Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Contreras de la Fuente, Ángel; Luque Cañada, Lorenzo; Ordóñez Cañada, Lourdes

Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo

Educación Matemática, vol. 16, núm. 1, abril, 2004, pp. 59-87
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo

Ángel Contreras de la Fuente, Lorenzo Luque Cañada
y Lourdes Ordóñez Cañada

Resumen: Este trabajo se basa en el juego de contextos (Douady, 1991) y en las traducciones entre registros de representación semiótica (Duval, 2000). En él, se propone un problema típico sobre máximos que se resuelve según diversos contextos y acudiendo a los tratamientos y conversiones. Los objetivos que se plantean son varios. En primer lugar, efectuar un análisis crítico de las herramientas que emplean los alumnos y mostrar los cambios que se establecen entre los distintos sistemas de representación semiótica. En segundo lugar, ofrecer métodos que dotaran a la optimización de sentido, independizándola del cálculo diferencial.

Palabras clave: investigación en educación matemática, cálculo, representaciones semióticas, máximos.

Abstract: This study is based on the contexts game (Douady, 1991) and the translations between registers of semiotic representation (Duval, 2000). A typical problem of maximum is proposed and is solved according to several contexts using processing and conversion. The suggested objectives are several. First, to make a critical analysis of tools used by students and to display the changes established between systems of semiotic representation. Second, to offer methods that will give sense to optimization, making it independent from differential calculus.

Key words: mathematics education research, calculus, semiotics representations, maxima.

A lo largo de la historia se ha debatido cuáles eran las conexiones exactas entre el pensamiento, el lenguaje y la acción. Aunque puede distinguirse entre estos tres procesos, están tan estrechamente entrelazados que se hace difícil trazar las fronteras. La facultad de usar el lenguaje no sólo para comunicar, sino para planificar y dirigir las acciones futuras está en el meollo mismo de la humanidad.

John J. Ratey, *El cerebro: manual de instrucciones*

INTRODUCCIÓN

En un trabajo ya clásico en la Didáctica de las Matemáticas (Artigue, 1990, p. 247), al analizar el papel de la epistemología en la Didáctica de las Matemáticas, se señala:

> ...la misión del especialista en didáctica... consiste en construir los marcos teóricos que permiten el trabajo en cuestiones de ingeniería didáctica y la capitalización de las adquisiciones (experiencias) didácticas. Desde mi punto de vista... los conceptos de dialéctica herramienta/objeto y juego de contextos, elaborados por R. Douady... son precisamente construcciones que responden a estas necesidades.

Por ello, consideramos que este marco teórico, basado en las ideas de Doaudy, una vez refinado y complementado con la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 1996, 2000), puede ser de utilidad para abordar aspectos relacionados con la Didáctica de las Matemáticas.

Según Douady (1991), el conocimiento matemático presenta una doble dimensión. En primer lugar, saber matemáticas es tener la disponibilidad de ciertas nociones y teoremas matemáticos que nos sirvan como herramientas para resolver problemas, interpretar nuevas cuestiones... Desde esta perspectiva, dichas nociones y teoremas adquieren el estatus de útil, aunque dichos útiles han de inscribirse en un determinado contexto, siendo las situaciones-problema las que permiten la evolución de las nociones matemáticas y, por tanto, serán generadoras de significado para dichas nociones. En segundo lugar, una vez que la noción matemática dada ha funcionado como útil en la resolución de determinados problemas –es decir, cuando el estudiante ha contextualizado el conocimiento–, es el momento de institucionalizar dicho conocimiento identificando definiciones, propiedades, teoremas y sus demostraciones, hasta su descontextualización, pasando la noción del estatus de útil al de objeto de conocimiento. Posteriormente, se aplicará el conocimiento a nuevos contextos, lo que exigirá nuevas contextualizaciones.

Sin embargo, cuando se analizan los problemas únicamente por medio de los contextos de representación, sin tener en cuenta los diversos sistemas de representación semiótica presentes en dichos contextos, se observa que los análisis carecen de la profundidad que la semiótica es capaz de dotar a los mismos. Duval (1996), al estudiar los sistemas de representación semiótica, distingue entre contexto y registro de representación semiótica, al señalar (p. 357):

> Un registro se determina en relación con un sistema semiótico que ha de cumplir las tres funciones cognitivas de comunicación, tratamiento y objetivación. Un contexto, en cambio, se determina en relación con objetos teóricos, en este caso matemáticos. Se puede cambiar de contexto sin cambiar de registro y cambiar de registro sin hacerlo de contexto, pues un contexto puede movilizar varios registros.

Radford (2002b, p. 51) matiza lo anterior, al señalar: "El paso del significado perceptual al abstracto se asegura mediante diferentes sistemas semióticos". Es decir, todo cambio de contextos lleva asociado unos cambios dentro y entre sistemas semióticos de representación, de tal modo que el juego de contextos permite una contextualización variada de los objetos matemáticos, donde la aprehensión conceptual de ellos únicamente puede darse mediante la actividad y ésta, aunque se movilice hacia la noción como útil o como objeto de conocimiento, sólo puede materializarse mediante las representaciones semióticas.

En este trabajo, que se basa en el juego de contextos (Doaudy, 1991) y en los cambios entre sistemas de representación semiótica (Duval, 2000), se propone un problema típico sobre máximos, que se resuelve según diversos contextos y acudiendo a la operación de conversión –"que no es trivial ni cognitivamente neutra" (Duval, 1995, p. 19)– entre dichos sistemas; al ofrecer diferentes métodos de resolución, se dotará a la optimización de sentido, pudiéndola independizar inicialmente del cálculo diferencial. Esto permitirá contemplar dicha noción como objeto de conocimiento en sí misma y el cálculo como una herramienta que surge como necesaria y complementaria de otras.

Por otra parte, nuestra dilatada experiencia como profesores de educación secundaria y universitaria nos permite contemplar la construcción del conocimiento como un complicado compendio de procesos en el que subyace la no linealidad de tal construcción. El individuo puede utilizar caminos de tipo geodésico, no predeterminados, pero casi nunca de carácter lineal. De aquí que seamos críticos con las afirmaciones sobre el saber matemático que estimen a éste como un absoluto. Radford (1999a, pp. 4-89) tiene en cuenta este problema, al señalar: "...los modos de simbolización no se consideran como aculturales, como procesos ya elaborados". Es decir, en cuanto a los cambios entre sistemas de representación, nos preguntamos: ¿emerge el conocimiento mediante la coordinación de las conversiones entre registros de sistemas de representación semiótica, tal y como plantea Duval?, ¿la coordinación supone una fluidez de paso entre sistemas de representación?, ¿no está más bien ligada al uso de dichos sistemas?

LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA. ESTUDIO CRÍTICO

Duval (2000) afirma que, para poder estudiar la complejidad de los conocimientos matemáticos, hay que tener en cuenta dos cuestiones básicas:

1) La diversidad epistemológica y semiótica de los objetos matemáticos a enseñar.
2) El grado de profundidad necesario para la adquisición de los conceptos implicados.

