (1998a, 1998b, 1998c), cuando realizó un estudio cognitivo dirigido a mostrar que los alumnos encuentran modos de resolución que pueden ser explicados a partir de la Teoría de los Modelos Mentales (Johnson-Laird 1983, 1990a, 1990b, 1996).

> En un estudio transversal acerca de los modelos ejecutados desde los 12 hasta los 18 años en la resolución de un problema complejo, encontramos que los sujetos evalúan el modelo para un set dado de valores, parten siempre de un ejemplo particular que reúne las características del modelo. Es decir, *el pensamiento basado en modelos maneja lo general como si fuera particular* (Otero, 1999).

También identificó modelos aritméticos y algebraicos y encontró que aparecen en todo el rango de la escolaridad media. Estos trabajos permitieron definir los problemas e inferir los modelos mentales implícitos en las estrategias de resolución.

La pertinencia y potencialidad de la Teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird para la investigación en enseñanza de las ciencias ha sido establecida por trabajos pioneros en este campo (Greca, 1995; Greca y Moreira, 1996a, 1996b, 1998, 2000; Moreira, 1996; Schwartz y Moore, 1998; Moreira y Lagreca, 1998; Otero, 1998; Otero y Banks Leite, 1998; Rodríguez Palmero, 2000). En el ámbito específico de la cognición en Matemática, Schwartz y Moore (1998) investigan la resolución numérica de problemas de matemática desde la perspectiva de los modelos mentales de Johnson-Laird. Nuestro trabajo utiliza el mismo referencial y continúa la investigación iniciada por Otero (1998a, 1998b, 1998c), que identificó modelos mentales en la resolución de un problema complejo en toda la escolaridad media.

Según Johnson-Laird (1996), el sistema cognitivo emplea tres códigos representacionales: proposiciones mentales, imágenes mentales y modelos mentales. Éstos tienen funciones y estructuras que los distinguen entre sí. Las *proposiciones* son representaciones de significados verbalmente expresables. Son abstractas, generales, amodales (no están ligadas a una modalidad sensorial) y pueden asumir un valor de verdad. Las propocisiones no guardan una relación directa con el objeto representado. Las *imágenes* son representaciones específicas, y analógicas, porque sostienen alguna relación isomórfica con lo que representan. Se originan en la percepción y/o en la imaginación y representan aspectos perceptibles de los objetos del mundo real. Son de modalidad específica: visuales, auditivas, táctiles, y no pueden representar relaciones abstractas ni asumir un valor de verdad. Los *modelos* son análogos estructurales del mundo real o imaginario. Pueden incluir proposiciones e imágenes y tienen un carácter parcialmente analógico. Los modelos pueden representar relaciones abstractas que no son visualizables, como justicia, verdad, belleza, negación, causalidad.

Los modelos mentales del mundo pueden ser construidos como producto de la percepción, del discurso, de la interacción social y de la experiencia interna manifestada en la habilidad del sujeto para construir modelos a partir de sus componentes primitivos o de modelos análogos que ya poseía. Todo nuestro conocimiento del mundo depende de nuestra capacidad de construir modelos mentales. Las restricciones para la construcción de esos modelos derivan de cómo concebimos la estructura del mundo, de las relaciones conceptuales que gobiernan la ontología de lo real y de la necesidad de mantener el sistema libre de contradicciones (Johnson-Laird, 1983, p. 430).

Como se ha señalado:

> Johnson-Laird construye su teoría postulando un modo analógico de razonar, en oposición a la utilización de proposiciones y reglas de inferencia. El constructo Modelo Mental es consubstancial a este modo de razonamiento. Al corroborar empíricamente las predicciones realizadas, Johnson-Laird establece la existencia de Modelos Mentales como representaciones mentales diferenciadas estructural y funcionalmente de las proposiciones e imágenes (Otero, 1999).

Cuando una persona comprende un suceso real o un evento discursivo, como el enunciado de un problema matemático, es capaz de construir una representación mental significativa sólo si tiene un conocimiento más general de esos acontecimientos. En términos de Piaget, diríamos que la comprensión depende del marco asimilador que posea el sujeto y, en términos de Ausubel, afirmamos que dependerá de la presencia de los subsumidores necesarios en su estructura cognitiva.

Quien comprende un problema de matemática lo hace sobre la base de informaciones, percepciones y representaciones vinculadas al hecho en sí, al contexto en el que el suceso tiene lugar y a presupuestos cognitivos personales con relación al problema. Todos ellos dirigen la recuperación de representaciones desde la memoria, para construir un modelo mental de la situación (Van Dijk, 1992). Los modelos mentales y las representaciones que se construyen como parte del proceso de comprensión no son necesariamente los más adecuados. En cualquier caso, dichos modelos influyen sobre las conceptualizaciones posteriores y sobre las representaciones internas y externas generadas a partir de ellos.

Este trabajo estudia los modelos mentales que subyacen a la resolución de dos problemas de Matemática y los marcos de resolución que acaban siendo adoptados. Se considera toda escolaridad media y se pone en evidencia que los marcos encontrados no parecerían correlacionar positivamente con la edad. Simultáneamente, la instrucción no parecería tener influencia decisiva en el predominio de los diferentes marcos.

En las próximas secciones presentamos: las preguntas de la investigación, la metodología, la formulación y descripción de las categorías de análisis, así como los resultados.

PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN

Nos proponemos responder las siguientes preguntas:

1) ¿Qué marcos de resolución emplean los sujetos para resolver los dos problemas planteados y qué características tienen los modelos mentales que subyacen a ellos?

Nuestra primera hipótesis se vincula con los marcos de resolución adoptados por los sujetos, que serían las manifestaciones externas de las representaciones mentales (internas) que construyen para comprender y resolver los problemas planteados. Inferimos que los sujetos construyen modelos mentales (en el sentido de Johnson-Laird) relacionados con procedimientos algebraicos, aritméticos, icónicos o verbales, que nos interesan analizar.

2) ¿Qué categorías de análisis se pueden formular para describir los modelos mentales que aparecen?

El trabajo se propone contribuir a la formulación de instrumentos cualitativos de análisis, para dar cuenta de una representación mental, a la que tenemos acceso indirectamente. Se busca identificar las características comunes de los modelos mentales que se manifiestan en los marcos de resolución. Las categorías son etiquetas conceptuales para describir un procedimiento común, ligado al modelo particular y personal de cada estudiante, al que no tenemos acceso. La comprensión e interpretación del enunciado de los problemas supone, para cada sujeto, la construcción de modelos mentales diferentes, idiosincráticos y personales. Esos modelos son indispensables para comprender, razonar, inferir, resolver y tomar decisiones frente a los problemas. La resolución correcta depende de la construcción de un modelo adecuado; sin embargo, este proceso es de naturaleza estratégica y no tiene garantía de éxito. Conocer las características de los modelos mentales construidos por los sujetos es clave para colaborar con su aprendizaje matemático.

METODOLOGÍA Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Se diseñó un estudio transversal que abarca los dos últimos años de la Educación General Básica, primero y segundo años del Polimodal, y quinto año. La tarea consiste en solicitar a todos los alumnos que resuelvan dos problemas en forma individual y anónima.

Se escogieron tres escuelas del radio céntrico de la ciudad de Tandil, dos públicas y una privada. Se trata de instituciones que tienen dos y tres turnos, en las cuales funcionan todos los niveles de la escolaridad. En la elección interesó que todos los años, desde octavo hasta quinto, funcionaran en la misma dependencia y que la muestra de alumnos fuera heterogénea en lo que se refiere al sector social considerado. Se seleccionaron al azar tres divisiones de cada año y siete sujetos de cada una de ellas sin tener en cuenta su desempeño en Matemática. En el momento en que se realizó la selección, los alumnos estaban cursando el tercer trimestre.

De esta manera, constituimos una población efectiva de $N = 264$ sujetos que abordarían varias actividades; la presentación actual es una de ellas. Los alumnos recibieron los dos problemas siguientes:

Problema 1:
Pablo tenía 30 varillas todas iguales (no sabemos la longitud). Javier tenía 40 varillas también todas iguales y cada una medía 4 metros más que las de Pablo. Poniendo una varilla a continuación de la otra se forman 1 000 metros. ¿Cuánto medía cada una de las varillas de Pablo y Javier?

