Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Butto, Cristianne; Rojano, Teresa
Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría
Educación Matemática, vol. 16, núm. 1, abril, 2004, pp. 113-148
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría

Cristianne Butto y Teresa Rojano

Resumen: Este trabajo presenta un estudio sobre la transición de la aritmética al álgebra, basado en un modelo de enseñanza que incorpora fuentes de significados relacionados con el razonamiento proporcional numérico y geométrico, aspectos de la variación proporcional y procesos de generalización. En dicho modelo se utiliza el ambiente Logo, que hace explícita la vinculación entre dominios matemáticos. El estudio piloto que aquí se presenta forma parte de una investigación más extensa y se realiza con dos niños de 10-11 años de edad de una escuela primaria privada; incluye la aplicación de un cuestionario inicial, trabajo experimental con parejas de niños en ambiente Logo y un cuestionario final. El análisis de los resultados muestra que los niños transitan de un pensamiento de tipo aditivo a uno de tipo multiplicativo con dificultades para percibir la diferencia entre secuencias aritméticas y geométricas, así como para expresar relaciones funcionales. Sin embargo, se observaron logros al final del trabajo experimental en cuanto a la percepción de patrones generales y de su expresión en lenguaje natural o en lenguaje de programación Logo; este último, basado principalmente en el trabajo de los niños con tablas numéricas de variación.

Palabras clave: álgebra temprana, pensamiento algebraico, álgebra con Logo, razonamiento proporcional y álgebra, procesos de generalización.

Abstract: This paper reports a study on the transition to algebraic thinking, based on a teaching model that incorporates meaning sources related to proportional reasoning (numerical and geometrical), aspects of proportional variation and generalization processes. The Logo environment is introduced here, and links between mathematical domains are explored. The pilot study is carried out on 10-11 year-olds children of a private primary school and it involves the application of a pre-questionnaire, experimental works in Logo environment with pairs of children and a post-questionnaire. The analysis of the pilot study results shows that children transit trough additive and multiplicative strategies, showing a difficulty to understand the difference between arithmetical and geometrical sequences, as well as in expressing functional relationships. Nevertheless, significant achievements were observed after the experimental work in the direction of perceiving and expressing general patterns, which be attributed to the proficient use of variation numerical tables by children.

Key words: early algebra, algebraic thinking, algebra with Logo, algebra and ratio and proportion, generalization processes.

INTRODUCCIÓN

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolarizadas. Sin embargo, presenta obstáculos que la mayoría de los adolescentes encuentran muy difíciles de superar. Esto se debe, en parte, a que este contenido matemático se enseña por lo general a partir de fuentes limitadas de significados; usualmente se toma como base el dominio numérico (simbolización numérica), dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, como, el geométrico.

Por otra parte, los acercamientos al álgebra que buscan otros puntos de partida, como la noción de número racional, cuando sólo se limitan a considerar significados como la relación parte-todo, pueden resultar insuficientes para la transición hacia conceptos más abstractos como los de relación funcional y relación entre variables.

El acercamiento más tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, haciendo énfasis en sus aspectos manipulativos. En ese abordaje se empieza por enseñar las expresiones, ecuaciones y toda la manipulación alrededor de ellas, y se termina con la resolución de problemas mediante la aplicación del contenido sintáctico aprendido. En cuanto a las dificultades que enfrentan los estudiantes que trabajan con dicho abordaje, la principal crítica es que se introduce al niño en un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, siendo que los niños vienen de trabajar con la aritmética, donde todos los símbolos poseen significados y los contextos de los problemas determinan mucho la manera de resolverlos.

En otro orden de ideas, está comprobado que los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y parece oportuno llegar a ese pensamiento a edades tempranas (7-11 años), aprovechando las fuentes de significados que están presentes en los contenidos de la primaria.

En respuesta a señalamientos como el anterior, se han llevado a cabo estudios para investigar dicha transición, desde diferentes perspectivas, como: la aritmética generalizada (Mason, 1985); la evolución por rupturas (Filloy y Rojano, 1989); la reificación (Sfard y Linchevski, 1994); el sentido de las operaciones (Slavit, 1999); la interpretación de los símbolos (Kieran, 1992; Matz, 1980; y Booth, 1984); el tratamiento de las operaciones y las funciones (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Kaput y Blanton, 2000); en relación con la generalización y la formalización progresiva y el álgebra como una herramienta de representación y resolución de problemas (Da Rocha Falcão, 1993). Todos esos estudios han demostrado que dicha transición ofrece obstáculos que han de ser superados por los alumnos para llegar a las nociones del álgebra simbólica.

Algunos estudios pretenden ayudar a los niños a llegar al pensamiento algebraico a temprana edad y justifican que muchas de sus dificultades en la escuela secundaria se deben, en parte, a la introducción tardía de este contenido matemático. En sus estudios, Carraher, Schliemann y Brizuela (2001) comentan que se ha retrasado la introducción escolar al álgebra por concepciones erróneas acerca de la naturaleza de la aritmética, del álgebra y de la capacidad de los niños para tratar con ella. Afirman que la aritmética es algebraica, porque proporciona elementos para construir y expresar generalizaciones (aritmética generalizada). A partir de esa afirmación, desarrollan, con niños de nueve años, un estudio de iniciación temprana al pensamiento algebraico en la escuela primaria, centrado en la idea de lo desconocido y utilizando la notación algebraica para representar las relaciones con problemas aditivos. Los niños operan con lo desconocido y son capaces de entender que las relaciones funcionales que involucran lo desconocido permanecen invariables para todos los valores posibles que una entidad puede tomar. Los autores afirman que los niños pueden razonar sobre las variables contenidas en los problemas. Comentan y critican la creencia, por parte de los educadores matemáticos, de que la aritmética debe preceder al álgebra porque la primera trata de las operaciones que involucran números particulares y el álgebra trata de números generalizados, variables y funciones. Estos autores hacen referencia a estudios realizados por Filloy y Rojano, Kieran, y Linchevski acerca del aprendizaje del álgebra con adolescentes y de la separación entre la aritmética y el álgebra. Algunos de ellos afirman que el razonamiento algebraico está muy relacionado con el desarrollo cognitivo de los estudiantes: dicho razonamiento y los conceptos requieren un grado de abstracción y una madurez cognitiva que la mayoría de los estudiantes de primaria no tienen.

Sin embargo, el trabajo de Carraher *et al.* proporciona pruebas de que es posible algún tipo de iniciación antes de enfrentar a los niños a los obstáculos clásicos del aprendizaje del álgebra en la escuela secundaria. Este tipo de estudios no dejan de provocar controversia en didáctica del álgebra. Por ejemplo, Radford (2001) comenta el trabajo de Carraher, Shliemann y Brizuela (2001) y argumenta que la idea de operar con lo desconocido ha sido refutada experimental e históricamente desde mucho tiempo atrás. También se opone a la idea de que las operaciones aritméticas conducen al significado algebraico y que el contacto temprano con el álgebra puede ayudar a construir significados dentro de la aritmética de los niños. Para defender dicha postura, Radford analiza tres puntos básicos: menciona algunos estudios históricos y contemporáneos sobre operar con lo desconocido; plantea que éste no es un problema intrínseco que surge en la transición de la aritmética al álgebra, y alega que adoptar una visión tradicional en la que el álgebra se relaciona solamente con la aritmética la restringe a un solo campo del desarrollo y pierde de vista algunas expectativas importantes para incorporar conceptos aritméticos de otros campos, como el de la aritmética geometrizada. Por último, comenta que, a pesar de que Carraher *et al.* (2001) no rechazan los prerrequisitos del desarrollo para el aprendizaje del álgebra, parecen renuentes a aceptar que la razón por la que los niños no logran operar con lo desconocido en álgebra sea la brecha de los niveles de desarrollo.

Radford, Carraher *et al.* refutan la idea teleológica del desarrollo, y esto genera un determinismo dirigido a la perspectiva antropológica según la cual, la condición y el desarrollo conceptual son elementos inseparables del contexto, si éste se ve desde el abordaje en el cual el desarrollo biológico aparece dialécticamente relacionado con algunas líneas culturales. Advierten que, desde el punto de vista de la historia de las matemáticas, operar con lo desconocido en un momento de la historia no equivale a operar con lo desconocido en un periodo diferente, y cuestionan la idea de que los conceptos matemáticos están formados por modos culturales de conocimiento (por ejemplo, la matemática griega).