Aunque, en relación con este segundo aspecto, puntualiza:

> ... el aprendizaje de las matemáticas no consiste, en principio, en una mera elaboración de conceptos por los estudiantes, sino en la construcción de la arquitectura cognitiva de un dominio epistemológico. Lo que está en juego en la educación matemática, a través de la adquisición particular de contenidos, es dicha construcción de la arquitectura, porque ésta crea habilidades futuras en los estudiante, además de enseñarles a aprender y entender de forma comprensiva (Duval, 2000, p. 66).

Teniendo en cuenta lo anterior, en nuestra investigación creemos necesario desarrollar una primera etapa de formulación de hipótesis sobre la arquitectura cognitiva del pensamiento, que Duval centra en la semiótica propia de la actividad con los objetos matemáticos, por medio del estudio de los registros de representación semiótica, es decir, de los signos y sus interrelaciones. Si bien coincidimos con Radford (1999b, p. 42) cuando afirma: "...el pensamiento no está dentro de la mente o debajo del cuero cabelludo, sino que está externamente distribuido en el diálogo, en los signos-figuras sobre el papel y el lápiz", consideramos que un paso a dar, previo a la experimentación y a la constatación posterior de resultados, es efectuar previamente[1] un análisis de la semiótica presente en la matemática institucional, entendida como los sistemas de prácticas socialmente compartidos por la institución de referencia, en este caso, por los investigadores del grupo de investigación al que pertenecemos. Como señala Bloch (1999, p. 154): "...pero este análisis *(a priori)* no sustituye al trabajo efectivo en clase, es solamente un útil indispensable para que dicho trabajo pueda tener lugar".

Puesto que la emergencia del objeto es básica para la conceptualización del conocimiento matemático, surge la siguiente cuestión: ¿cómo conseguir tal emergencia? Duval concede a la conversión entre representaciones uno de los papeles básicos en cuanto a la construcción de los procesos de pensamiento matemático: "Por medio de la conversión vamos hacia el 'núcleo' del aprendizaje de los problemas matemáticos" (Duval, 2000, p. 67).

Sin embargo, aparecen algunas cuestiones teóricas de indudable repercusión en el desarrollo de esta teorización. En primer lugar, algunos estudios de Radford (2000 y 2002a) muestran que, salvo en el caso de expertos, en los estudiantes no se da la conversión entendida como comercio entre dos registros, esto es, como paso de un registro semiótico a otro, sino una coordinación de dos o más registros en los que, en lugar de conversión, más bien hay una intensificación de uno o dos de ellos, quedando los demás activos, aunque funcionado con menos intensidad. En segundo lugar, de dichos trabajos puede desprenderse también que lo anterior ocurre porque, en la teoría de los registros de representación semiótica, el registro no tematiza la noción semiótica de sentido. Es decir, se puede hablar de sentido de los signos de un registro determinado y de los sentidos de los signos en otro registro, pero no parece poder hablarse de transformación de los sentidos.

Este cuestionamiento teórico de la conversión conduce a plantearse un interrogante al que hay que dar respuesta: si, por una parte, la realidad del aula nos dice que la coordinación entre conversiones no consiste en transformaciones de

[1] Hay que tener en cuenta que este trabajo es parte de uno más amplio que están desarrollando los autores de este artículo y en el que se incluyen las etapas necesarias de experimentación, cuyos resultados serán contrastados con los estudios de carácter teórico de la investigación.

tipo lineal de unos registros en otros y que, en lugar de ésta, se dan usos intensificados de ciertos registros; y si, por otra parte, las transformaciones entre registros son conflictivas debido al problema de la conservación del sentido, ¿qué podemos decir, entonces, respecto a los cambios entre registros, dado el hecho constatable de que al resolver una tarea matemática y utilizar un registro y posteriormente otro, algún tipo de coordinación habrá de darse entre ambos?

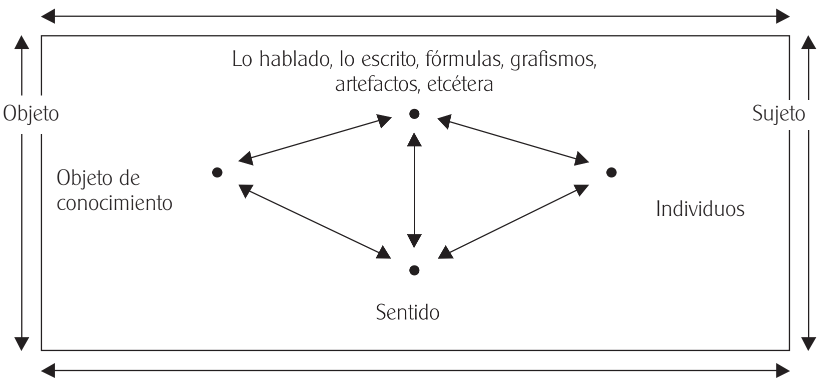
Consideramos que una respuesta la podemos encontrar en la idea de congruencia o no congruencia entre registros.[2] En general, la conversión entre registros presenta poca dificultad si entre ambos hay congruencia de unidades significantes. En cambio, si no se da la congruencia, simplemente no se da la conversión entre registros y entonces la coordinación habrá que buscarla en la identificación de uso de los mismos. Es decir, la complejidad cognitiva de la conversión es irreducible en el sentido de que los fenómenos de no congruencia son inherentes a la propia matemática y permiten explicar la posible carencia de coordinación entre registros de representación semiótica, siendo, por tanto, muy importantes en la naturaleza del conocimiento matemático. Como subraya Duval (2000, p. 63): "Los fracasos o incluso los obstáculos mentales, cuando la conversión no es congruente, revelan una carencia de coordinación entre los registros". Por otra parte, Radford (2002b, p. 34), al investigar la naturaleza de la actividad prealgebraica en los alumnos, puntualiza:

> Es especialmente difícil para los estudiantes no expertos realizar las conversiones en los casos donde las expresiones en lenguaje natural no se pueden traducir directamente a expresiones simbólicas debido a la diferencia en las sintaxis entre ambos sistemas –es lo que Duval denomina el problema de congruencia o no congruencia (de registros) y para lo cual he propuesto un término más complejo de *vectorial direction* (Radford, 1992).

Para poder dar respuesta a la cuestión planteada con el sentido, definimos la objetivación como la toma de conciencia de la transformación de un objeto matemático, que está siendo tratado como herramienta en una determinada actividad, en objeto de conocimiento, lo cual, en matemáticas, se produce mediante la actividad semiótica del sujeto. Esto supone dar al sentido un estatus de mediador entre el objeto y el conocimiento subjetivo que se materializa mediante lo hablado, lo escrito, las fórmulas, los grafismos, los artefactos... Es decir, unas for-

[2] Se entiende que hay congruencia entre registros cuando se da correspondencia uno a uno entre unidades signficantes (Duval, 1995, p. 46).

mas culturales de significación. Un esquema clarificador, propuesto por Radford (2002a), es el siguiente:



Es decir, el sentido hay que estudiarlo mediante los registros de representación semiótica, por lo que habrá que formular hipótesis sobre el sentido que se da a las diversas representaciones semióticas.