Problema 2:
Se desea ubicar un grupo de alumnos en aulas. Si se distribuyen 40 alumnos por aula quedan 25 y si se ubican 42 por aula queda un alumno sin ubicar. Calcular el número de alumnos y de aulas de que se dispone.

FORMULACIÓN Y DESCRIPCIÓN DE CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Una vez obtenidos los registros, se realizó un primer análisis para categorizar los 264 protocolos disponibles. La categorización se realiza tomando la terminología y los criterios del Análisis Exploratorio, por lo tanto se definen variables nominales activas e ilustrativas. Se han definido las siguientes variables y sus respectivas modalidades:

Cantidad de problemas resueltos	NING: (No resuelve ninguno) SÓLO P1: (Resuelve sólo el problema 1) SÓLO P2: (Resuelve sólo el problema 2) RDOS: (Resuelve los dos problemas)
Problemas resueltos correctamente	SIP1: (Es correcto el problema 1) NOP1: (No es correcto el problema 1) SIP2: (Es correcto el problema 2) NOP2: (No es correcto el problema 2)
Marcos de resolución	ARIT: (Resuelve sólo en el marco aritmético) ALGE: (Resuelve sólo en el marco algebraico) AMBOS: (Resuelve en el marco aritmético y en el algebraico)
Resolución algebraica del problema 1	SFE1: (Formulan la ecuación pero no operan). OCE1: (Operan con ecuaciones mal formuladas) FEO1: (Formulan y operan la ecuación de manera correcta)
Resolución aritmética del problema 1	ROS1: (Resuelven operaciones sin tener en cuenta las relaciones del problema) DIV1: (Eligen la división para resolver el problema) RAUM1: (Reducen a la unidad mal) ALGO1: (Usan el enunciado para buscar algún algoritmo) RAUB1: (Reducen a la unidad para encontrar el resultado correcto)
Resolución algebraica del problema 2	SFE2: (Formulan la ecuación pero no operan) OCE2: (Operan con ecuaciones mal formuladas) FEO2: (Formulan y operan la ecuación de manera correcta)
Resolución aritmética del problema 2	ROS2: (Resuelven operaciones sin tener en cuenta las relaciones del problema) REP2: (Resta recursiva) RMT2: (Resuelven mediante dos tablas) RCE2: (Modelo de Ana)

PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE DATOS

Para la variable *Cantidad de problemas resueltos,* sobre $N = 264$ sujetos, encontramos que 86% intenta resolver los problemas y emplea diferentes estrategias: algebraicas o aritméticas. Independientemente de que las resoluciones sean o no correctas, los datos indicarían que construyen algún modelo mental para representar y dar significado, mientras que sólo 14% del conjunto no responde.

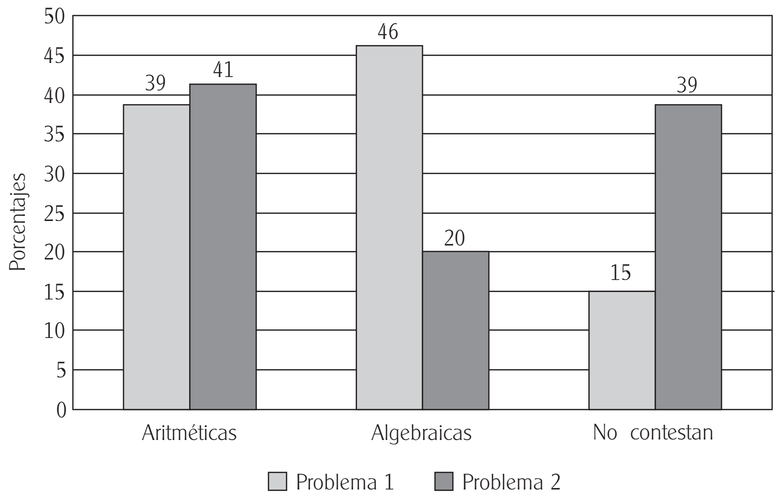
Con referencia a la variable *Marcos de resolución,* 38% utiliza en ambos problemas sólo el marco aritmético, 33% sólo el marco algebraico, mientras que 16% utiliza un marco distinto para cada problema. Es oportuno considerar que el procesamiento del discurso es un proceso de naturaleza *estratégica,* en el cual se constituye una representación mental en la memoria a partir de representaciones internas y externas, con el objeto de interpretar y entender el discurso de otro. Los *procesos estratégicos,* como el proceso de comprensión del enunciado de los problemas, no tienen garantía de éxito ni proporcionan una representación única del texto; las estrategias aplicadas son como hipótesis operacionales eficaces acerca de la estructura y significado del discurso y pueden ser señaladas como incorrectas en procesos posteriores (Van Dijk, 1992, p. 23).

El marco de resolución que acaba siendo adoptado se vincula con las estrategias de comprensión del discurso y con la capacidad cognitiva de sostener más de un modelo en la memoria de trabajo, en el caso en el que la traducción al lenguaje algebraico no sea inmediata. La gráfica 1 desagrega en cada problema el marco utilizado.

En el problema de las varillas (problema 1), predominan las resoluciones algebraicas (46%) con respecto a las aritméticas (39%) y sólo 15% no responde. En cambio, para el problema de las aulas (problema 2), las resoluciones aritméticas (41%) prevalecen sobre las algebraicas (20%), mientras que 39% de los sujetos no responden.

Estos resultados parecen indicar que el problema de las varillas puede ser abordado por los sujetos desde el marco algebraico, porque su enunciado permite una traducción más sencilla para plantear la ecuación. En cambio, para el problema de las aulas, la formulación algebraica no sería tan inmediata y la estrategia que predomina es la aritmética. Sin embargo, nótese la paridad del marco aritmético para ambos problemas, en total correspondencia con el hecho de que los sujetos construyen modelos mentales del enunciado como parte de su funcionamiento cognitivo habitual.

Gráfica 1 Resoluciones aritméticas y algebraicas con respecto a la población (N = 264)



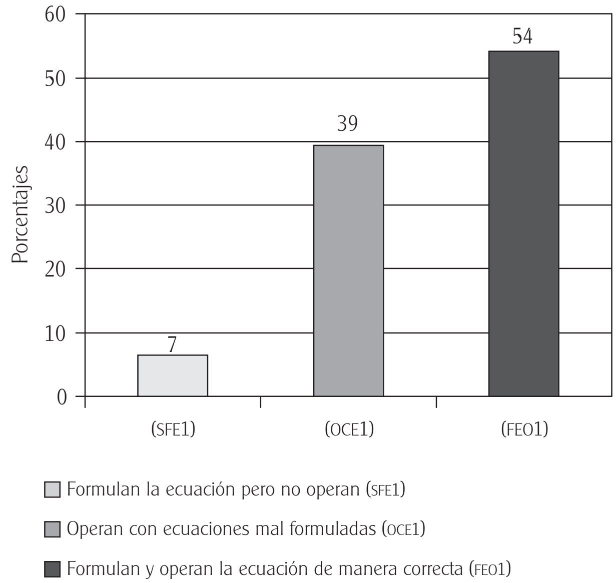
Descripción de las variables para ambos problemas

A partir de los protocolos, para cada uno de los problemas se generaron variables que permiten analizar los modos de resolución. A continuación se describen para el primer problema, las dos variables categorizadas y sus respectivas modalidades:

a) *Resolución algebraica del problema 1 (RAL1)* con tres modalidades: *Formulan la ecuación pero no operan (SFE1), Operan con ecuaciones mal formuladas (OCE1)* y *Formulan y operan la ecuación de manera correcta (FEO1).*

b) *Resolución aritmética del problema 1 (RAR1)* con cinco modalidades: *Resuelven operaciones sin tener en cuenta las relaciones del problema (ROS1), Eligen la división para resolver el problema (DIV1), Reducen a la unidad mal (RAUM1), Usan el enunciado para buscar algún algoritmo (ALGO1)* y *Reducen a la unidad bien (RAUB1).* Además, para cada una de las modalidades se presentan las producciones de los sujetos, que caracterizan a los modelos encontrados.