Según Radford, adoptar la visión tradicional de que el álgebra se relaciona solamente con la aritmética reduce la visión del camino y estrecha las posibilidades de seguir con lo que es más importante: la inclusión de nuevos significados de la aritmética. Este autor argumenta que el álgebra es mucho más que una aritmética generalizada y que lo que conocemos pertenece a la geometría. En seguida, señala algunos episodios de las actividades realizadas con los niños; por ejemplo, trabajar con la letra **N** como lo desconocido. Dice que esta actividad no fue precedida de un acto individual voluntario de los niños, sino sugerida. Observa que, para los estudiantes, no existe una diferencia muy clara entre cualquier número y uno desconocido y que no presentan la operación con lo desconocido. Agrega que tales experiencias son imposibles de alcanzar dentro de la aritmética, a pesar de que parece inadecuado infundir significados desde la aritmética; pero advierte que, en el estudio presentado, se demuestra cómo el aprendizaje de la aritmética está realmente enganchado a esa cuestión, y que ésta apoya la iniciación temprana al álgebra.

Tall (2001) analiza el trabajo de Carraher, Schliemann y Brizuela (2001), a fin de verificar qué tipo de álgebra están aprendiendo los niños. Tall y otros presentan la teoría del desarrollo simbólico, que revela una bifurcación en el desempeño de la aritmética entre el procedimiento para contar y aquellos que desarrollan un pensamiento proconceptual que involucra el uso flexible de símbolos. El autor argumenta que hay informes en la literatura sobre la conceptualización de los niños respecto a la igualdad y que, en ese estudio, la señalan como operación, no como igualdad entre dos expresiones. Tall menciona que, en el abordaje usado por Carraher, Schliemann y Brizuela (2001), los niños no operan con lo desconocido en el sentido de la manipulación simbólica, observan operaciones y simbolismos aritméticos, y que este aspecto está empezando a ser explorado en este estudio, a pesar de que la manipulación algebraica necesita ser vista como parte de un largo desarrollo.

Por otro lado, en relación con el trabajo de Carraher, Schliemann y Brizuela, Linchevski (2001) hace el siguiente cuestionamiento: ¿cuándo la enseñanza de un tema a una cierta edad debe tomar como base algunos requisitos de desarrollo y cuándo se trata simplemente de recurrir a un tipo de acercamiento de enseñanza? Linchevski (2001) afirma que para Carraher *et al*. esta pregunta no es importante, pues para ellos, las potencialidades que los estudiantes no desarrollaron totalmente pueden ser las causas que retardaron su introducción. Estos autores creen que la razón de las dificultades conceptuales futuras reside en su introducción tardía.

Por su parte, Carraher *et al*. afirman que los informes de la investigación que separa el pensamiento aritmético del algebraico (Filloy y Rojano, 1989) y "las lagunas cognoscitivas entre la aritmética y el álgebra" (Herscovics y Linchesvki, 1994), así como otras dificultades bien documentadas en álgebra temprana (Kieran, 1992; Sfard y Linchesvki, 1994), han desempeñado un papel importante en la decisión de los educadores para introducir el álgebra sólo en los grados más altos.

Otro estudio que aborda el acceso temprano al álgebra es el que llevó a cabo Slavit (1999). Este autor observa que ha aumentado la importancia y el sentido de las operaciones aritméticas en el pensamiento algebraico a edades tempranas, que este tema requiere soporte teórico y/o empírico y que el sentido de las operaciones apoya la transición hacia el pensamiento algebraico. El marco teórico define el sentido de las operaciones con un enfoque particular en la adición: se identifican las áreas de entendimiento algebraico que conforman la investigación y que emergen para dar sentido a las operaciones de la adición, y se señalan los núcleos del pensamiento algebraico que pueden ser presentados en un entendimiento de desarrollo numérico y aritmético.

Otros estudios desarrollados en esta misma área confirman que los estudiantes de 6 y 7 años pueden valorar alternativas de resolución de problemas y hacer oportuna la comunicación de su pensamiento (Fuson, 1997, y Frank, 1997, citados en Slavit, 1999); por lo tanto, los estudiantes de la escuela primaria son capaces de avanzar hacia las nociones aritméticas que transcienden dentro del dominio algebraico y darles sentido.

De acuerdo con Fuson (1992, citado en Slavit, 1999), los niños por lo regular desarrollan actividades aditivas utilizando varios métodos de conteo; finalmente usan una técnica más refinada hacia métodos más eficientes. La tarea de adicionar 5 + 3 podría ser desarrollada inicialmente por un conteo de 5 y después de 3, uniendo los tres grupos y contando el resultado. El conteo permite a los niños comenzar desde 5. Esta acción significa que la etapa de reificación comienza con el número 5, más adelante necesitan verificar el proceso de conteo y, finalmente, entender que 5 + 3 es igual a 8 sin ninguna referencia inmediata al modelo de acción. El desarrollo proporciona un ejemplo de una construcción en cadena, en la que el ciclo de reificación podría ser indeterminable. Una vez que un proceso es verificado para el grado que puede ser como objeto matemático, entonces puede concebirse una siguiente operación en el nuevo objeto y, posteriormente, el objeto es reificado por él mismo. El ciclo de la reificación debe ser una herramienta en el análisis del desarrollo a largo plazo de la comprensión matemática. Los autores comentan que la noción de objetos mentales puede servir para explicar el sentido de las operaciones. La operación es esencial para el conocimiento y puede estar asociada al entendimiento algebraico. Para ello, se desarrolla una base teórica que podría ser útil en la discusión de las operaciones matemáticas de manera general; la utilidad de los estudiantes acerca de la operación y el uso del entendimiento de cómo los niños tienen competencia en aritmética pueden ser vistos como una raíz para la comprensión algebraica.

La base para el sentido de las operaciones podría involucrar la habilidad para utilizar la operación como el último conjunto de objetos matemáticos; por ejemplo, la habilidad para sumar uno o dos enteros, pero esto es una conceptualización mínima. El sentido de las operaciones involucra varios tipos de operaciones flexibles que pueden ser interrelacionadas por el alumno. Esas concepciones involucran el entendimiento de la estructura de las operaciones, el uso y las relaciones con otras operaciones matemáticas y estructuras y generalizaciones potenciales. De acuerdo con Fuson (1992, citado en Slavit, 1999), tales características incluyen el establecimiento de propiedades que las operaciones poseen y cómo se relacionan éstas con otros procesos.

La conceptualización de los componentes de base en el proceso involucra la habilidad para descomponer la operación en sus componentes; por ejemplo, incluye la adición como conteo, la multiplicación como adición repetida y funciones coordinadas por conteo coordinado. Esto empieza como una dinámica de comprensión, donde las operaciones son pensadas inicialmente como acción. La familiaridad con las propiedades de las operaciones disponibles es fundamental para el sentido de las propiedades de grupo de las operaciones, si es que existen, y de éstos la importancia primaria es una conciencia de la habilidad para invertir la operación. El acto de deshacer proporciona un mapeo de regreso y puede ayudar a hacer más claro el resultado general de los procesos originales. Otras propiedades, como la conmutatividad y la asociatividad y la existencia para identificar pueden ser una característica de la operación dada, pero en ningún caso ayudarán a aclarar el resultado.

Nuestra posición acerca de los estudios citados es que la introducción temprana al pensamiento algebraico es viable, partiendo de la suposición de que el desarrollo de dicho pensamiento es un proceso largo, pues los niños ciertamente enfrentarán dificultades tanto en el campo de la aritmética como en el álgebra, y es necesario no sólo tener conciencia de dichos obstáculos, sino también conocer su origen. Pensamos que muchas de estas investigaciones, que en primera instancia parecen carecer de cierto sentido matemático desde el punto de vista histórico y cognitivo, necesitan ser abordadas de otra manera; es decir, es necesario realizar investigación básica para conocer los procesos cognitivos que los estudiantes desarrollan cuando se enfrentan con contextos familiares y no familiares, las estrategias de solución de problemas que desarrollan y por qué; cuál es la relación que existe entre los contenidos matemáticos que logran aprender en la escuela y los que no logran entender. Por otro lado, las condiciones empíricas dadas en estos estudios sugieren abordar de distinta manera estos contenidos y las formas de tener acceso a ellos, lo que ciertamente implica otro modo de ver y resolver una situación problema.