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Teniendo en cuenta el estudio anterior, el análisis de la actividad matemática, en cuanto a los registros de representación semiótica, se plantea de la forma siguiente:

a) Se sitúa el problema por estudiar en el contexto correspondiente, resolviéndolo de manera que se sigan las reglas y métodos de dicho contexto.
b) Se formula la hipótesis sobre la arquitectura cognitiva del pensamiento asociada a la resolución del problema, teniendo en cuenta los registros de representación semiótica.
c) Se determinan y analizan las posibles no congruencias en cuanto a las conversiones entre registros de representación semiótica que se consideren relevantes de cara a los cambios de sentido, formulándose hipótesis sobre los tratamientos y los sentidos.

LOS MÁXIMOS, EL JUEGO DE CONTEXTOS Y LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Nos centraremos en el estudio de un concepto muy conocido pero importante, como es el del máximo de una función. Consideramos que una modelización de los modos de pensamiento aritmético, algebraico, funcional e infinitesimal, basada en el funcionamiento y las interrelaciones entre los contextos y los registros semióticos, describe la complementariedad, muchas veces implícita pero real, entre dichos modos de pensamiento. Como afirma Hitt-Espinosa (1998, p. 10): "Los registros de representación semiótica tiene una gran importancia en la adquisición de conceptos matemáticos. Éstos se construyen a partir de la articulación de diferentes registros y de imágenes mentales asociadas a sus representaciones".

Mostraremos cómo, al dar solución a un determinado problema clásico, surgen diversos contextos y sistemas de representación semiótica que permiten dar una explicación armónica de los diversos cambios de unos modos de pensamiento a otros. Una aportación interesante, citada anteriormente, relacionada con la enseñanza del cálculo y las representaciones semióticas es la de Hitt-Espinosa (1998), que realiza una investigación sobre los sistemas semióticos de representación acerca del concepto de función, siguiendo la hipótesis de Duval (2000) de la comprensión integrativa de un contenido conceptual y la coordinación de los registros de representación. Otras investigaciones, de marcos teóricos distintos pero de algún modo fronterizos, son las de Campos Estrada (1999) y Campos y Balderas (2000). En el primer caso, basándose en las aportaciones de Janvier (1978, 1987) y Dreyfus (1991) sobre representación y de Schoenfeld (1985, 1992) y Hiebert y Carpenter (1992) sobre resolución de problemas, se realiza un análisis acerca de las respuestas de los alumnos ante un problema de optimización, según el modelo MAP. En el segundo caso, los autores utilizaron diversas formas de representación de la derivada, según los planteamientos de Dreyfus (1991) y Harel y Kaput (1991).

Específicamente, el estudio de los máximos de los perímetros y áreas de superficies planas aportan un conjunto de problemas que permiten un juego de contextos –geométrico, numérico, algebraico e infinitesimal– y de sistemas de representaciones semióticas que facilitan la movilización de herramientas de gran interés en los problemas matemáticos intercontextos.

Un problema sobre máximos

Como muestra de la riqueza epistemológica del juego de contexto y los cambios de representación semiótica, se utilizarán las ideas de máximo, perímetro y área de figuras planas. Comenzaremos enunciando el problema para, posteriormente, situarlo en diversos escenarios matemáticos donde se destacarán las diferentes herramientas empleadas.

Se propone la justificación del siguiente problema:

> *Problema 1: "De todos los rectángulos isoperimétricos, el cuadrado tiene la mayor área."*

Se verán a continuación algunos de los diversos contextos y registros semióticos que surgen al resolver este problema, así como las herramientas que se ponen en juego.

Contexto geométrico

a) Resolución

Este contexto tiene su justificación teórica en la geometría de Euclides.

Partimos de rectángulos de lados variables AB y AD (figura 1).

Como los rectángulos tienen el mismo perímetro, la suma de los lados es constante: $AB + AD = k$. Cuando la figura sea un cuadrado se tendrá que: $AB = \frac{k}{2}$ y $AD = \frac{k}{2}$.

Figura 1

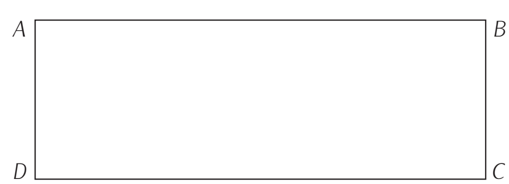
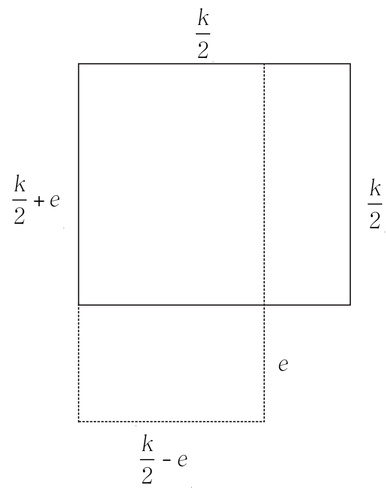


Figura 2



Si ahora consideramos cualquier rectángulo, sus lados serán: $\frac{k}{2}+e$ y $\frac{k}{2}-e$. El área del rectángulo será: $\left(\frac{k}{2}+e\right)\left(\frac{k}{2}-e\right)$, según la definición implícita de multiplicación que subyace en la proposición 1 del libro II de Euclides (Puertas, 1999, p. 266). Como se sabe, este producto es igual a $\frac{k^2}{4}-e^2$, que se deduce de la proposición 5 del citado libro (p. 272); luego, el área de cualquier rectángulo será: $A=\frac{k^2}{4}-e^2$, que será máxima si $e=0$. Es decir, el área máxima corresponde al cuadrado de lado $\frac{k}{2}$ (figura 2).

Las herramientas utilizadas corresponden a la geometría de Euclides que aparecen en el libro II.[3] Allí, el producto de dos segmentos es el área de una figura rectangular cuyos lados son los factores de dicho producto. Además, en algunos de los teoremas del libro se justifica la identidad:

[3] En el libro II de Euclides se establecen las bases de una aritmética geometrizada –el número *a* es un segmento de medida *a*; el producto de $a \cdot b$ es el rectángulo de lados los segmentos *a* y *b*–. Posteriormente, en el siglo XVII Descartes creará una geometría aritmetizada.

$$\left(\frac{k}{2}+e\right)\left(\frac{k}{2}-e\right)=\frac{k^2}{4}-e^2$$

El área máxima tiene su justificación en el axioma de la geometría euclideana de "la parte es menor que el todo". Es decir, $\frac{k^2}{4}-e^2$ siempre será menor que $\frac{k^2}{4}$.