Gráfica 2 Resolución algebraica del problema 1 (N = 122)



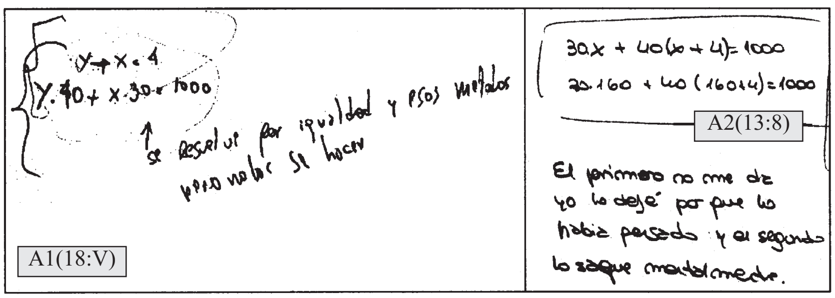
a) Resolución algebraica del problema 1 (RAL1)

En la gráfica 2 se muestra el desempeño de los alumnos para la variable *Resolución algebraica del problema 1* (*RAL1*), sobre N = 122 sujetos que intentan esta estrategia. Las modalidades se distribuyen de la siguiente manera: los sujetos que optan por formular sólo la ecuación (7%), los que operan con ecuaciones mal formuladas sin tener en cuenta todas las relaciones del problema (39%) y los que demuestran una buena competencia para formular y operar con ecuaciones (54%).

a.1) Formulan la ecuación pero no operan (SFE1)

Los protocolos siguientes ejemplifican esta modalidad. Se observa que los sujetos pueden formular la ecuación, sin embargo abandonan su resolución. En algunos casos explicitan las causas, en otros no. Esto indicaría que comprenden el discurso porque transforman el enunciado verbal en formulación algebraica, pero no tienen las estrategias para operar con ecuaciones.

Esta dificultad puede apreciarse en el protocolo de A1(18:V),[1] que cursa el último año de la escolaridad secundaria. Luego de plantear el sistema explica que "se resuelve por igualdad y esos métodos pero no lo sé hacer". De igual modo, el protocolo de A2(13:8) corresponde a un sujeto que cursa octavo año de la Educación General Básica. Formula la ecuación, pero continúa con estrategias aritméticas, asignando un valor para x. Al comprobar, se da cuenta de su error y abandona la resolución. No obstante, señala: "El primero no me da, yo lo dejé porque no había pensado..."



a.2) Operan con ecuaciones mal formuladas (OCE1)

Esta modalidad se vincula con la comprensión parcial del discurso o con errores de sintaxis, como olvidar el paréntesis en el caso A3(14:9). Por lo tanto, la formulación de la ecuación es incorrecta. En esta modalidad, los sujetos establecen algunas relaciones del problema, como se observa para A4(16:II). Este sujeto, que cursa segundo año del Polimodal, formula la ecuación sólo para las varillas de Javier. Luego al escribir la respuesta, indica que la solución encontrada es la medida de la varilla de Pablo y tiene en cuenta la diferencia entre las medidas de las varillas al expresar el resultado. Para A3(14:9), podría ocurrir que olvidó el paréntesis al plantear la ecuación, o sólo consideró la diferencia para una sola varilla, luego supone que todas las varillas son iguales para resolver.

[1] Se designa a los sujetos con la sigla A1, A2, etc., seguida por un paréntesis que indica edad y año que cursa, respectivamente.

$30x + 40x + 4 = 1000$
$30x + 40x = 1000 - 4$
$30x + 40x = 996$
$70x = 996$
$x = \frac{996}{70} = 14,2 + 4 = 18,2$
$14,2 =$ Pablo
$18,2 =$ Javier.

A3(14:9)

(está correcto)

$P = x$
$J = x + 4$

$P \; 30x =$
$J \; 40 \cdot (x+4) = 1000$
$40x + 160 = 1000$
$40x = 1000 - 160$
$x = 840 \div 40$
$x = 21$

21 metros medía la varilla de Pablo y la de Javier medía 25 metros

A4(16:II)

Sin embargo, en ambos casos, al escribir la respuesta surge la idea de la diferencia de las varillas. El protocolo del sujeto que cursa noveno año de la Educación General Básica (EGB), A5(15:9), muestra que establece algunas relaciones del problema y otras las considera como dato: "Las varillas de Javier miden 4 metros (como ya habían dicho)". En consecuencia, formula la ecuación sólo para Pablo. Tiene en cuenta la diferencia de las varillas de Javier en su resolución y considera que la medida de la varilla de Javier mide 4 metros, según lo explicita en su respuesta. Luego confirma con la verificación la construcción de su modelo.

$30 \cdot x + 40 \cdot 4 = 1000$
$30x + 160 = 1000$
$30 \cdot x = 1000 - 160$
$30 \cdot x = 840$
$x = 840 \div 30$
$x = 28$

Rts: Las varillas de Javier medían 4 metros (como ya habían dicho) y las de Pablo 28 metros cada una.

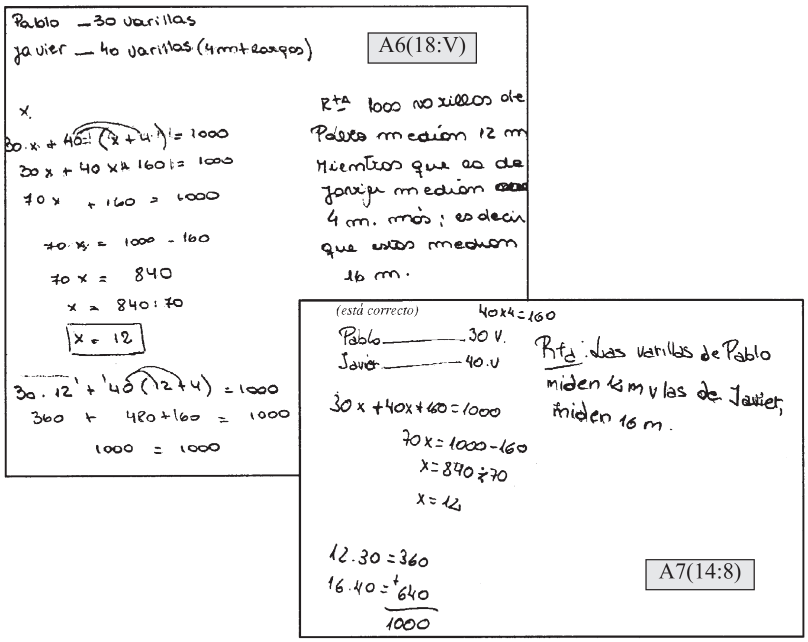
Verificación
$30 \cdot 28 + 40 \cdot 4 = 1000$
$840 + 160 = 1000$
$1000 = 1000$

A5(15:9)

a.3) Formulan y operan la ecuación de manera correcta (FEO1)

En esta última modalidad, sobre $N = 122$, 54% de los sujetos formulan y operan la ecuación de manera correcta, como se muestra en la gráfica 2. En algunos casos, la competencia algebraica es mayor. Esto se manifiesta en la manera de resolver, el modo de aplicar propiedades y la presentación de la resolución, como en el caso A6(18:V). En esta modalidad, se identifica un modelo acabado con respecto a los anteriores, donde la comprensión del discurso para traducir las relaciones del problema y las estrategias de resolución llevan al resultado correcto.

Los protocolos aquí presentados pertenecen a sujetos que cursan, en el primer caso, quinto año, A6(18:V), y en el segundo caso, A7(14:8), octavo año de la EGB. Sus desempeños parecen indicar que la construcción de modelos es una característica del pensamiento que no está ligada a la edad de los sujetos. Sobre estos resultados, cabe destacar que la apropiación del conocimiento algebraico tiene su origen en la escuela y está fuertemente mediada por la instrucción.