Consideramos que alcanzar al pensamiento algebraico para desarrollar algunas ideas y alcanzar la formalización algebraica son actividades cognitivas distintas. La formalización algebraica requiere, ciertamente, un proceso mucho más largo y complejo, pero tener acceso al pensamiento algebraico en edades tempranas por diversas rutas nos otorga indicios empíricos y teóricos para analizar esta actividad matemática con una perspectiva epistemológica y didáctica.

Por último, sostenemos que la aportación de este estudio se dirige a la primera posición expuesta antes (desarrollar ideas algebraicas), con el objeto de estudiar en detalle los procesos cognitivos involucrados en dicha introducción: cognitivos, porque se realiza una investigación que pretende buscar sustento para una introducción temprana al pensamiento algebraico en la escuela primaria. Además, partimos de un contenido matemático (razonamiento proporcional aritmético y geométrico) que dio origen al pensamiento algebraico en la antigüedad, no con el propósito de seguir los pasos de la humanidad en la construcción del conocimiento matemático, sino como un punto importante para tener acceso a dicho contenido matemático, además de la familiaridad que éste posee en la escuela primaria (razonamiento proporcional).

El estudio que aquí se presenta recurre a fuentes de significados que son relevantes para las primeras construcciones de las ideas algebraicas. Dichas fuentes de significado son tratadas como formas, contenidos matemáticos y contextos para llegar al pensamiento algebraico, basados en la historia de las primeras ideas algebraicas; por ejemplo, el razonamiento proporcional. Estas fuentes de significado pretenden convertirse en fuentes de aprendizaje para los niños cuando lleguen a las primeras ideas algebraicas.

Esta propuesta se ubica al final del currículo de la escuela primaria, en la franja del pensamiento prealgebraico, cuando aún no se introduce a los alumnos en la sintaxis algebraica. Se presentan las ideas algebraicas en dos versiones: presimbólica (percepción de la idea de la variación proporcional) y simbólica (encontrar y expresar una regla general e incorporarla en un *lenguaje Logo*) por medio de la resolución de problemas propuestos en una secuencia de enseñanza. Para alcanzar ese objetivo proponemos dos rutas para llegar al álgebra: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. La elección de la primera se fundamenta, en primera instancia, en la familiaridad que los niños tienen con ese contenido matemático en la escuela primaria y específicamente en ese grado escolar (5º año de primaria) cuando aún están en transición del pensamiento aditivo al multiplicativo, y examina el hecho de que ese contenido matemático se conecta conceptual e históricamente (Radford, 1996) a la idea de variación funcional.

La vía de acceso de los procesos de generalización implica involucrar a los estudiantes en la detección de patrones y ayudarlos a que sean capaces de expresar tales patrones; esto nos lleva al pensamiento algebraico a través de actividades que involucren el razonamiento acerca de patrones en gráficas, patrones numéricos y figuras, detectando similitud, diferencias, repetición, recurrencia. La generalización o pensamiento en términos de número general puede ser vista yendo de lo general a lo particular y viceversa.

Nuestro objetivo es desarrollar una ruta alterna a las tradicionales que permita al estudiante hacer el tránsito al pensamiento algebraico a partir de la incorporación de fuentes de significados; por ejemplo, el razonamiento proporcional (aritmético y geométrico), aspectos de la variación funcional y los procesos de generalización hacia la construcción de un modelo de enseñanza, en el cual los alumnos puedan construir fuentes de significados relacionadas con la historia de las primeras ideas del pensamiento algebraico.

PROPÓSITOS DEL ESTUDIO "INTRODUCCIÓN TEMPRANA AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y ENFOQUE TEÓRICO"

El estudio que aquí se presenta pretende:

- Investigar la factibilidad de la iniciación temprana al álgebra a partir de contenidos matemáticos como el razonamiento proporcional, la variación funcional y los procesos de generalización.
- Utilizar la percepción visual intuitiva y diferentes contextos (numéricos y geométricos) para relacionarlos con los conceptos algebraicos.
- Observar diferentes tipos de interacción social durante el aprendizaje temprano de ideas algebraicas y los aspectos cognitivos, efectos y relaciones con otros dominios matemáticos.

El enfoque teórico de este estudio utiliza el Modelo Teórico Local (MTL) propuesto por Filloy (1999), que ofrece una metodología para la investigación y desentraña las relaciones de los componentes que entran en juego en la matemática educativa. Se caracteriza por la *interconexión* entre sus cuatro componentes: modelo de los procesos cognitivos, modelo de enseñanza, modelo de comunicación y modelo de competencia formal. Es *recursivo*, pues se orienta al significado dado por el uso, desde el cual se mira el problema original con una nueva perspectiva: se parte de la problemática, se plantea el MTL que se va a desarrollar en la experimentación y los resultados de ésta inciden en la manera cómo se va a observar la problemática y a replantear el MTL. Es *local* porque, sin pretender ser una teoría con un carácter universal ni replicable a cualquier fenómeno educativo, sirve para explicar fenómenos sobre la base de un análisis *fenomenológico*: tal análisis consiste en describir los fenómenos para los cuales este sistema matemático de símbolos (SMS) es un modelo de organización en su relación actual con esos fenómenos; aquí los SMS se consideran como productos cognitivos y sus relaciones con los fenómenos son las ya establecidas; la *fenomenología pura* se complementa con una *fenomenología histórica,* pues es indispensable considerar los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros fenómenos. Así se define el componente formal. Se continúa el análisis, además, con una *fenomenología didáctica,* que implica conocer los procesos de enseñanza y aprendizaje, los fenómenos presentes en el mundo de los estudiantes y lo que se propone en las secuencias didácticas de enseñanza. Los SMS se tratan como materia de enseñanza que va a ser aprendida por ellos. Así se define el componente de modelo de enseñanza. Por último, es también una *fenomenología genética,* pues los fenómenos se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los niños, y así se define el componente de los procesos cognitivos.

En cada uno de los componentes se hace referencia a modelos teóricos. El MTL interrelaciona cuatro componentes:

- modelo de enseñanza,
- modelo de los procesos cognitivos,
- modelo de competencia formal y
- modelo de comunicación.

De acuerdo con Filloy (1999), considerar estos cuatro componentes en un MTL sirve para explicitar observaciones, experimentos y resultados del estudio, otorgándole al modelo una confiabilidad por el manejo de ciertos fenómenos que ocurren en la matemática educativa.

A continuación, se presentan los componentes del MTL para el caso específico del estudio "Introducción temprana al pensamiento algebraico".

Modelo de enseñanza

Este componente sirve para estudiar cómo se diseñan los modelos de enseñanza y las dificultades enfrentadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje que son inherentes a la organización curricular. El estudio en marcha se dirige hacia una iniciación temprana al álgebra vía aspectos de la proporcionalidad numérica y geométrica, variación proporcional y procesos de generalización. Se pretende desarrollar una secuencia de enseñanza que vincule aspectos numéricos, geométricos y algebraicos en edades tempranas, con el propósito de introducir dichos contenidos matemáticos de manera significativa en los últimos años de la escuela primaria.

La hipótesis de trabajo es que la iniciación temprana al pensamiento algebraico puede ocurrir a través del razonamiento proporcional, pues éste ofrece una vinculación de la aritmética con el álgebra mediante la orientación de aspectos numéricos y geométricos hacia ideas algebraicas tales como la variable, la relación funcional y el número general.