Por otro lado, la resolución de este problema geométrico constituye un ejemplo de cómo utilizar la historia de las matemáticas en la resolución de problemas, en este caso con el libro II de los Elementos de Euclides, lo cual facilita al alumno una contextualización adecuada de la epistemología de las matemáticas. Como señala Radford (1997, p. 32): "...la historia de las matemáticas tiene mucho que ofrecer a la epistemología de las matemáticas. De hecho, los análisis histórico-epistemológicos pueden darnos información interesante sobre el desarrollo del conocimiento matemático dentro de una cultura".

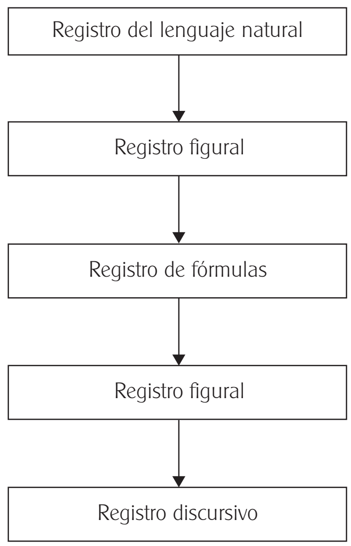
b) Arquitectura cognitiva asociada a la resolución

Al analizar este problema desde la perspectiva de los sistemas de representación semiótica, hay que tener en cuenta que el contexto en el que nos movemos es el geométrico, entendiendo por contexto: "un conjunto constituido por objetos de una rama de las matemáticas, las relaciones entre objetos, sus formulaciones eventualmente diversas y las imágenes mentales asociadas a estos objetos y sus relaciones" (Pihoue, 1996, p. 7). Aunque un contexto geométrico puede movilizar simultáneamente varios registros, no hay registro geométrico.

Los tratamientos y conversiones dentro y entre sistemas de representación son continuos y están dirigidos por el razonamiento que se utiliza al resolver el problema planteado. Es decir, los cambios entre registros figurales y discursivos han de efectuarse de manera interactiva y sincronizada. Como afirma Duval (1995, p. 173): "La originalidad de los procesos en geometría, en contraste con otras formas de actividad matemática, tiene que ver con que es absolutamente necesaria la coordinación entre los tratamientos específicos al registro de las figuras y los del discurso teórico en la lengua natural". El modelo de arquitectura cognitiva de pensamiento aparece en la figura 3.

El enunciado del problema utiliza el lenguaje vernáculo que, en el libro de texto, lógicamente viene dado con términos geométricos.

Figura 3



Del sistema de representación anterior se pasa al geométrico sintético figural. Por tanto, hay una conversión.

Posteriormente, se da otra conversión al sistema de representación geométrico sintético con fórmulas.

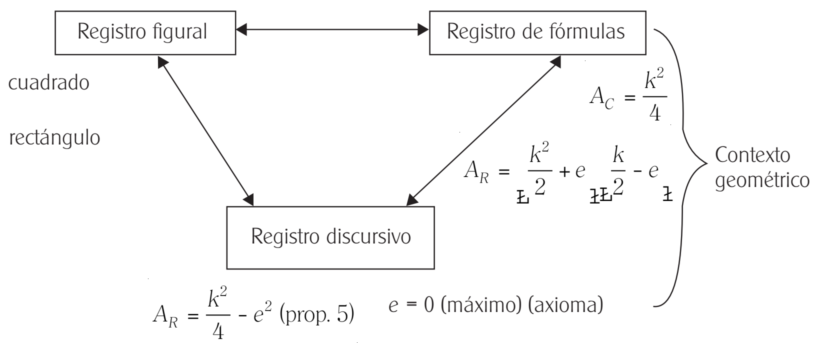
Por último, se vuelve al registro figural, siguiendo un recurso heurístico, para finalizar con el registro discursivo.

En realidad, entre los registros semióticos se dan unas interrelaciones de mayor complejidad, tal y como se muestra en la figura 4.

c) No congruencias entre registros. Tratamientos y sentidos

En la conversión que se realiza entre el registro de fórmulas y el figural, encontramos una no congruencia por no cumplirse la univocidad semántica, ya que a una figura concreta, con un área determinada, se le hacen corresponder todas las posibles figuras que se obtendrían variando "*e*". A la vez, se le asocia la variación de sus áreas para poder concluir que la mayor corresponde al cuadrado.

Figura 4



Todo ello supone un cambio de sentido al pasar de una entidad de tipo extensional (la figura concreta) a una de tipo intensional (la clase de todas las posibles figuras obtenidas para cada "*e*") (Godino, 2002).

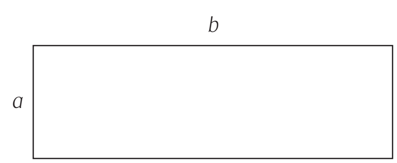
Contexto algebraico

a) Resolución

En el contexto del álgebra, el problema planteado encuentra una fácil justificación, aunque se acudirá al contexto geométrico, como recurso heurístico en este caso, para poder obtener un discurso global adecuado a la resolución del problema. Hay que observar, no obstante, la dependencia de la resolución del problema respecto a los distintos tipos de ecuaciones que se pueden plantear.

Se consideran *a* y *b* dos lados consecutivos de cualquier rectángulo, tal y como aparece en la figura 5.

Figura 5



Sean p el semiperímetro y s el área, entonces se tiene:

$$a + b = p$$
$$a \cdot b = s$$

Como a y b son soluciones de la ecuación $x^2 - px + s = 0$, en la que p indica la suma de a y b, y s su producto, se tendrá:

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - s}$$

Ahora bien, el máximo valor que puede tomar s es el que anule el radical, porque los valores de s mayores, que hagan negativo el radicando, nos darán valores imaginarios; luego

$$s = \frac{p^2}{4}; \text{ por tanto, } a = \frac{p}{2}, b = \frac{p}{2};$$

O sea, el área será máxima cuando las dimensiones son iguales; es decir, el cuadrado será la figura de mayor área.

Las herramientas empleadas son de álgebra elemental y corresponden a las propiedades de las soluciones de una ecuación de segundo grado.

b) Arquitectura cognitiva asociada a la resolución

Analizamos el problema según los sistemas de representación semiótica implicados, que podemos observar en la figura 6.

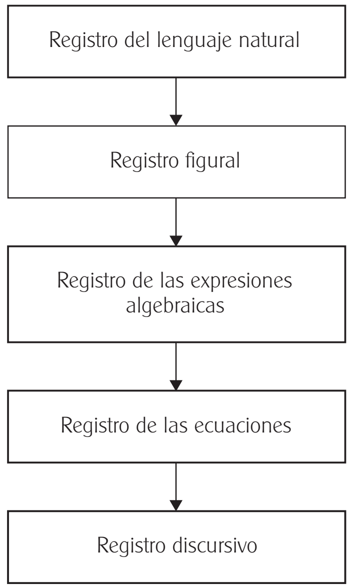
Se inicia el problema con el sistema de representación vernáculo.