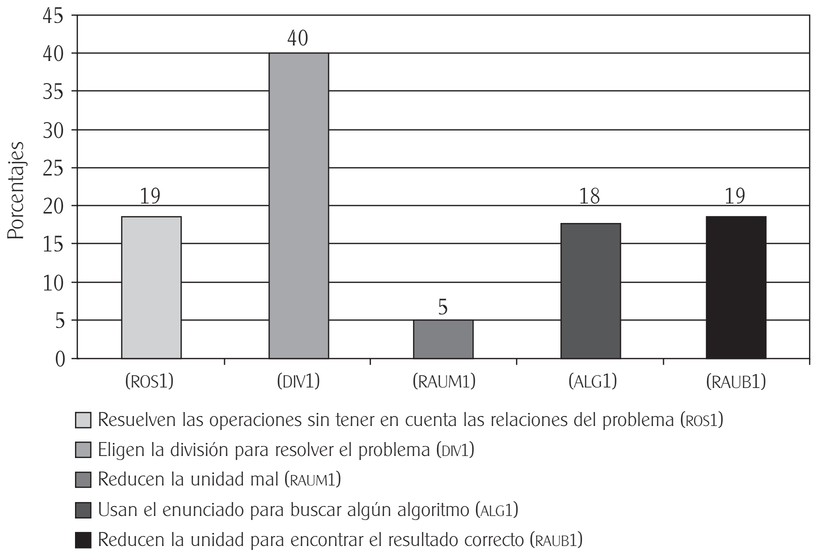
b) Resolución aritmética del problema 1 (RAR1)

La gráfica 3 muestra las cinco modalidades de la variable *Resolución aritmética del problema 1 (RAR1)*, sobre *N* =102 sujetos que eligieron este marco de resolución.

b.1) Resuelven operaciones sin tener en cuenta las relaciones del problema (ROS1)

La modalidad ROS1 (19%) identifica a los sujetos que realizaron operaciones de manera errática, sin tener en cuenta las relaciones del problema.

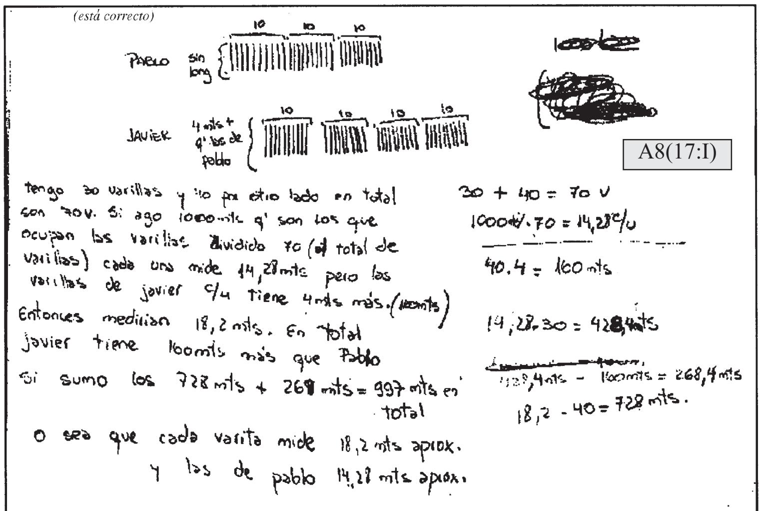
Gráfica 3 Resoluciones aritméticas del problema 1 (N = 102)

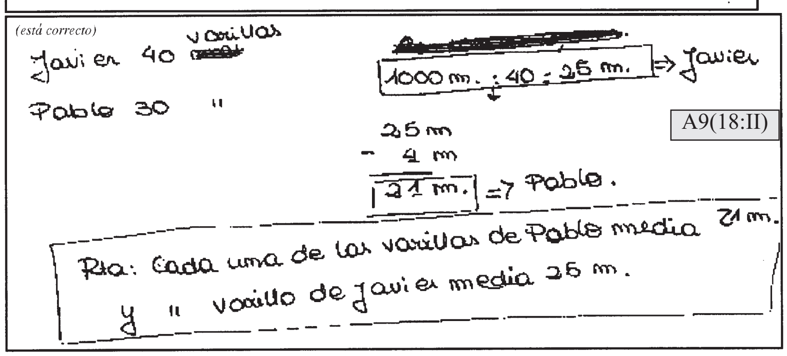


b.2) Eligen la división para resolver el problema (DIV1)

La modalidad DIV1, presente en 40% de los casos, identifica al más modesto de los modelos mentales que aparecen. Los sujetos no pueden establecer todas las relaciones del problema y su estrategia se basa en realizar una división. Para comenzar a resolver, consideran la longitud total (1 000 m) y luego dividen: algunos por el total de varillas (70) A8(17:I), otros, por las varillas de Javier (40) como en el caso de A9(18:II). Al resolver, no tienen en cuenta la diferencia entre ambas varillas, sólo al expresar el resultado (véase la página siguiente).

Es de destacar que A8(17:I) se encuentra entre las escasas producciones que utilizan diferentes marcos de resolución: verbal, pictórico y aritmético para un mismo problema. En este estudio, se ha encontrado a sujetos que emplearon el marco aritmético para un problema y el marco algebraico para el otro, pero no producciones mixtas para un mismo problema. El uso simultáneo de más de un marco es una característica de los "expertos"; en consecuencia, es una estrategia que hay que propiciar en el ámbito de la enseñanza secundaria.

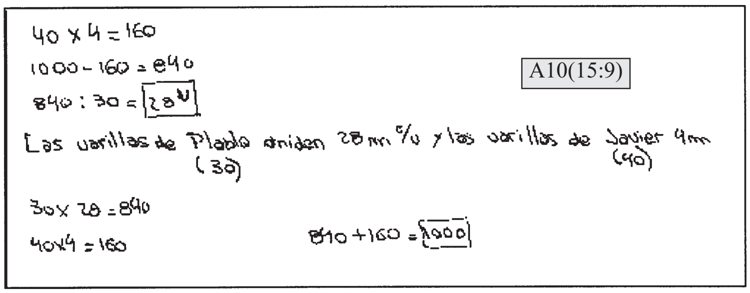




b.3) Reducen a la unidad mal (RAUM1)

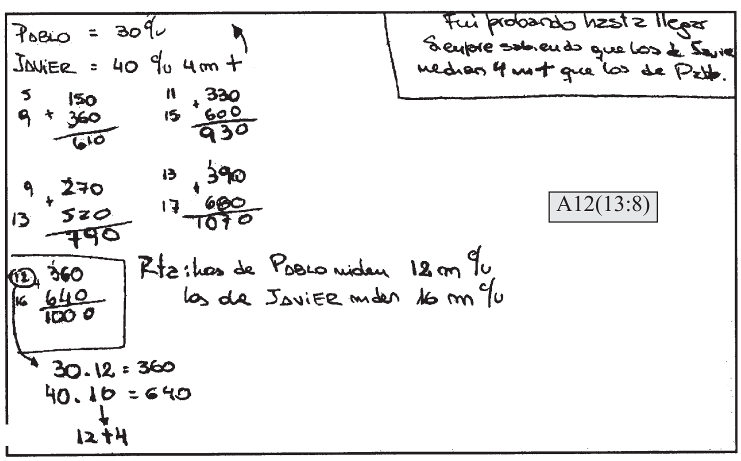
El segundo modelo que aparece se basa en la consideración de la diferencia entre las medidas de las varillas y en la estrategia de reducción a la unidad. Se ha diferenciado en las modalidades RAUM1 y RAUB1. En estos casos, los sujetos multiplican 4m ¥ 40 y restan el valor que resulta de la longitud total. La modalidad RAUM1, presente en 5% de los sujetos, se caracteriza por constituir una versión fallida de la estrategia de *Reducción a la unidad*, porque dividen por la cantidad de varillas de Pablo (30). Como se observa en el protocolo A10(15:9). La modalidad RAUM1 es similar al modelo construido por los sujetos en la modalidad *Ope-*

ran con ecuaciones mal formuladas (OCE1) como se observa en A4(16:II) y A5(15:9); las estrategias son las mismas que en A10(15:9) y en A9(18:II), lo que cambia es el marco utilizado.