Modelo de competencia formal

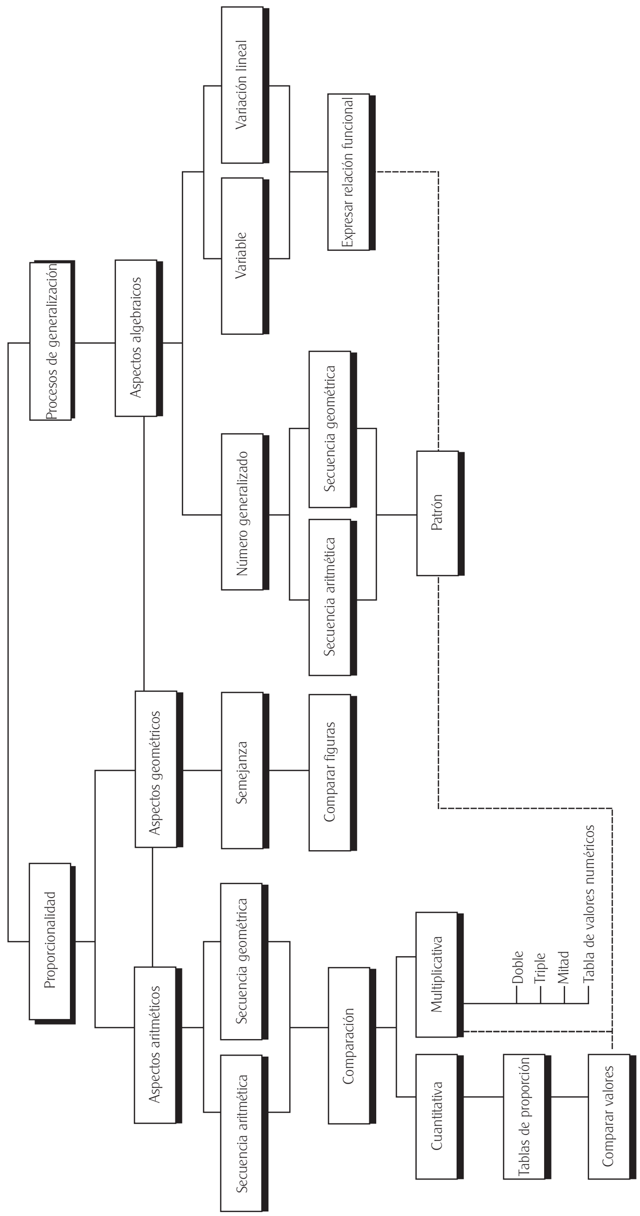
Este componente comprende tanto el propio dominio matemático como su correspondiente sistema matemático de signos (SMS). En este componente estudiaremos los conceptos matemáticos que se desarrollan en la secuencia didáctica según se muestra en el mapa conceptual 1.

Modelo del componente de los procesos cognitivos

Este componente está formado por procesos de pensamiento que nos permiten describir cómo el alumno procesa su conocimiento y las dificultades que enfrenta, y caracterizar las estrategias de resolución de problemas. También ayuda a describir las acciones de los sujetos observados al realizar tareas relacionadas en un contenido matemático. En ese proceso, los alumnos pueden comprender más acerca de su propio pensamiento denominado "meta cognición", así como afinar progresivamente su percepción al respecto.

En este componente se analizan las formas de pensamiento matemático y su comunicación durante la interacción (niño-mediadores-entrevistadora), tomando como referencia teórica la propuesta vygotskiana de aprendizaje, la cual afirma que el aprendizaje de los individuos es mediado por el contexto social en el que están involucrados (Vygotsky, 1978). También estudiaremos las ideas de Vygotsky acerca de la ZDP, que se da mediante el uso de instrumentos o de signos (como el lenguaje).

Mapa 1 Rutas de acceso al pensamiento algebraico



Modelo de la comunicación

Este componente trata del intercambio de mensajes entre sujetos de diversos grados de competencia en el uso de los SMS. Los modelos de comunicación sirven para describir las reglas de competencia comunicativa, formación y decodificación de textos. Este intercambio entre sujetos ocurre a través de la interacción social. Aquí el lenguaje tiene un papel importante, ya que es el vehículo que conecta y negocia significados matemáticos entre los agentes que participan en las actividades propuestas.

En la secuencia didáctica, este componente también es estudiado a través de la interacción social en parejas de estudiantes, destacando principalmente el aprendizaje colaborativo en pareja (Kieran, 1992). En particular, se analizan las dificultades enfrentadas en la negociación de significados matemáticos.

DOS RUTAS DE ACCESO AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Como se ha señalado en las secciones anteriores, para este estudio se eligieron dos rutas de acceso temprano al álgebra. En seguida, se pasa a hacer un breve análisis de cada una de ellas.

Razonamiento proporcional

Razón y proporción ha sido uno de los temas más investigados en el campo de la educación matemática y existe una literatura muy extensa al respecto. Aquí sólo se hará referencia a aquellos trabajos que se relacionan directamente con la posibilidad de explotar aspectos de razón y proporción para desarrollar ideas algebraicas de variación y generalización, así como las posibles dificultades que los niños de primaria puedan encontrar en las rutas que aquí se proponen.

Varios autores han estudiado diferentes aspectos del razonamiento proporcional. Los estudios de Inhelder y Piaget (1958) acerca del razonamiento proporcional lo caracterizaban como una habilidad propia del estadio de las operaciones formales (12 a 14 años de edad), pero otros autores contradijeron tal postura, argumentando que dicho razonamiento no es una habilidad propia de las operaciones formales y que puede ser desarrollado en edad temprana. Los estudios realizados con niños de 4 a 6 años comprueban que estos niños comprenden la idea de mitad y tienen un juicio perceptual y empiezan a comparar razones de cantidades antes de tener cualquier experiencia con razones numéricas. Esto comprueba, por otra parte, que el juicio perceptual (geométrico) es una habilidad que puede ser desarrollada a temprana edad. Pero Piaget también describe estadios tempranos en el pensamiento utilizado en las correspondencias cualitativas y seriaciones, el llamado estadio intermediario para sumar compensaciones de dos razones 2:1 y el estadio avanzado en el que se aplicó el razonamiento proporcional para valores numéricos con los datos y sus razones, y concluye que puede haber un entendimiento temprano de algunos conceptos matemáticos, como por ejemplo, el concepto de proporcionalidad.

Uno de los argumentos más sólidos que defienden esta postura hace referencia al tipo de pensamiento característico de estas edades, el pensamiento aditivo, que está fuertemente influido por la instrucción escolar que privilegia el trabajo en torno de las estructuras aditivas, dejando para más tarde el desarrollo de las estrategias de tipo multiplicativo.

Noelting (1980) estudió el razonamiento proporcional con problemas de comparación numérica y los resultados indicaron que los estudiantes mostraban un mejor desempeño en situaciones donde una cantidad de una razón completa era un múltiplo entero de la cantidad correspondiente de la otra razón. Cuando los múltiplos ya no eran enteros, los alumnos empleaban estrategias aditivas. En su teoría de la reestructuración adaptativa, hace la distinción acerca del tipo de comparación que el sujeto realiza cuando resuelve un problema, formando así el abordaje que denomina "entre estrategias".

Por otra parte, los estudios desarrollados por Karplus y Peterson (1970) caracterizaron las respuestas de los niños agrupándolas a partir de un nivel de comprensión. Las categorizaciones desarrolladas por estos autores son muy importantes, pues distinguen diferentes métodos para la respuesta correcta y comentan que no todos los niños tienen una estrategia de tipo aditivo.

Varios autores han comentado las dificultades que los niños enfrentan al resolver problemas de proporcionalidad. Tourniaire y Pulos (1985) hablan acerca de los estudios desarrollados y presentan distintas metodologías y tareas. Aquí se destacan dos pares de métodos utilizados: la comparación *versus* valores y explicaciones contra una sola respuesta. Las tareas son variadas y con intervenciones individuales.

Los autores referidos también comentan acerca de las variables que afectan el desempeño del razonamiento proporcional y que son importantes para el futuro desarrollo de secuencias didácticas y examinan de qué manera interfieren en el desempeño de los estudiantes. Mencionan que existen diversas variables que intervienen en la comprensión de problemas de proporcionalidad, tales como: complejidad numérica, estructuras de las variables, contexto de las variables, género y edad, inteligencia, modelos de instrucción e intervención individual.

Algunas de esas variables se consideran en el diseño de las actividades de la secuencia didáctica utilizada en este estudio. Las variables consideradas son: la complejidad numérica, la estructura de las variables, el contexto de las variables y los modelos de instrucción escolar. La complejidad numérica se refiere al uso de los números y a las razones, a la presencia de la unidad y a problemas de comparación y de razón. La estructura de las variables puede ser usada para definir una secuencia jerárquica de razonamiento proporcional y algunos estudios utilizan la variación de problemas de contexto. El contexto de las variables en muchos estudios varía la estructura de los problemas usados en dicho contexto y los modelos de instrucción se refieren al tipo de instrucción escolar recibida y a los efectos que ésta tiene en el aprendizaje del razonamiento proporcional.

Por otra parte, Hart, Johnson, Brown, Dickson y Clarkson (1982) desarrollaron un proyecto de ciencias y matemáticas para la enseñanza de la secundaria denominado CSMS, que posteriormente dio lugar a otro proyecto de investigación denominado "Estrategias y errores en la matemática de secundaria" y en este proyecto se hace referencia al tópico de razón y en particular al de razón y proporción, que es uno de los temas de la matemática de la escuela secundaria.