De manera implícita, se efectúa una conversión al sistema de representación figural, puesto que se está hablando de rectángulos.

Del contexto geométrico se pasa al algebraico con el registro de las expresiones algebraicas.

Posteriormente, se realiza otra conversión al sistema de las ecuaciones. Por último, se resuelve el problema en el registro discursivo.

Figura 6



Aunque no se describe de modo explícito, los cambios entre los sistemas y dentro de un mismo sistema son una constante a lo largo del proceso. Los tratamientos dentro de un mismo sistema son efectuados con la idea de obtener modos de representación que faciliten el desarrollo del discurso.

De modo similar al caso anterior, se podría construir una figura que expresara toda la complejidad de las relaciones dialécticas entre registros y contextos que, en este caso, es aún mayor, ya que se interrelacionan dos contextos, el algebraico y el geométrico. Sin embargo, dada la extensión del trabajo, consideramos que es suficiente con ofrecer un ejemplo en el que se ha reflejado dicha complejidad.

c) No congruencias entre registros. Tratamientos y sentidos

En este caso nos encontramos con una no congruencia en la conversión que se realiza entre el registro de las expresiones algebraicas y el de las ecuaciones. A partir de la figura concreta se obtienen las expresiones de su semiperímetro y de su área; pero es necesario realizar una conversión para interpretarlos como soluciones de una ecuación de segundo grado, perdiéndose entonces la univocidad semántica.

En esta conversión, se puede hablar también de un cambio de sentido importante. Nos referimos al paso de lo concreto (unas expresiones algebraicas asociadas a un área dada) a lo general (una ecuación de segundo grado para cuyas soluciones debemos encontrar una expresión y así obtener la deseada).

Por otra parte, en el registro de las ecuaciones encontramos además un tratamiento nada trivial que nos da la expresión algebraica de todas las soluciones y nos permite pasar al registro discursivo. En este último registro, nuevamente encontramos complejos tratamientos que nos llevan a la solución.

Contexto funcional

a) Resolución

En este caso, nos situamos en la consideración de la altura y del área como funciones de la base, para lo cual conviene llamar a la base x y *a* la altura *y*. Se tendrán las funciones siguientes, en las que p es el semiperímetro: x Æ $y = p - x$; x Æ $s = x(p - x)$. Es decir, el contexto funcional se utiliza como herramienta para el desarrollo del problema.

Para fijar ideas hacemos $p = 10$ y daremos valores a la base x; el cuadro 1 expresa los resultados, donde se sugiere intuitivamente, aunque no se valida aún, que el área máxima es para $x = y = 5$. Utilizando la representación gráfica, se obtiene que esta parábola de vértice invertido tiene su máximo en $x = 5$, lo que valida la solución obtenida intuitivamente para este caso.

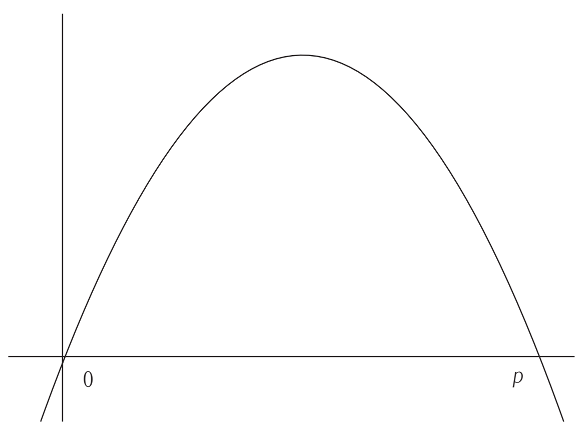
Se puede volver a realizar el mismo proceso para $p = 6$, $p = 8$, $p = 5$... Obteniendo las tablas de variación y las correspondientes representaciones gráficas, se llegará a que el área es máxima para $x = y = 3$, $x = y = 4$, $x = y = 2'5$... respectivamente.

Seguidamente, se considera el caso general de semiperímetro p y, recurriendo nuevamente a la representación gráfica de la función área $A(x) = x(p - x) = xp - x^2$ (véase la figura 7), se obtiene que esta función representa gráficamente una parábola invertida cuyo vértice –punto donde se alcanza el valor máximo de

Cuadro 1 Cuadro de variación

Base	Altura	Área
10	0	0
9	1	9
8	2	16
7	3	21
6	4	24
5	5	25
4	6	24
3	7	21
2	8	16
1	9	9
0	10	0
...	...	...
5,5	4,5	24,75
5,1	4,9	24,99
5,01	4,99	24,9999

Figura 7



esta función– tendrá la expresión: $\left(\frac{p}{2}, A\left(\frac{p}{2}\right)\right) = \left(\frac{p}{2}, \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{4}\right) = \left(\frac{p}{2}, \frac{p^2}{4}\right)$, por lo que el rectángulo de área máxima será aquel que tenga por lados $x = \frac{p}{2}$ e que, $y = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$ obviamente, resulta ser un cuadrado.

Como se ha podido observar, son dos contextos, el numérico y el gráfico, complementarios. Las herramientas utilizadas corresponden a la representación de funciones de modo numérico –mediante una tabla de valores– y de modo gráfico –mediante una parábola, en este caso.

Sin embargo, varias cuestiones subyacen y quedan planteadas: ¿es seguro que el área es 25 (9, 16, ...), o nunca llega a alcanzarse ese valor?, ¿cuánto he de aproximarme?... Esta vez he podido validar por medio de la gráfica de una función muy conocida como es la parábola, pero, ¿y en el caso de funciones de otro tipo que no sean fácilmente representables por medio de una gráfica?

b) Arquitectura cognitiva asociada a la resolución

Analizando este proceso, según los sistemas de representación semiótica, tendremos la figura 8.

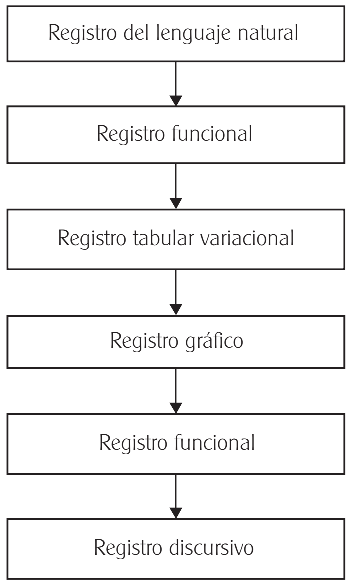
Se inicia, como corresponde al texto, con un sistema de representación del lenguaje vernáculo. Se efectúa primeramente una conversión al sistema del lenguaje funcional.

La segunda conversión lo hace corresponder a un registro funcional otro tabular variacional. La intencionalidad de la tabla es tratar de sugerir al lector una idea intuitiva de límite.

Al no obtener más que una validación intuitiva del problema, se realiza una nueva conversión al sistema gráfico, en el que se considera resuelto y validado el problema para cada caso particular.

Nuevamente se realiza una conversión al registro funcional, donde se resuelve y valida el problema general, al completar con el discurso.