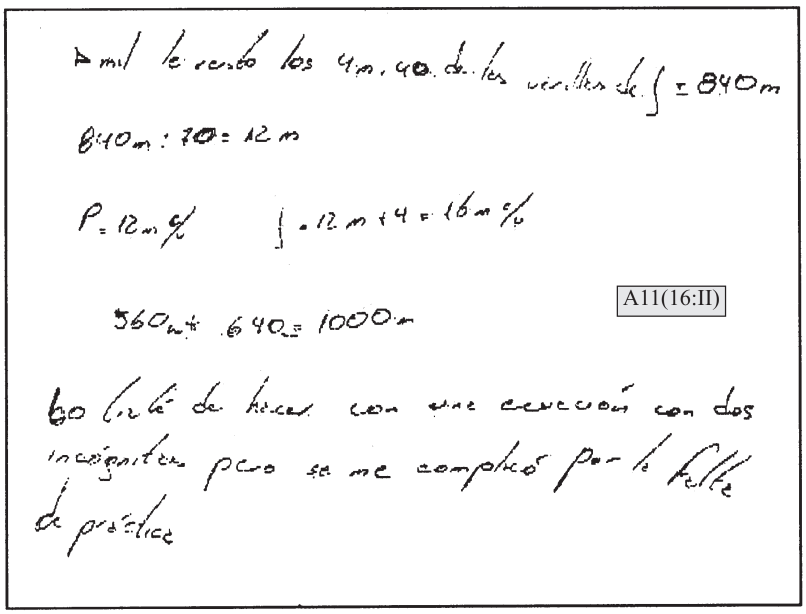
b.4) Usan el enunciado para buscar algún algoritmo (ALG1)

El modelo que corresponde a la modalidad ALG1 (18%) consiste en utilizar el enunciado como un algoritmo, el cual deriva en una estrategia iterativa. Los sujetos comienzan probando con dos números cuya diferencia es cuatro, multiplican por 30 y 40, respectivamente, y controlan los resultados, reiterando el proceso y deteniéndolo cuando la suma total da 1 000, como lo indica A12(13:8).



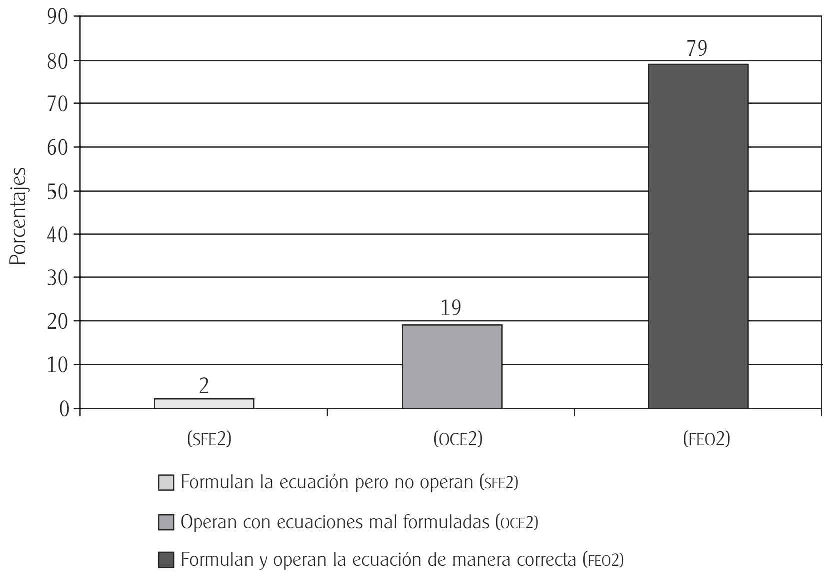
b.5) Reducen a la unidad para encontrar el resultado correcto (RAUB1)

Finalmente, la modalidad RAUB1 aparece en 19%. El procedimiento utilizado por los sujetos es comenzar de igual manera que la anterior (RAUM1), sólo que al dividir lo hacen por el total de varillas (70), reduciendo así a la unidad. Al resultado que obtienen le suman cuatro e indican que es la medida de la varilla de Javier. Además verifican el resultado. Los protocolos parecen mostrar que los sujetos, al no poder realizar una traducción literal del enunciado del problema en el marco algebraico, emplean el marco aritmético, teniendo en cuenta todas las relaciones del problema. Se observa que las relaciones que ejecutan los sujetos para resolver el problema son análogas a las realizadas en la modalidad algebraica FEO1. El protocolo de A11(16: II) manifiesta: "lo traté de hacer con una ecuación con dos incógnitas, pero se me complicó por la falta de práctica"; sin embargo, al no poder formular la ecuación, resuelve en el marco aritmético y llega al resultado correcto.



A11(16:II)

Gráfica 4 Resoluciones algebraicas del problema 2 (N = 52)

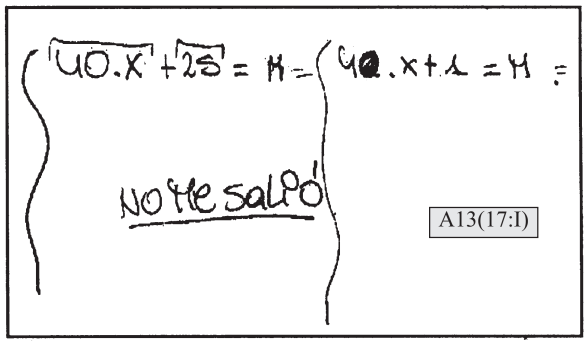


c) Resolución algebraica del problema 2 (RAL2)

Las modalidades de la variable *Resolución algebraica del problema 2 (RAL2),* como se observa en la gráfica 4, sobre un total de 52 sujetos que intentaron este marco, se distribuyen de la siguiente manera: 2% sólo formula la ecuación pero no opera; 19% de los sujetos formulan la ecuación sin tener en cuenta todas las relaciones del problema y operan sin verificar los resultados obtenidos; mientras que 79% de los sujetos formulan y operan de manera correcta y verifican el resultado. Como se puede observar en la gráfica 1, a pesar de ser menor la cantidad de sujetos que optan por la resolución algebraica (20%), los que lo hacen tienen un alto grado de competencia. Los siguientes protocolos representan las tres modalidades categorizadas.

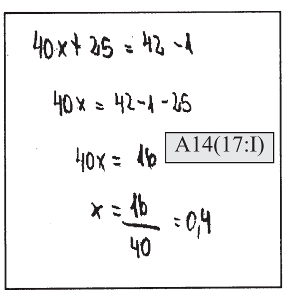
c.1) Sólo formulan la ecuación (SFE2)

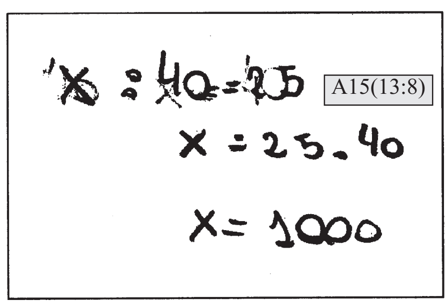
En la producción de A13(17:I), sujeto que cursa primer año del Polimodal, se observa que sólo formula la ecuación. Luego manifiesta "no me salió" y abandona su resolución.



c.2) Opera con ecuación mal formulada (OCE2)

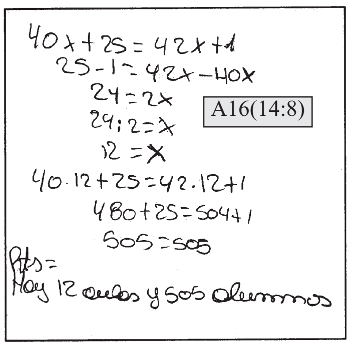
Esta modalidad, presente en 19%, se refiere a los sujetos que operan con ecuaciones mal formuladas, sin tener en cuenta todas las relaciones del problema. Al encontrar el conjunto solución no reflexionan sobre él, como se observa en A14(17:I) y A15(13:8):

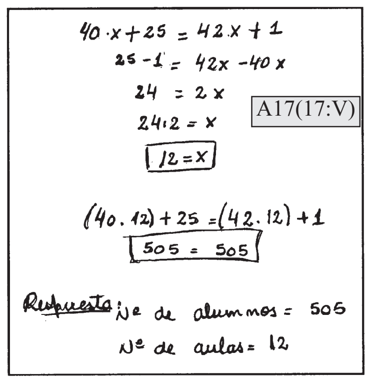




c.3) Formulan y operan la ecuación de manera correcta (FEO2)

En esta última modalidad, se encuentran los sujetos que ejecutan el modelo algebraico teniendo en cuenta todas las relaciones del problema. Presentamos aquí las producciones de A16(14:8), sujeto que cursa octavo año, mientras que A17(17:V) cursa quinto año. Como se observa en los protocolos, no se encuentran marcadas diferencias entre los sujetos que abordan el marco algebraico. El 79% de los 52 sujetos categorizados en esta modalidad evidencian una buena competencia algebraica.