El análisis de los resultados de la preentrevista revela que los niños usaban términos tales como "similar" o "algunos" para describir el número de lados, *vgr.*: "alguna área". En el poscuestionario los niños entrevistados mostraron diferentes respuestas en términos del reconocimiento de los factores de escala y utilizaron el centro de aumento o la idea de pares de líneas para resolver los problemas. El análisis integral de los resultados reveló que los niños utilizaban estrategias aditivas y de área para la descripción de las diferentes estrategias. La variación en el desempeño puede atribuirse a aspectos de la instrucción escolar. Los profesores se concentraron en la producción de esquemas particulares para el trabajo, ignorando los prerrequisitos y habilidades para el trabajo durante las clases.

Los resultados de esos trabajos nos revelan que los niños ven el concepto de razón como una operación esencialmente aditiva y no multiplicativa y que repiten la adición como sustitución de la multiplicación. Otros aspectos de la enseñanza fueron los ángulos y su invariancia ante el aumento. Esto ayudó a explicar la variación en el desempeño de los niños en relación con las partes regulares e irregulares de figuras.

Otro asunto importante es el contexto de los problemas y el papel que desempeña la naturaleza de las relaciones numéricas que acaban por influir en la dificultad del problema; pero estos aspectos pueden comprenderse mejor si los profesores varían las relaciones numéricas y el contexto de los problemas sobre pensamiento proporcional.

Estos estudios influyeron en la manera como fueron diseñadas las actividades para el estudio que aquí presentamos, así como la manera en que se analizaron las producciones de los estudiantes al enfrentar tareas de razonamiento proporcional. Posteriormente, esos antecedentes resultaron fundamentales en el análisis de actividades que ponen de manifiesto las dificultades de los estudiantes para el tránsito de las estrategias aditivas a las multiplicativas.

Finalmente, Streefland (1985, citado en Hart, 1982) sugiere que el aprendizaje de razón y proporción es un proceso que empieza con la comparación cualitativa, y argumenta que no deberían introducirse tan de prisa la formalización y la enseñanza de algoritmos, pues la proporción inicialmente es percibida por los niños en situaciones realistas. A partir de estos estudios, se pretende conducir a los alumnos al pensamiento algebraico a través de la exploración de la percepción proporcional intuitiva y de aspectos de comparación cuantitativa y cualitativa, apoyándose en tablas de proporción.

Procesos de generalización

De acuerdo con Mason (1985), el álgebra no se debe enseñar como parte separada del programa de aritmética y geometría, pues trazar una línea divisoria entre ambas no es recomendable, ya que el conocimiento algebraico se relaciona con todo el conocimiento matemático. Con base en estas ideas, se propone la incorporación de un modelo de enseñanza que tenga en cuenta los aspectos cognitivos, el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico) y la organización de situaciones que incorporen aspectos significativos para el alumno. En este sentido, las situaciones significativas tienen un carácter diferente al comúnmente usado; aquí importa crear situaciones que hayan sido debidamente organizadas a partir del conocimiento que los alumnos ya adquirieron y también sobre el conocimiento de las dificultades que enfrentan en el aprendizaje escolar.

La comunidad internacional de didactas del álgebra reconoce cuatro enfoques (Bednard, Lee y Kieran, 1996) de enseñanza: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas;

la modelización de situaciones matemáticas y de situaciones concretas, y el estudio de situaciones funcionales y la resolución de problemas.

Según Mason (1985), la *generalidad* es fundamental para el pensamiento matemático y algebraico. La generalización en álgebra es algo primario hacia la abstracción matemática y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades que favorecen la articulación de la generalización en situaciones cotidianas. Por consiguiente, para aprender el lenguaje algebraico, es importante que el alumno tenga algo que comunicar, para ello necesita percibir un patrón o una regularidad y después intentar expresarlo y comunicarlo a alguien. Para el referido autor hay cuatro etapas para trabajar la generalidad en el salón de clases:

a. Percibir un patrón
b. Expresar un patrón
c. Registrar un patrón
d. Probar la validez de las fórmulas

a. Percibir un patrón

Se puede percibir un patrón a través de la sucesión de figuras y, entonces, pueden surgir preguntas matemáticas, como por ejemplo: ¿cuál sería una regla para reconocer el patrón? Se hace necesario el uso de técnicas matemáticas para generar los números o patrones, *vgr.*, recursividad, la inducción. Una de las ideas centrales es que un primer encuentro con el álgebra pueda realizarse partiendo de la identificación y comunicación de patrones o de relaciones, las cuales se pueden establecer con ejemplos particulares para que los niños perciban lo que es común en esas situaciones, y *decir y registrar* lo que ellos percibieron.

b. Expresar un patrón

El siguiente paso es expresar el patrón. Es necesario decir y registrar un patrón para que posteriormente pueda hacerse una reflexión sobre él. Este tipo de actividad puede facilitarse mediante un trabajo colaborativo en el salón de clases, en el que los alumnos puedan trabajar en equipo y puedan comunicar sus resultados a los otros, preguntando y cambiando sus percepciones, hasta llegar a un acuerdo. Aquí, el profesor actúa como un mediador de la actividad, haciendo preguntas que lleven a los estudiantes a reflexionar sobre sus propias ideas.

c. Registrar un patrón

Registrar un patrón hace posible la verificación de la regla. Esta actividad puede ser apoyada por dibujos o palabras, para posteriormente describir las variables clave de un problema.

d. Probar la validez de las fórmulas

Para que una fórmula tenga validez, debe probarse de diferentes formas, como por ejemplo, a través de su aplicación en otros casos donde se pueda dar una respuesta por otros medios o haciendo cálculos; dibujando; contando o verificando su consistencia. Pero también es importante que la regla sea correcta y, para eso, se necesita tener una noción de *lo general,* lo cual involucra la idea de cómo un ejemplo *particular* puede mostrar *lo general*. Para mostrar *lo general* es necesario reestructurar el ejemplo particular y señalar características *generales,* lo cual se logra observando características específicas en cada caso y haciendo notar que, a pesar de que cambien, lo hacen de manera regular.

A diferencia de lo que propone Mason con respecto a la última etapa para trabajar los procesos de generalización, la prueba de la validez de las fórmulas, Ursini (1993) observó en un estudio realizado con niños de secundaria (12-13 años de edad), que los alumnos tenían dificultades para reconocer patrones si no cubrían las cuatro etapas mencionadas por Mason. De esa manera, se destaca la importancia de que la enseñanza cubra dichas etapas, a fin de que los alumnos puedan comprender y utilizar adecuadamente el lenguaje algebraico.

El trabajo con patrones también está recomendado en los estándares curriculares y de evaluación del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 1989). En este documento se recomienda el uso de patrones desde muy temprana edad (lo equivalente a la enseñanza preescolar) con extensión hasta los grados superiores, ya que señala que el trabajo con procesos de generalización puede, inicialmente, desarrollarse de manera intuitiva, al observar la regularidad y desarrollar un trabajo con patrones. De acuerdo con este documento, en la educación preescolar, que equivale a los niveles 5-8, el trabajo con matemáticas debe incluir la exploración de patrones y de funciones para que los estudiantes sean capaces de:

- Descubrir, extender, analizar y crear una amplia gama de patrones.
- Describir y representar relaciones con tablas, gráficas y reglas.
- Analizar relaciones funcionales para explicar de qué manera un cambio en una cantidad provoca un cambio en la otra.
- Utilizar patrones y funciones para representar y resolver problemas.

En el currículo mexicano, este contenido (el de patrones y generalización) no aparece con un gran énfasis en la escuela primaria; sin embargo, hay una presencia extensa del razonamiento proporcional. A partir de esto, se asignan significados de la comparación cuantitativa y cualitativa de cantidades. La idea de variable y de relación funcional se introducen en una etapa más avanzada que conduce, a su vez, hacia los procesos de generalización.

De acuerdo con Pegg (1990, citado en Durán Ponce, 1999), el descubrimiento de patrones requiere el trabajo en tres procesos a seguir:

- Experiencias de actividades con patrones numéricos.
- Expresar las reglas que caracterizan patrones numéricos particulares mediante oraciones, involucrando a los estudiantes para que hagan aclaraciones y precisiones.
- Propiciar que los estudiantes expresen en forma abreviada dichas reglas.