Figura 8



c) No congruencias entre registros. Tratamientos y sentidos

En la primera conversión, nos encontramos con una no congruencia, ya que se pasa de una figura a la función obtenida de todas las posibles figuras, según varía uno de los lados. Se rompe la univocidad semántica y hay un cambio de sentido importante, al pasar de un caso concreto a la clase de todos los casos posibles, representada por la función.

Un caso similar de no congruencia se obtiene al pasar del registro gráfico al registro funcional, cuarta conversión. Aunque se pretende facilitar el paso del extensivo al intensivo analizando casos sucesivos, nos encontramos con una no congruencia en esta generalización que no es trivial, aun cuando el número de casos estudiados fuese importante.

Hacia un contexto infinitesimal

a) Resolución

Ahora se investigará la variación de la función área en "los alrededores" de x, utilizando un parámetro c. Sean x e y los lados de un rectángulo cualquiera tales que $y \geq x$ fi $c tal que $y = x + c$, por lo tanto el semiperímetro es $p = 2x + c$ y la función área: $A(x) = (p - x)x = px - x^2$.

Estudiemos cómo varía esta función área al aumentar al lado x una cantidad que llamaremos h. Además, como lo mismo que aumenta x disminuye y, por ser rectángulos isoperimétricos, dicho número no puede superar $c/2$ para que los lados del rectángulo aumenten manteniendo $y \geq x$. Esto no supone ninguna restricción pues, en caso contrario, razonaríamos igual intercambiando y por x (véase la figura 9).

Consideramos, por lo tanto, cualquier h £ $c/2$. La función área para el rectángulo de lado $x + h$ será: $A(x + h) = (x + h)\,(p - (x + h)) = (x + h)\,(p - x - h) = xp - x^2 - xh + hp - hx - h^2$.

Como queremos estudiar la variación del área, analizamos la diferencia:

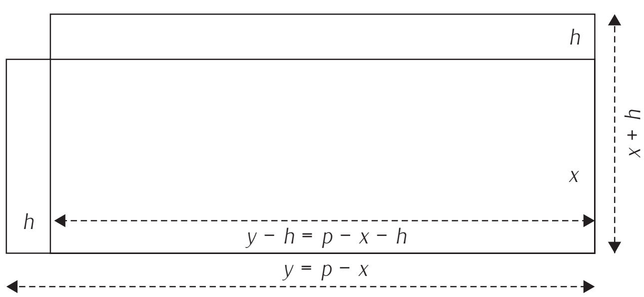
$$A(x + h) - A(x) = -2xh + hp - h^2 = h(-2x + p - h) = h(c - h),$$

la cual es positiva.

Por lo tanto, hemos probado que $s(x + h) - s(x) > 0$, lo que significa:

$$\forall h \text{ £ } c/2 \text{ fi } s\,(x + h) > s\,(x).$$

Figura 9



Pero h no puede crecer más de $c/2$, pues, en caso contrario, estaríamos con el rectángulo de $x > y$ con lo que se intercambiarían los papeles, y el razonamiento sería análogo, como dijimos anteriormente. Así, el máximo valor de h es $h = c/2$ y, por tanto, el lado del rectángulo de área máxima será aquel que tenga de lados:

$$x + \frac{c}{2} = x + \frac{y - x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

El otro lado vendrá dado por:

$$y - \frac{c}{2} = y - \frac{y - x}{2} = \frac{y}{2} + \frac{x}{2}$$

que corresponde a un cuadrado.

Las herramientas utilizadas son el incremento y el cambio de la función área. Además, de modo implícito se está empleando el siguiente teorema "si una función $s(x)$ es continua en un intervalo cerrado y creciente, entonces alcanza el máximo absoluto en extremo superior".

b) Arquitectura cognitiva asociada a la resolución

Del sistema de representación del lenguaje vernáculo se pasa, por conversión, al funcional. Posteriormente, se efectúa una conversión al figural, aunque este último desempeña un papel de apoyo al lenguaje funcional y no tiene carácter validativo.

Por último, se realiza la conversión al funcional en el que se valida el problema.

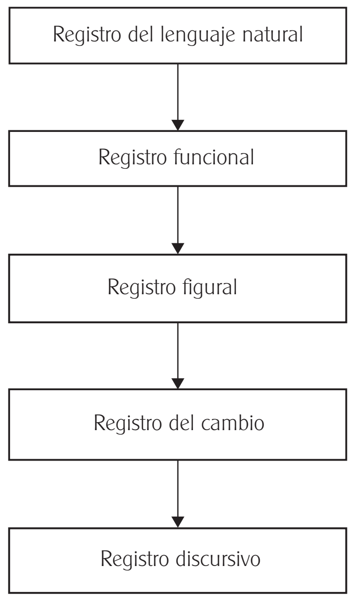
Como puede observarse, aparece un único sistema intermedio, aparte del vernáculo que es sistema soporte, que es el figural, los demás son funcionales.

Por último, se finaliza el proceso con el registro discursivo (véase la figura 10).

c) No congruencias entre registros. Tratamientos y sentidos

En la primera conversión –del registro de la lengua natural al registro funcional–, aparece una no congruencia, puesto que del primero de ellos se desprenden dos funciones (una, del perímetro constante y, la otra, del área); en el segundo registro,

Figura 10



en cambio, se añade una función más (la que corresponde a $y = x + c$; $y \geq x$) a las anteriores. Por tanto, al no cumplirse la univocidad semántica, hay una no congruencia entre ambos registros.

En la tercera conversión –del registro figural al registro del cambio–, se da una no congruencia, ya que en el segundo de ellos se introduce la diferencia entre $A(x + h)$ y $A(x)$, con h £ $c/2$, que es una unidad significante que no se aparece en el primer registro. También se violaría el criterio de univocidad semántica.

Al introducirse el registro del cambio, aparece una entidad extensional (ejemplar) $[A(x + h) - A(x)]$, pero se está trasmitiendo una entidad intensional (tipo), por lo que el sentido es diferente.

Además, en la conversión del registro figural al del cambio, se pasa de una entidad de tipo extensional (que sugiere la figura), a otra de carácter intencional ("todas" las h que verifican ser £ $c/2$).

En el registro del cambio se han de realizar unos tratamientos no triviales que son los que facilitan el registro discursivo.

En este contexto, que se ha denominado "hacia lo infinitesimal", la cuestión básica que se plantea es: ¿qué ocurrirá si en vez de un caso tan simple como éste, la función fuera distinta y los tratamientos más complejos?, ¿qué método *a* utilizaría?, ¿hay un método general para todos los casos?

Contexto infinitesimal

a) Resolución

Consideremos el rectángulo de lados x, y, cuyo semiperímetro vendrá dado por $p = x + y$. El área de dicho rectángulo vendrá dada por $A(x) = x(p - x)$, al sustituir el valor del lado y de la expresión del semiperímetro.