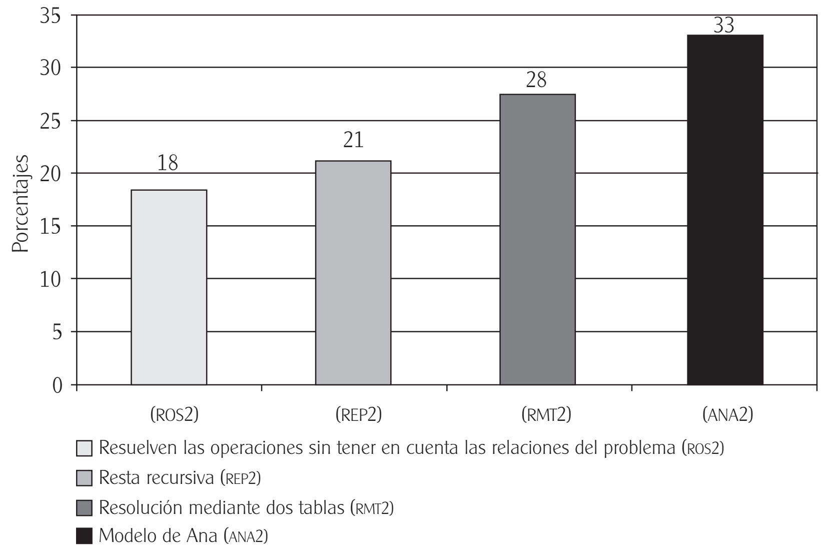




d) Resolución aritmética del problema 2 (RAR2)

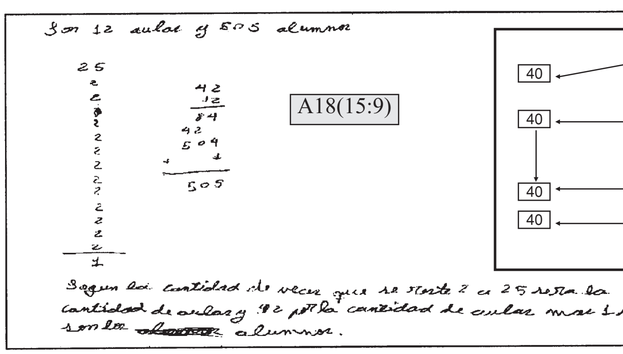
La variable *Resolución aritmética del problema* 2 (RAR2) y sus cuatro modalidades, *Resuelven operaciones sin tener en cuenta las relaciones del problema (ROS2), Resta recursiva (REP2), Resuelven mediante dos tablas (RMT2)* y *Modelo de Ana (RCE2),* se visualizan en la gráfica 5. Sólo 18% de los sujetos representado por la modalidad ROS2 resuelven operaciones sin tener en cuenta las relaciones del problema. Las tres modalidades restantes –REP2, RMT2 y RCE2– representan modelos mentales de diferente complejidad y obtienen en todos los casos la solución del problema.

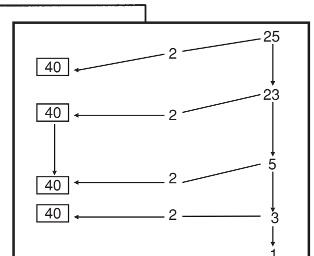
Gráfica 5 Resoluciones aritméticas del problema 2 (*N* = 109)



d.1) Resta recursiva (REP2)

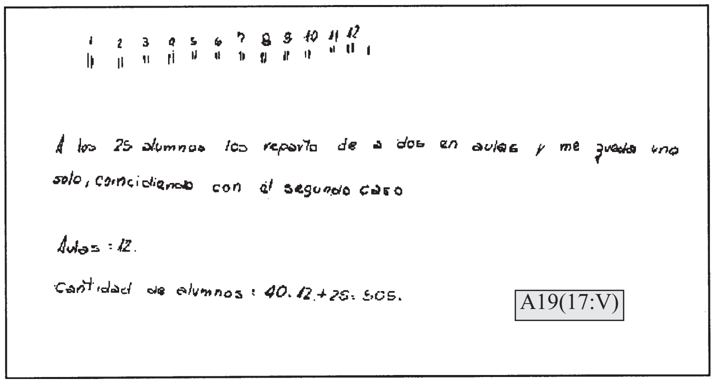
En la modalidad REP2 (18%), el modelo consiste en una resta recursiva para obtener el número de aulas, luego reemplazan y obtienen el número de alumnos como se muestra en el protocolo A18(15:9). El esquema 1 muestra la interpretación realizada por Otero (1998, 1999) del modelo utilizado.





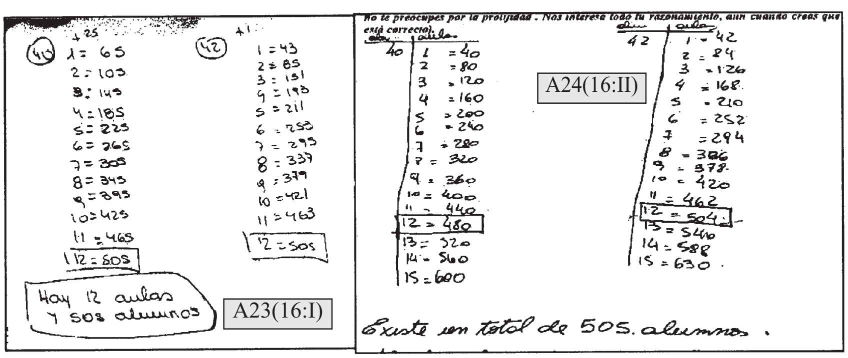
Esquema 1

Para A19(17:V), sujeto que cursa quinto año, señala con "barras paralelas" como ubicar a los 25 alumnos que le sobran y queda uno sin ubicar, como en el caso de A18(15:9), luego reemplazan para obtener la cantidad de alumnos.



d.2) Resolución mediante dos tablas (RMT2)

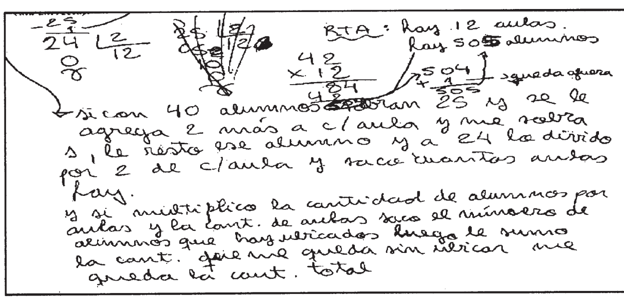
La modalidad RMT2 (28%) designa un modelo similar a un algoritmo que genera una tabla recursiva, donde la variable es el número de aulas. Algunos sujetos tienen en cuenta a los alumnos que quedan fuera del aula, como en el caso de A23(16:I). En cambio, en A24(16:II), parece que el control de la igualdad es realizado mentalmente, luego de verificar, se recuadra el resultado.



Se observa que esta estrategia aparece en los sujetos que cursan los últimos años de la escolaridad; posiblemente la instrucción y la mediación escolar tenga que ver con este tipo de resolución y organización de datos para resolver problemas.

d.3) Modelo de Ana (RCE2)

La modalidad RCE2 (33%) identifica un modelo que corrobora resultados anteriores y se representa en el esquema 2 (Otero, 1998, 1999). Este tipo de modelo se podría considerar como espacial, por la manera en que los sujetos parecen distribuir a los alumnos en las aulas. Lo que resulta muy interesante es que las operaciones realizadas remiten a la estructura de la ecuación algebraica. El esquema 2 es una interpretación presentada en Otero (1998, 1999) que en la actualidad está siendo empleada como representación en un marco pictórico intermedio, entre el discurso verbal del problema y la formulación algebraica. Se considera fundamental propiciar la utilización de este tipo de representaciones con los alumnos, porque servirán de enlace entre el marco aritmético y el algebraico. Los siguientes protocolos muestran el *Modelo de Ana:*


RTA: hay 12 aulas.
hay 505 alumnos
504 + 1 = 505 queda afuera
si con 40 alumnos sobran 25 y se le agrega 2 más a c/aula y me sobra 1, le resto ese alumno y a 24 lo divido por 2 de c/aula y saco cuantas aulas hay.
y si multiplico la cantidad de alumnos por aulas y la cant. de aulas saco el número de alumnos que hay ubicados luego le sumo la cant. que me queda sin ubicar me queda la cant. total

A20(14:8)

Según se observa, A20(14:8) resuelve en el marco aritmético y aporta la descripción verbal de su razonamiento. La resolución es correcta y posee las características que se interpretan en el esquema 2. En la sección referida a las resoluciones algebraicas se mostró el protocolo correspondiente a A16(14:8), quien también resuelve correctamente este problema. Ambos sujetos cursan octavo año de la EGB y tienen 14 años de edad, sus resoluciones conducen a la pregunta de la diferencia de marco utilizado. Resulta evidente que ambos poseen la competencia cognitiva requerida para comprender y manejar la complejidad del problema.