Para este autor, la parte más compleja de la introducción al álgebra requiere el trabajo con patrones numéricos hasta llegar a la descripción de esos patrones utilizando la notación algebraica, y recomienda las siguientes actividades:

- Desarrollar por escrito las reglas que caracterizan un patrón numérico.
- Comparar diferentes alternativas correctas y que son originarias de un mismo patrón.
- Generar patrones numéricos a partir de una regla dada.
- Encontrar varias reglas para un mismo patrón.
- Socializar con los estudiantes el surgimiento de patrones numéricos.
- Explicar la creación de reglas que caracterizan patrones numéricos.

Los estudios desarrollados por MacGregor y Stacey (1993) con estudiantes australianos revelan que, cuando se trabaja con patrones numéricos, los niños presentan dificultades para describir y expresar algebraicamente dicho patrón.

El estudio desarrollado por Durán Ponce (1999) con estudiantes de 6º año de primaria revela que, con el programa de enseñanza que se utiliza, los niños consiguen avanzar conceptualmente respecto al reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras. Esto se manifiesta cuando usan inicialmente un procedimiento de tipo recurrente para el uso de la relación horizontal. Algunos alumnos tenían un desempeño menor cuando trabajaban solos que cuando lo hacían con ayuda de un experto.

Reggiani (1994) afirma que la generalización es un término utilizado en las matemáticas para indicar el paso de lo particular a lo general y ver lo general en casos particulares. Para la autora, el trabajo con la generalización constituye un aspecto indispensable para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Varios estudios con alumnos de 11-14 años sobre el aprendizaje del lenguaje de programación han resaltado la coexistencia de dificultades específicas conectadas al ambiente de la programación con la dificultad relacionada con el requisito de la formalización. Esta conexión aparece en el uso de cualquier idioma formal y con dificultades más profundas conectadas a la conceptualización de las estructuras involucradas. Estas últimas podrían atribuirse a dificultades de generalización. Las investigaciones describen algunas limitaciones en habilidades espontáneas para pasar de lo particular a lo general y recomiendan que los niños sean estimulados con procedimientos dirigidos. En estos estudios se afirma que el trabajo en edades tempranas requiere ser estimulado por una intervención externa, a fin de que el niño pueda pensar en términos prealgebraicos, ya que la generalización es un proceso gradual y, como adquisición continua, está conectada al conocimiento algebraico. Los resultados revelan que la generalización no es una adquisición estable y el papel de la verbalización escrita desempeña un papel importante en la discusión en el salón de clases. En este sentido, el estudio piloto que aquí se presenta pretende ofrecer a los niños de 10 a 11 años una secuencia didáctica mediante la cual puedan generalizar situaciones, a fin de poder ir desarrollando el pensamiento algebraico. Por otro lado, los estudios realizados por Hoyles y Sutherland (1989) en el proyecto Logo Math revelaron que el trabajo con la generalización era un camino importante y que su investigación con el ambiente Logo mostraba evidencias importantes acerca de la contribución del trabajo en parejas cuando los niños programaban en este ambiente.

A partir de los estudios sobre generalización descritos brevemente con anterioridad, se advierte que el trabajo necesita ser dirigido por alguien más experto y que es necesario ofrecer a los estudiantes situaciones problema donde no sólo puedan reconocer patrones, sino que también puedan expresarlos adecuadamente. En este sentido, se considera oportuna la elaboración de una secuencia didáctica en esta dirección, la cual está conectada a la proporcionalidad aritmética y geométrica; con el propósito de conferir significados a los procesos de generalización en edades tempranas, como un camino alterno de tener acceso al pensamiento algebraico.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

CARÁCTER CUALITATIVO DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación es de tipo cualitativo, estudia los fenómenos que ocurren durante los procesos de enseñanza y aprendizaje como un conjunto de diversas variables que se deben considerar a partir de una visión más dinámica, con el propósito de comprender los procesos, los significados y la naturaleza social del aprendizaje, así como el papel que el investigador puede asumir en un estudio, por ejemplo, en el diseño y ejecución de una secuencia de enseñanza.

El papel del investigador en el estudio es de carácter participativo, pues interviene para promover la discusión en el grupo, otorgando a los estudiantes información necesaria para que puedan avanzar conceptualmente.

EL PAPEL DE LA COLABORACIÓN (INTERACCIÓN NIÑO-*MEDIADORES*-INVESTIGADORA)

Las prácticas pedagógicas más tradicionales y conservadoras sitúan a los actores de los procesos de enseñanza y aprendizaje en papeles asimétricos: por una parte, el profesor es el único emisor de información, mientras que el estudiante mantiene un papel pasivo de receptor. En cambio, los nuevos modelos de enseñanza promueven el aprendizaje colaborativo, donde el conocimiento se construye mediante la interacción social entre alumno y profesor (Butto, Delgado, Zamora *et al.*, 2002).

El informe de Cockcroft (1982, citado en Hoyles y Sutherland, 1989) afirma que el lenguaje es una parte esencial en la formación y expresión de las ideas matemáticas. Es importante que los niños sean estimulados a exponer sus concepciones, justificar sus estrategias y representaciones. Al usar la discusión en el salón de clases como una metodología de trabajo, se pueden explotar varios aspectos, tales como la interacción entre alumnos, el contexto del conocimiento matemático y las funciones cognitivas y comunicativas como escuchar y hablar. De acuerdo con Balacheff y Laborde (1984, citado en Hoyles y Sutherland, 1985), cuando hablamos, construimos significados, reconstruimos lo que decimos, y las contradicciones otorgan un incremento importante en los niveles de comprensión. En este sentido, el concepto de *micro mundo* –*Logo world*– puede propiciar la discusión en el salón de clases, donde los alumnos pueden probar y modificar sus ideas y cambiar los niveles de representación, partiendo de un nivel más concreto hacia un nivel más abstracto y viceversa; estimula a los alumnos para que hagan suya la actividad, estimula la demanda sistemática de recordar y verificar lo que hacen, reconsiderando el proceso y confrontando dificultades y concepciones (Hoyles y Sutherland, 1989).

MONTAJE EXPERIMENTAL

Se trabajó con una pareja de niños de 5º año de primaria de una escuela particular del Distrito Federal. Las sesiones de trabajo se realizaron en las instalaciones del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Los niños estaban acostumbrados a una enseñanza tradicional de las matemáticas. Se trabajó en pareja con la colaboración de la entrevistadora.

A fin de alcanzar los objetivos expuestos, hemos dividido el estudio en cuatro etapas: cuestionario inicial, sesiones experimentales, cuestionario final y entrevista clínica. A continuación se hace una breve descripción de cada una de las etapas.

Cuestionario inicial

En esta etapa se aplican y analizan dos cuestionarios iniciales (razonamiento proporcional y procesos de generalización), cuyo objetivo es identificar posibles dificultades y competencias matemáticas en los dominios que son explorados en la secuencia didáctica: razonamiento proporcional y procesos de generalización, como se muestra en los cuadros 1 y 2.

Cuadro 1 Descripción del cuestionario inicial de razonamiento proporcional

Número de pregunta	Ideas matemáticas	Planteamiento de la pregunta
1	Percepción visual intuitiva sobre proporcionalidad-figura simples.	Se pide observar un dibujo y marcar la que es fotografía del dibujo anterior. Explicitar en qué se fijó para escoger la fotografía.
2	Proporcionalidad geométrica: significado de "mitad".	Se pide hacer un dibujo reduciendo las medidas.
3	Proporcionalidad geométrica: significado de "dos veces mayor". Se da la escala.	Se pide hacer un dibujo aumentando dos veces las medidas del modelo dado.
4	Proporcionalidad geométrica: significado de "tres veces mayor". Se pide descubrir la escala.	Se pide hacer un dibujo aumentando tres veces más las medidas del modelo dado.
5	Proporcionalidad aritmética.	Se pide llenar un cuadro para distintas proporciones entre la cantidad de litros de agua y cantidad de personas. En seguida, se pide transformar el cuadro en una gráfica y responder cuál es la proporción de agua por cantidad de personas.
6	Proporcionalidad geométrica.	Se pide observar una serie de figuras de distintas proporciones y escribir las medidas que faltan.
7	Escala geométrica y graficación en el plano.	Se pide encontrar la relación entre las medidas del mapa de la isla y su equivalente en pasos.