Consideremos un nuevo rectángulo isoperimétrico con el anterior, es decir, si el lado x experimenta un aumento en una cantidad h, el lado y deberá disminuirse en la misma cantidad h para poder mantener constante el perímetro (véase la figura 9). Por tanto, el área del nuevo rectángulo vendrá dada por la siguiente expresión:

$$A_1 = (x + h)\,(y - h) = (x + h)\,(p - x - h)$$

Veamos que A_1 corresponde a $A(x + h)$:

$$A(x + h) = (x + h)\,[p - (x + h)] = (x + h)\,(p - x - h)$$

Al ir variando los rectángulos, manteniendo constante el perímetro, las superficies de ellos igualmente se modificarán (aumentando o disminuyendo). La tasa de variación media –cociente entre la diferencia de áreas y el incremento h– nos dará una referencia de la "rapidez" de dicha variación:

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{(x+h)\,(p-x-h) - (p-x)x}{h} =$$

$$\frac{(p-x)x + (p-x)h - (x+h)h - (p-x)x}{h} = \frac{(p-2x-h)h}{h} = p - 2x - h$$

Al tomar límite haciendo tender h Æ 0, obtenemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (p - 2x - h) = p - 2x$$

La expresión anterior es lo que se denomina tasa de variación instantánea. Puesto que se ha demostrado en el epígrafe anterior que la función área –con las hipótesis planteadas– es creciente, y, por otra parte, cuando se alcanza un máximo la variación es nula, con lo que la tasa de variación instantánea será cero, obtendremos un rectángulo de área máxima cuando ésta sea igual a cero:

$$p - 2x = 0 \qquad x = \frac{p}{2} \text{ por lo que } y = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$$

Por tanto, los lados del rectángulo son iguales y estaremos ante un cuadrado.

El método anteriormente usado es, en esencia, el mismo que ya usaba Fermat[4] en el siglo XVII con la notación actual y haciendo uso de la noción de límite. Como puede observarse, los útiles que se emplearán son de tipo infinitesimal: razones de cambio medio, razones de cambio instantáneo, el método de *adégalation* de Fermat, el método de los límites. Aunque aparecen varios contextos, como el numérico, consideramos que son auxiliares del contexto infinitesimal. Los diversos sistemas de representación que aparecen en este contexto pueden observarse mediante la figura 11.

b) Arquitectura cognitiva asociada a la resolución

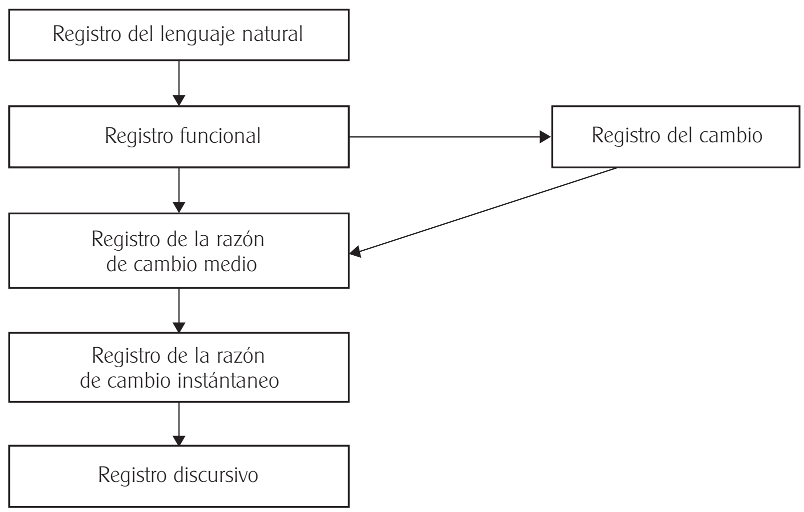
Del sistema de representación del lenguaje vernáculo se realiza una conversión al funcional.

En segundo lugar, se pasa, por conversión, al variacional (propio del cálculo infinitesimal).

Por último, para dar sentido a la pregunta planteada en contexto numérico y gráfico, se ha de efectuar otra conversión al sistema de representación del límite, que resuelve de modo general el problema, al utilizar el registro discursivo.

[4] Este término lo usó Fermat y manifiesta la idea de que, bajo ciertas condiciones, dos números que son distintos pueden considerarse iguales. No ha de confundirse con la aproximación. Para más detalle, puede consultarse Hauchart y Rouche (1992, pp. 13-15).

Figura 11



c) No congruencias entre registros. Tratamientos y sentidos

Entre el tercer registro –del cambio– y el cuarto –de la razón de cambio medio– se da una no congruencia en la conversión. No se cumple la univocidad semántica entre unidades significantes, al contemplarse la diferencia entre funciones en el tercero y la diferencia y el cociente en el cuarto.

También aparece una no congruencia en la conversión entre el cuarto y el quinto registro, puesto que la operación de paso al límite sólo se da en el quinto registro. Además, en este registro, en general, se dan unos tratamientos de cálculo importantes para poder obtener el resultado final.

Los dos nuevos registros –razón de cambio medio y razón de cambio instantáneo– conducen en el cálculo diferencial, es decir, en el lenguaje variacional. El cambio de sentido es de gran importancia; de estudiar los procesos de cambio –registro del cambio–, se ha de pasar al estudio de las razones de cambio de procesos continuos. Como señala Wenzelburger (1993, p. 105): "Las funciones de razones de cambio respecto a la variable independiente original se deducen *o derivan* de los valores de la función: por eso se llama a esta nueva función la *derivada*".

CONCLUSIONES

Este trabajo se basa en el cambio de contextos (Douady, 1991) y de registros de representación semiótica (Duval, 1995, 2000), y en él está implícita la hipótesis de que la aprehensión conceptual de un objeto matemático (lo que D'Amore (2003) denomina noética) únicamente es posible mediante las conversiones entre los sistemas de representación semiótica y su coordinación. Sin embargo, por una parte, se puede constatar que en las conversiones no se aborda la transformación del sentido; y por otra, como señala Radford (2002), la coordinación entre los registros de representación no parece darse de modo claro en el aula real, donde los sujetos tienden a priorizar en su uso un registro, utilizando algún otro de modo más esporádico. Esto nos ha llevado a efectuar un estudio crítico sobre los registros de representación semiótica, el cual se ha centrado en la formación de la arquitectura cognitiva, en los tratamientos interregistros y en las no congruencias entre los mismos, aplicados a un problema elemental sobre máximos. Además, en los análisis hay que tener en cuenta tanto el fenómeno de la tabicación entre registros que señala Duval (1995, p. 59), como el de abducción de las figuras (p. 180) en cuanto a su poder heurístico.