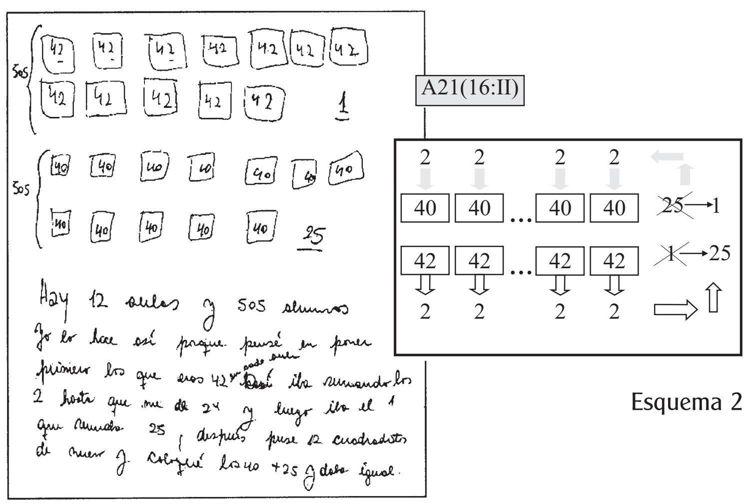
Entonces: ¿A qué se puede atribuir la diferencia? ¿Poseen estos sujetos niveles de comprensión diferentes? ¿Qué tiene uno de ellos que no posee o no actualiza el otro?

Parece claro que quien fue capaz de formular algebraicamente comprendió las características estructurales del problema, ya que no es posible obtener la formulación a partir de una "traducción literal". Se requiere tener en cuenta las características del "reparto" que se está efectuando y, al escribir una igualdad, también está claro que se reconoce la invariancia del total de alumnos. Además, se está en posesión de la técnica operatoria requerida y de la habilidad de verificar.

Por su parte, quien resolvió aritméticamente también captó las relaciones del problema, y lo hizo de manera sustantiva, como se refleja en su protocolo. La diferencia entre ambos es que la resolución algebraica requiere instrumentos y técnicas de transformación cuyo origen está lejos de ser espontáneo, además de la adecuada actualización de tales instrumentos frente a un problema dado.

El cuestionamiento de la supuesta espontaneidad, linealidad y simplicidad del proceso de adquisición de competencias algebraicas es una de las claves para modificar su tratamiento didáctico en el ámbito escolar.

El esquema 2 es una interpretación que refleja la estructura común a las resoluciones prototípicas de A20(14:8), A21(16:II) y A22(15:I).



Esquema 2

está correcto

ESOS DOS ALUMNOS SI SE LO MULTIPLICA POR UN NÚMERO QUE SU RESULTADO SEA CERCA DE 25 o 25 POR EJEMPLO 12 QUE DA 24. SI ANTES FALTABAN UBICAR 25 Y AHORA SE UBICARON 24 RESTA 1 COMO DICE EL PROBLEMA. ENTONCES HAY 12 AULAS.

LA CANTIDAD DE ALUMNOS ES IGUAL A 42 ALUMNOS POR AULA, POR 12 AULAS, MAS EL ALUMNO QUE SOBRA. ES IGUAL A 505 ALUMNOS

A22(15:I)

Existe una evidente proximidad entre la resolución de A21(16:II) y la estructura de la ecuación. Los grafismos del protocolo son equivalentes a la ecuación, faltaría escribir el objeto incógnita. Sin embargo, este salto cognitivo que emplea la noción de variable no es trivial, sino un proceso de largo aliento, al que contribuyen de manera esencial los diversos marcos que aparecen y la toma de conciencia metacognitiva entre lo que cada uno de ellos representa con relación al problema. La proximidad entre estos procedimientos y la modelación algebraica debe ser percibida por los profesores e institucionalizado para los alumnos, en pos de una comprensión del álgebra como *un instrumento al servicio del trabajo matemático* (Gascón, 1999).

El trabajo que se haga en el aula no puede ignorar la indudable riqueza cognitiva que se manifiesta en las resoluciones espontáneas de los alumnos; basadas en un instrumento en el que ellos son competentes, como la aritmética, y en la capacidad cognitiva de comprender y construir modelos mentales funcionales y efectivos del discurso de los problemas.

Tal como muestra la gráfica 4, las tres modalidades (REP2, RMT2 y RCE2) anteriormente analizadas representan 82% de los N =109 sujetos, que adoptan el marco aritmético y obtienen resultados correctos; mientras que sólo 18% resuelven operaciones sin tener en cuenta las relaciones del problema. Tomando en consideración ambos problemas, el referido a las aulas es abordado por un número menor de sujetos, tanto en el marco algebraico como aritmético, con resultados más favorables que los obtenidos para el problema de las varillas.

CONCLUSIONES

El análisis indica que, en un porcentaje elevado, los sujetos intentan algún tipo de solución orientada por los procesos estratégicos de comprensión del enunciado en cada uno de los problemas. Cuando la expresión del enunciado verbal en formulación algebraica requiere transformaciones más complejas, los sujetos emplean el marco aritmético, cuya ejecución encuentra elementos en la estructura cognitiva para desarrollar algún proceso de comprensión más o menos correcto. La ejecución del marco algebraico depende, entonces, de la existencia de información y conocimientos que provienen de la enseñanza.

Para el problema de las varillas, es menor el porcentaje de sujetos que llegan al resultado correcto, mientras que en el problema de las aulas los sujetos que lo intentan son más exitosos. Sin embargo, el primer problema intenta ser resuelto por un número mayor de sujetos, con resultados menos favorables. En cambio, para el problema de las aulas, las resoluciones correctas se encuentran en mayor proporción, aunque es mucho menor el número de sujetos que lo abordan.

Con respecto a los marcos empleados, el aritmético aparece en un porcentaje apenas inferior al algebraico para el problema de las varillas y, en el problema de las aulas, el marco aritmético es el que predomina ampliamente. Este resultado muestra que el sujeto dispone de estrategias cognitivas en ambos casos. La diferencia reside en que los modelos mentales que es necesario ejecutar para emplear el marco algebraico son más complejos y necesitan tener en cuenta las relaciones perceptibles del enunciado, además de las relaciones que es preciso controlar para expresar algebraicamente la información del problema. Algunas veces, estas estrategias no están disponibles en todos los sujetos, porque dependen de un trabajo didáctico adecuado y dirigido a la construcción de estrategias metacognitivas, así como del nivel de escolarización alcanzado. Otras veces, las competencias pueden estar y no ser actualizadas en el proceso de comprensión.

Sin embargo, los sujetos que resuelven con modelos aritméticos comprenden y resuelven aun cuando se controlen los parámetros, pensando en obstaculizar las resoluciones aritméticas. La clave no parecería encontrarse allí, sino en buscar ayudas que le permitan al sujeto manejar cognitivamente, en la memoria de corto plazo, las relaciones requeridas para la modelización. Una de estas ayudas podrían ser los esquemas. Además, las estrategias de modelación son de carácter metacognitivo y requieren un proceso de explicitación que no es natural ni espontáneo sino producto del aprendizaje. Un aspecto esencial de este proceso consiste en conocer los modelos espontáneos de los alumnos y trabajar a partir de ellos, en lugar de ignorarlos.

Está claro que los alumnos tienen que aprender a usar estrategias algebraicas en la escuela y, para ello, deben hacer evolucionar sus modos espontáneos de resolución. Para que un alumno pueda llegar a ser un usuario competente del sistema matemático de signos del álgebra se necesita que sea competente en otros sistemas de signos menos abstractos, como son el sistema de signos aritméticos y otros sistemas de signos intermedios (Filloy, 1999). También coincidimos con Gascón (1999) en que, para conseguir una algebrización de la matemática en el ámbito de la enseñanza secundaria, habría que modificar *los objetivos de corto plazo,* en *objetivos de largo plazo,* porque este aprendizaje no es inmediato.