Sesiones de trabajo

Esta etapa corresponde a la realización, por parte de los alumnos, de una secuencia temáticamente dividida en dos partes: razonamiento proporcional y procesos de generalización. El trabajo es realizado por los niños en pareja y en dos ambientes alternadamente (lápiz y papel, y ambiente Logo).

En las actividades de la primera secuencia, se exploran ideas de proporcionalidad numérica y geométrica, se parte de la comparación de segmentos con dife-

Cuadro 2 Descripción del cuestionario inicial de los procesos de generalización

Número de pregunta	Ideas matemáticas	Planteamiento de la pregunta
1	Secuencia aritmética con números enteros positivos y negativos.	Se pide completar series aritméticas con números enteros positivos y negativos
2	Secuencia geométrica.	Se pide completar series geométricas
3	Variable: relación funcional.	Se pide observar las tarjetas y completar la tabla con los valores que aparecen en cada tarjeta (entre peso y edad) y se les pregunta qué se puede decir entre el peso y la edad y los años de Fabio.
4	Variable: relación funcional lineal.	Comparar el número de plástico producido y el número de máquinas; encontrar relación entre ambos y encontrar una regla general.
5	Progresión geométrica y relación funcional.	Se pide observar 4 edificios que están siendo pintados y se pregunta cuántos pisos deberían ser pintados en el 5º edificio. Se pide completar un cuadro, transformar los datos en una gráfica y encontrar una regla general.

rentes medidas, y se forman partes de una progresión geométrica creciente, 30, 60, 120 con una regla de construcción. Enseguida, se continúa con la comparación cuantitativa de longitudes numéricas, sus múltiplos y submúltiplos como doble, triple y mitad; posteriormente, se sigue el trabajo con secuencias numéricas y geométricas, con razones no enteras o recíprocas de enteras (1/2, 1/3, etc.) hasta llegar a la idea de variación funcional.

En la segunda parte de la secuencia didáctica, se trabaja en dos ambientes simultáneos (lápiz y papel, y ambiente Logo). En esta parte, se utilizaron actividades que exploraron comandos del programa Logo en modo directo y sintético en el contexto de figuras geométricas, para posteriormente explorar procesos de generalización en la percepción de secuencia aritméticas y geométricas; la percepción, expresión y registros de patrones, número generalizado, variable y variación funcional.

Cuestionario final

Se aplica un cuestionario al término de la etapa experimental, con el propósito de verificar el desempeño de los niños en la secuencia didáctica y analizar su evolución hacia el pensamiento algebraico, contrastando los resultados con los del cuestionario inicial.

A continuación damos ejemplos de las actividades que fueron exploradas en las secuencias.

Primera etapa: los estudiantes son llamados a comparar medidas de figuras en la pantalla, comparar los datos de las tablas y responder a algunas preguntas (actividad 1). En otra actividad, los estudiantes deben comparar las medidas de una silla y de una mesa en la pantalla, comparar valores de la silla y de la mesa en la tabla y responder algunas preguntas (actividad 2).

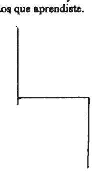
Actividad 1

Ficha de trabajo con LOGO

Nombre:______ ______ ______

Fecha:___/___/___

Observa la figura de la silla. Dibuja una silla en la misma proporción usando los comandos que aprendiste.



Programa para tu silla

Ficha de trabajo con LOGO

Nombre:______ ______

Fecha:___/___/___

1) En qué te fijaste para hacer el dibujo de la silla?

2) ¿Qué encuentras al comparar los tres dibujos de la silla?

3) ¿En qué se parecen las dos primeras sillas y la que tú dibujaste?

Ahora , llena la tabla con los siguientes datos de cada silla

Sillas	Altura de la silla	Medida del asiento	Medida de la pata	Medida de la otra pata
Silla n°1				
Silla n° 2				
Silla n° 3				
Silla n° 4				

a) ¿Qué observas entre la altura de las sillas?

b) ¿Qué observas entre las patas de las sillas?

c) Qué observas entre los asientos de las sillas?

d) ¿Podrías escribir lo que observas entre las cuatro sillas?

Actividad 2

Ficha de trabajo con LOGO

Nombre:

Fecha:

1) Cada pata de la silla debe ser mitad de cada pata de la mesa. Dibuja una silla.

Programa para silla.

Ficha de trabajo con LOGO

Nombre:

Fecha: / /

Ahora llena la tabla con las medidas de la mesa

Mesas	Pasos de la tortuga
Altura	
Ancho	

Ahora llena la tabla con las medidas de la silla

Sillas	Pasos de la tortuga
Altura	
Asiento	
Patas	

Ahora compara las medidas de la mesa y de la silla y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál debería ser la altura de la silla?

b) ¿Cuál debería ser el tamaño de las patas de la silla?

c) ¿Cuál debería ser el tamaño del asiento de la silla?

d) ¿En qué te fijaste para responder a las preguntas anteriores?

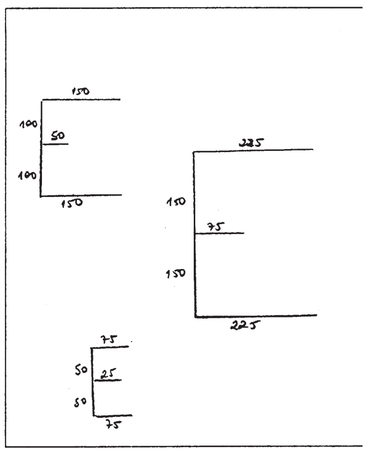
e) ¿Podrías escribir en que se parecen la silla y la mesa?

Segunda etapa: en esta actividad se pide a los alumnos que observen una secuencia numérica con la letra "E" y reproduzcan la figura (cuarto y quinto elemento de la serie de la actividad número 1); enseguida se pide a los niños que llenen una tabla numérica con las medidas de las figuras dadas y las producidas por ellos y se les pregunta cuáles serían las medidas de un décimo elemento de la serie, para intentar descubrir un patrón. A continuación, los estudiantes deben completar el patrón de la secuencia aritmética (cuadrado blanco) y de la secuencia geométrica (cuadrado azul, actividad 2). Los estudiantes llenan la tabla con el número de mosaicos azules y blancos, número de mosaicos azules y número de mosaicos blancos; responden acerca de cómo se obtienen las diferentes secuencias y deben encontrar una regla para relacionar mosaicos azules y blancos. Por último, los estudiantes llenan una gráfica con el número de mosaicos azules en función de los mosaicos blancos y se les pregunta cuáles varían y cuál número crece más rápido.

Actividad número 1

Ahora vamos a trabajar con Logo!!

Observa la serie de figuras:



Ahora, dibuja la 4ª y 5ª figura de la serie.

Ahora, llena la siguiente tabla para cada figura de la serie

Letra	Medida de la línea de arriba horizontal (pt)	Medida de la línea del centro horizontal (pt)	Medida de la línea de abajo horizontal (pt)	Medida de la línea Vertical (pt)
Nº 1	75	25	75	50
Nº 2				
Nº 3				
Nº 4				
Nº 5				

¿Hay alguna relación al comprar las medidas de cada letra?

Trata de contestar la siguiente pregunta sin dibujar

Si continúas dibujando la figura número 10
¿Cuáles serían las medidas de la letra E (de las líneas horizontales y verticales?

Ahora, haz un programa que pueda dibujar todas esas E y cualquier otra E con otras medidas.

RESULTADOS DEL ESTUDIO

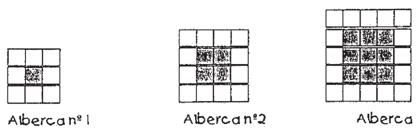
Cuestionario inicial

Las respuestas al cuestionario inicial fueron categorizadas en niveles de comprensión conceptual. Las dimensiones de análisis consistieron en estrategias aditivas/multiplicativas para el razonamiento proporcional y estrategias aritméticas/prealgebraicas para los procesos de generalización.