En la solución del problema de máximos propuesto, primeramente se ha resuelto en un contexto geométrico en el que se usan las herramientas geométricas de Euclides (libro II), pero que, obviamente, no aborda problemas relacionados con el infinito, al considerar como premisa básica argumentativa "que el todo es mayor que la parte". En segundo lugar, se emplea un contexto algebraico para la resolución del problema, donde la simplicidad de la solución es su característica principal, pero que tiene la limitación de no constituir un método general de resolución a causa de la eventual dificultad de las ecuaciones implicadas en problemas similares. El tercer contexto conduce al planteamiento del problema en el campo funcional, dentro del cual solamente es posible establecer conjeturas sin poder aportar una validación, por lo que ha de completarse con un escenario gráfico –mediante la parábola– para validar, de modo intuitivo, la solución.

En el contexto siguiente, que hemos denominado "hacia un contexto infinitesimal", se establecen criterios de justificación basados en el "cambio" de la función área; como función continua y creciente antes del máximo y decreciente después. El empleo de estos métodos, además de ser previos a los típicos de las razones de cambio instantáneo, aporta soluciones a problemas sobre máximos en los que éstos no podrían hacerlo –como en el caso de funciones no derivables pero continuas–. Además, se le dotaría de sentido al concepto de máximo al independizarlo del cálculo diferencial, donde éste pasaría a ser una más de las posibles herramientas por utilizar en la solución.

Por último, el contexto infinitesimal –asociado al concepto de derivada– se plantea basándose en las razones de cambio, tal y como Wenzelburger (1993) y Cantoral y Farfán (1998) proponen, es decir, utilizando la "matemática de los cambios", a fin de determinar los cambios de una magnitud que depende de una segunda magnitud en relación con los cambios de esta última, lo cual supone el empleo mínimo, pero significativo, del formalismo matemático.

Aunque el estudio presenta solamente análisis *a priori* que, posteriormente, habrán de ser refinados con experiencias de aula, una consecuencia didáctica que puede obtenerse es que, si bien en la clase, para poder enseñar el contenido, éste ha de contextualizar en diversas situaciones de enseñanza, paralelamente, hay que organizar una dinámica de tratamientos intraregistros y la coordinación interregistros, a fin de aportar un significado al concepto de que se trate. Además, tanto la coordinación entre registros, como el sentido de las representaciones y la faceta dual propuesta en Godino (2002), intensiva (tipo)/extensiva (ejemplar), de las entidades matemáticas puestas en juego, deben guiar la arquitectura cognitiva asociada a la resolución del problema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1990), "Épistémologie et didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, núm. 23, pp. 241-286.

Blosch, I. (1999), "L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'eleve dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 135-194.

Campos, M. A. y P. Balderas (2000), "Las representaciones como fundamento de una Didáctica de las Matemáticas", *Pensamiento Educativo*, vol. 27, pp. 169-194.

Campos, M. A. y J. Estrada (1999), "Representaciones matemáticas de estudiantes preuniversitarios en la resolución de un problema de optimización", *Educación Matemática*, vol. 11, núm. 2, pp. 32-51.

Cantoral, R. y R. M. Farfán (1998), "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al Análisis", *Epsilon*, núm. 42, pp. 353-369.

Douady, R. (1991), "Tool, Object, Setting, Window: Elements for Analysing and Constructing Didactical Situations in Mathematics", en A. J. Bishop y S. Melling-Olsen (eds.), *Mathematical Knowledge: Its Goruth Teaching*, Dordrecht, Kluwer, pp. 100-126 (traducción de Enrique Salazar Balboa).

Dreyfus, T. (1991), "Advanced Mathematical Thinking Process", en D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer, pp. 25-41.
Duval, R. (1995), *Semiosis et pensée humaine*, Peter Lang.
—— (1996), "Quel cognitif retenir en Didactique des Mathématiques?", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 16, núm. 3, pp. 349-382.
—— (2000), "Basic Issues for Research in Mathématics Education (Plenary Address)", en Taddao Nakahara y Masataka Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychologie of Mathematics Education* (t. I), Japón, Universidad de Hiroshima, pp. 55-69.
Godino, J. D. (2002), "Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 22/2.3, pp. 237-284.
Harel, G. y J. Kaput (1991), "The Rol of Conceptual Entities and Their Symbols in Building Advanced Mathematical Concepts", en D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer, pp. 82-94.
Hauchart, C. y N. Rouche (1992), *L'enseignement de l'analyse aux debutants*, Louvain-la-Neuve, Academia-Erasme.
Hiebert, J. y T. Carpenter (1992), "Learning and Teaching with Understanding", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research in Mathematics Thinking and Learning*, NCTM, pp. 65-97.
Hitt-Espinosa, F. (1998), "Systémes sémiotiques de represéntations liés au concept de fonction", *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, núm. 6, pp. 7-26.
Janvier, C. (1978), *The Interpretation of Complex Cartesian Graphs*, Tesis de doctorado, Wetherby, University of Nottingham.
—— (1987), "Traslation Processes in Mathematics Education", en C. Janvier, *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, LEA, pp. 27-32.
Pihoue, D. (1996), *L'entree dans le monde de pensée fonctionnel en classe de seconde*, Cahier de DIDIREM, IREM Universidad de París 7.
Puertas, L. (1999), *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides* (traducción), Universidad de Salamanca.
Radford, L. (1992), "Le raisonnement algébrique dans la résolution de problèmes écrtis: un modèle d'interaction de représentations", en CIRADE, *Actes du colloque portant sur l'émergence de l'algèbre*, Universidad de Quebec en Montréal, pp. 45-64.
—— (1997), "On Psychology, Historical, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics", *For the Learning of Mathematics*, vol. 17, núm. 1, pp. 26-33.

Radford, L. (1999a), "The Rhetoric of Generalization. A Cultural, Semiotic Approach to Students' Precesses of Symbolizing", en *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education (PME)*, pp. 89-96.

—— (1999b), "El aprendizaje del uso de signos en álgebra. Una perspectiva post-vigotskiana", *Educación Matemática*, vol. 11, núm. 3, pp. 25-53.

—— (2000), "Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 42, pp. 237-268.

—— (2002a), "The Seen, the Spoken and the Griten: A Semiotic Approach to the Problem of Objectification of Mathematical Knowledge", *For the Learning of Mathematics*, vol. 22, núm. 2, pp. 14-23.

—— (2002b), "Algebra as Tekhnē. Artefacts, Symbols and Ecuation in the Classroom", *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 1, núm. 1, pp. 31-56.

Schoenfeld, A. H. (1985), *Mathematical Problem Solving*, San Diego Academic Press.

—— (1992), "Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense in Mathematics", en D. A. Grows (eds.), pp. 334-370.

Wenzelburger, E. (1993), "Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral–Una propuesta didáctica", *Educación Matemática*, vol. 5, núm. 3, pp. 93-123.

DATOS DE LOS AUTORES

Ángel Contreras de la Fuente
Catedrático de Didáctica de las Matemáticas,
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad de Jaén, Jaén, España
afuente@ujaen.es

Lorenzo Luque Cañada
Profesor titular de Matemáticas en Educación Secundaria
loluque@supercable.es

Lourdes Ordóñez Cañada
Profesora titular de Matemáticas en Educación Secundaria
locanada@teleline.es

www.santillana.com.mx/educacionmatematica