Desde la didáctica, se propicia el *juego de marcos* (Douady, 1984) en la búsqueda de soluciones para un problema, los diferentes marcos: aritmético, verbal o pictórico, serían disparadores de la construcción de los conocimientos algebraicos. En este estudio, se observa que los sujetos siguen un mandato escolar e intentan resolver en el marco algebraico. Como no lo consiguen, pasan a otro para elaborar la solución. A través de este proceso se manifiesta la profundidad, riqueza y la sutileza del pensamiento de los estudiantes.

La enseñanza debería proponer el uso e integración de las diferentes formas de representación en la resolución de problemas, teniendo en cuenta que cada forma de representación expresa y pone en juego aspectos y estrategias particulares. El álgebra proporciona un modo de apropiarse de la estructura de los problemas que proviene de una elaborada construcción en la que la instrucción y la mediación escolar tienen un papel protagónico que desempeñar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cedillo Ávalos, T. (1999), *Desarrollo de habilidades algebraicas,* México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard, Y. (1989a), "Le passage de l'arithmetique a l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au college", *Petit X,* núm. 5, pp. 51-94.

—— (1989b), "Le passage de l'arithmetique a l'algèbre dans l'enseignement des mathèmatiques au college", segunda parte, *Petit X,* núm. 19, pp. 43-75.

—— (1990), "Le passage de l'arithmetique a l'algèbre dans l'enseignement des mathèmatiques au college", tercera parte, *Petit X,* núm. 29, pp. 5-38.

Cortes, A., N. Kavafian y G. Vergnaud (1990), "From Arithmetic to Algebra: Negotiating a Jump in the Learning Process", México, Actas de la 14ª Conferencia PME, vol. II, pp. 27-34.

Douady, R. (1984), "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", *Cahier de Didactique,* núm. 3, París 7.

Drouhard, J. P. (1992), *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire,* Tesis doctoral, Universidad Denis Diderot, París 7.

Elichiribehety, I. y C. Papini (1995), "Los procedimientos algebraicos en la resolución de problemas", ponencia presentada en la XLV Reunión Anual de Unión Matemática Argentina y en la XVIII Reunión de Educación Matemática, Río Cuarto, Córdoba, 16 al 20 de octubre, p. 55.
Filloy Yagüe, E. (1993), "Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del Álgebra y de la Geometría", *Enseñanzas de las ciencias*, vol. 11, núm. 2, pp. 160-166.
—— (1999), *Aspectos teóricos del álgebra educativa,* Grupo Editorial Iberoamérica.
Gascón, J. (1985), "El aprendizaje de la resolución de problemas de planteo algebraico", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 3, núm. 1, pp. 18-27.
—— (1989), *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas,* Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.
—— (1993), "Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguajes algebraico", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, vol. 13, núm. 3, pp. 295-332.
—— (1994), "Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée", *Pitet X*, núm. 37, pp. 43-63.
—— (1999), "La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar", *Educación Matemática,* vol. 11, núm. 1, pp. 77-88.
Grupo Azarquiel (1993), *Ideas y actividades para enseñar álgebra,* Madrid, Síntesis.
Greca, I. M. (1995), *Tipos de representações mentais-modelos, proposições e imagens utilizadas por estudantes de física geral sobre o conceito de campo eletromagnético*, Curso de Pós-Graduação em Física-UFRGS, Diss. mestr. Física.
Greca, I. M. y M. A. Moreira (1996a), "The Kinds of Mentals Representations –Models, Propositions and Images– Used by College Physics Students Regarding the Concept of Electromagnetic Field", *International Journal of Science Education,* vol. 19, núm. 6, pp. 711-724.
—— (1996b), "Tipos de modelos mentales utilizados por físicos en actividad", en *Simposio de Investigadores en Enseñanza de la Física,* núm. 3, Córdoba, Actas del SIEF, Universidad Nacional de Córdoba, 10 p.
—— (1998), "Modelos mentales y aprendizaje de física en electricidad y magnetismo", *Enseñanza de las Ciencias,* Barcelona, vol. 16, núm. 2, pp. 289-303.

Greca, I. M. y M. A. Moreira (2000), "Mental Models, Conceptual Models, and Modelling", *International Journal of Science Education,* Londres, vol. 22, núm. 1, pp. 1-11.

Hebert, E. (1991), *"Les Oeufs", Entretiens sur la modelisation algebrique en classe de seconde",* DEA, de Didactique des Mathèmatiques, Universidad París VII.

Johnson-Laird, P. (1983), *Mental Models,* Cambridge, Cambridge University Press.

—— (1990a), "Mental models", en M. Posner, (ed.), *Foundations of Cognitive Science,* Cambridge, MIT Press, pp. 469-499.

—— (1990b), *El ordenador y la mente,* Barcelona, Paidós.

—— (1996), "Images, Models, and Propositional Representations", en Manuel de Vega, Margaret Jean Intons Peterson, Philip Johnson-Laird, Michel Denis y Marc Marschark, *Models of Visuospatial Cognition,* Nueva York y Oxford, Oxford University Press, pp. 90-126.

Kieran, C. y E. Filloy Yagüe (1989), "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 7, núm. 3, pp. 229-240.

Macgregor, M. y K. Stacey (2000), "Incógnitas con valores cambiantes y múltiples referentes en el álgebra de alumnos", *Educación Matemática,* vol. 12, núm. 3, pp. 30-40.

Meavilla Segui, V. (1995), "Estudio sobre el comportamiento visual en álgebra de los alumnos del segmento educativo, 14-16", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 13, núm. 1, pp. 97-105.

Moreira, M. A. (1996), "Modelos mentais. Investigações em Ensino de Ciencias", *Porto Alegre,* vol. 1, núm. 3, pp. 193-232, disponible en Internet: http://www.if.ufrgs.br/ public/ensino/revista.htm.

Moreira, M. A. y M. do C. B. Lagreca (1998), "Representações mentais dos alunos em mecânica clássica: três casos", Investigações em Ensino de Ciências, *Porto Alegre,* vol. 3, núm. 2, pp. 83-106, disponible en Internet: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm.

Otero, M. R. (1999), "Psicología cognitiva, representaciones mentales y enseñanza de las ciencias", artículo invitado, *Revista Investigcoes em Ensino de Ciências,* Instituto de Física, Universidad Federal de Rio Grande do Sur, Porto Alegre, Brasil, http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol4/n2/v4_n2_a2.htm.

Otero, M. R., M. C. Papini e I. Elichiribehety (1998a), "Las representaciones mentales y la resolución de un problema: un estudio exploratorio", *Revista Investigações em Ensino de Ciências,* Instituto de Física, Universidad Federal de Rio Grande do Sur, Porto Alegre, Brasil, disponible en Internet: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol3/n1/7indice.htm.

Otero, M. R., M. C. Papini e I. Elichiribehety (1998b), "Las representaciones mentales y la Enseñanza de la Matemática", *Educación Matemática,* vol. 10, núm. 3, pp. 90-102.

Otero, M. R. y L. Banks Leite (1998c), *Buscando modelos mentales,* Disertación de Maestría, Facultad de Ciencias Humanas, UNICEN-UNICAMP, 243 pp.

Otero, M. R y M. A. Moreira (1999), "Representaciones mentales y significados en el aprendizaje de la física", Proyecto de tesis de doctorado, presentado en el marco del Programa Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad de Burgos, España.

Rodríguez Palmero, M. L. (2000), *Modelos mentales de célula: Una aproximación a su tipificación con estudiantes de COU,* Tesis doctoral, La Laguna, Tenerife, España.

Rojano, T. (1994), "La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de Investigación y Enseñanza", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 12, núm. 1, pp. 45-56.

Schwartz, D. y J. Moore (1998), "On the Role of Mathematics in Explaining the Material World: Mental Models for Proportional", *Cognitive Science,* vol. 22, núm. 4, pp. 471-546.

Van Dijk, T. A. (1992), *Cognição, Discurso e Interação,* São Paulo, Contexto.

Vosniadou, S. (1994), "Capturing and Modeling the Process of Conceptual Change", *Learning and Instruction,* vol. 4, pp. 45-69.

DATOS DE LAS AUTORAS

Inés Elichiribehety
Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA,
Buenos Aires, Argentina
ielichi@exa.unicen.edu.ar

María Rita Otero
Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA,
Buenos Aires, Argentina
rotero@exa.unicen.edu.ar

www.santillana.com.mx/educacionmatematica