En el primer cuestionario (razonamiento proporcional), los niños fueron agrupados en dos niveles: estrategias de tipo multiplicativo y estrategias de tipo intermedio (este tipo de estrategias se caracteriza por mezclar dos estrategias: aditiva y

Actividad número 2

Observa las siguientes albercas con sus bordes



Ahora, dibuja la alberca que sigue:

Llena la tabla con los siguientes datos:

Número de albercas	Número total de mosaicos azules y blancos	Número de mosaicos azules	Número de mosaicos blancos
Alberca nº1			
Alberca nº 2			
Alberca nº 3			
Alberca nº 4			

1) ¿Cómo vas obteniendo el número de mosaicos blancos?
____

2) ¿Cómo vas obteniendo el número de mosaicos azules?
____

3) ¿Qué hay más? ¿Mosaicos azules o mosaicos blancos?
____

4) ¿Como encuentras el número de mosaicos blancos si conoces el lado de la alberca?___________________________

5) ¿Como encuentras el número de mosaicos azules si conoces el lado de la alberca?___________________________

multiplicativa). En el segundo cuestionario (procesos de generalización) los niños fueron clasificados en distintos niveles de comprensión conceptual: nivel aritmético y nivel prealgebraico. Este tipo de clasificación se mantuvo en el poscuestionario con algunas variaciones, como por ejemplo, una niña presentó mayor claridad para percibir la existencia de un patrón en la secuencia aritmética y geométrica.

Los resultados del cuestionario de razonamiento proporcional revelan que los niños no presentaban una dificultad inicial para descubrir la percepción visual intuitiva sobre proporcionalidad. En una de las actividades propuestas, se les presentaron figuras ampliadas y reducidas y no tuvieron dificultad para escoger la figura que era la fotografía del modelo dado. Cuando se les pide identificar la proporcionalidad geométrica con el significado *doble* o *tres veces mayor* (escala dada) encuentran gran dificultad, pero en el mismo problema, cuando se les pide que descubran la escala, les resulta sumamente difícil. En preguntas donde se les pide resolver problemas que incluyen la idea de proporcionalidad aritmética, comparar datos en una tabla y verificar cuál es la proporción existente, no encuentran dificultades.

En el segundo cuestionario inicial sobre procesos de generalización, encuentran dificultades para percibir las secuencias geométricas. Sin embargo, cuando se pide a los alumnos que completen secuencias aritméticas de figuras, escriben los valores correspondientes a cada figura de manera correcta, incluso cuando deben colocar valores fraccionarios.

Cuando se les pide que describan por escrito y que aborden en la tabla la relación funcional (peso y edad) relacionada con la propia organización del problema, al parecer esta dificultad se incrementa, porque les resulta difícil ordenar los datos del problema para poder dar una respuesta. Sin embargo, uno de los alumnos llega a responder que la relación entre peso y edad va aumentando y disminuyendo.

En el problema en el que se les pide observar cuatro edificios que están siendo pintados y se les pregunta cuántos pisos deberían ser pintados en el quinto edificio, los niños entrevistados encuentran que existe una progresión geométrica y responden correctamente. En seguida, se les pide completar una secuencia de edificios pintados, así como encontrar la relación entre el número de edificio y los pisos pintados y hacer una gráfica para explicitar la relación funcional existente. Los niños son capaces de completar una secuencia geométrica de edificios pintados, hacen la gráfica de manera correcta y, cuando deben encontrar una relación entre el número de pisos pintados en un edificio y el número de pisos pintados en el siguiente edificio, dan como respuesta el doble del edificio anterior.

Conclusiones del cuestionario diagnóstico

Una vez analizados los cuestionarios diagnóstico, se observa que el razonamiento proporcional y los procesos de generalización no son necesariamente contenidos matemáticos que se complementan entre sí. Al contrario, los resultados hacen evidente que se trata de comprensiones que ocurren de manera separada. En el cuestionario diagnóstico de razonamiento proporcional, por ejemplo, los niños no presentan dificultades en aumentar figuras al doble o al triple, cuando la escala está dada, pero no ocurre lo mismo cuando deben descubrir la escala. A pesar de que llegan a la respuesta correcta, lo hacen con dificultad, pero consiguen descubrir la escala y resolver el problema presentado. Cuando se les presenta el cuestionario diagnóstico de procesos de generalización, muestran tener dificultades para resolver secuencias geométricas; no encuentran, por ejemplo, que la relación es multiplicativa y la resuelven como si fuera una secuencia aritmética, es decir, sumando. Pero cuando se les presenta otro problema que involucra una progresión geométrica, esa dificultad no es tan evidente y resuelven el problema satisfactoriamente. Esto parece indicar que el pensamiento de los niños a esas edades pasa por una transición entre estrategias aditivas y multiplicativas.

Secuencia didáctica (razonamiento proporcional)

Los niños transitaban entre estrategias de tipo aditivo, premultiplicativa y multiplicativa. Algunos alumnos reconocían una relación aditiva en casos multiplicativos, pero no siempre las extendían a otras situaciones.

En otras ocasiones, el alumno reconocía y establecía una relación entre los segmentos y los valores numéricos, multiplicando ambas relaciones y encontrando que la relación proporcional era una relación de tipo multiplicativo.

En actividades introductorias (hacer un cuadrado en Logo) se les pedía que construyeran un cuadrado del triple del modelo dado, los niños descubrían que si el ordinal es 45 de lado, entonces deberían construir un cuadrado de lado 135 y se daban cuenta de que no cabía en la pantalla, entonces tomaban como unidad 90, buscaban y descubrían que 90 es divisible entre 3, luego la tercera parte (que es 30) puede obtenerse restando sucesivamente tres veces la tercera parte y luego verifican que 90 es el triple de 30. También comprobamos que los niños son capaces de invertir una relación proporcional muy simple $y = 2x$, $x = (1/2)$ y reconocen que un cuadrado debe tener los cuatro ángulos iguales; en el lenguaje, siempre utilizan una proporción entera “el doble de”, aunque en el cálculo usan una proporción fraccionaria (la mitad).

En otra actividad (en Logo), se pide a los alumnos que comparen segmentos cuyas medidas están en una progresión aritmética, dando los primeros tres elementos de la progresión y se les pide que calculen el doble del segundo elemento: 2 ¥ 60 = 120 que coincide excepcionalmente con el cuarto elemento de la progresión. En el segundo ítem, llenan una tabla y se les pide que reflexionen; los niños pudieron reconocer el patrón de la serie y calcular el quinto elemento de la serie. Esto indica que poseen ambos acercamientos, aditivo y multiplicativo, y que, incluso, son capaces de plantear explícitamente la relación algebraica (1) al reconocer el orden del paradito (*n*) como “variable independiente” y el valor del paradito (paradito) como “variable dependiente”. La relación (1) puede interpretarse también como que los niños manejan la idea de función o correspondencia.

En otra actividad en Logo (dibujar una mesa), al reproducir esa figura en la pantalla, los niños tuvieron que fijarse en las medidas de todos los segmentos de la mesa y, a partir de esas medidas, encontrar una relación equivalente para las medidas que se usarán en la pantalla. Sólo después de eso, los niños percibieron la relación proporcional entre los segmentos de la figura producida y la tabla con los valores de cada segmento; los comandos en Logo los auxiliaba para percibir mejor la relación proporcional.

Secuencia didáctica (procesos de generalización)

Los niños fueron clasificados en las categorías de relación premultiplicativa y relación multiplicativa, lo que ciertamente indica que comprenden algunas ideas importantes, pero que necesitan recurrir a la comparación numérica para poder avanzar conceptualmente. Esto nos da indicios de que aún están apegados al campo de las estructuras aditivas y que tienen dificultad para percibir el patrón de las figuras producidas. Existe una necesidad de comparar valores numéricos y sólo logran relacionar las secuencias geométricas con los valores numéricos después de compararlos; antes, les resulta una tarea muy difícil y necesitan el apoyo gráfico.

En una de las actividades se presenta una secuencia geométrica con dibujos (actividad en lápiz y papel) y se les pide que dibujen un cuarto elemento de la serie. Inicialmente, los niños responden que las figuras van aumentando y completan la tabla con los valores de cada elemento de la serie. Cuando se les pide decir cuántos elementos tendría un décimo elemento de la serie, al principio no perciben que, para responder esta pregunta, deben encontrar un patrón o una regla, sino que van haciendo cada elemento de la serie, uno a uno, y así llegan al resultado.

En otra actividad, se les dio una secuencia geométrica de la letra E (actividad en Logo) conforme a la figura de abajo y se les solicitó que dibujaran el cuarto y quinto elementos de la serie en pasos de la tortuga (letra E). Inicialmente, los niños dibujaron la letra E en lápiz y papel y descubrieron que había una relación proporcional entre los segmentos que la formaban. Esto también se les facilitó cuando compararon los valores de las medidas de cada letra en la tabla.

En otra actividad (en lápiz y papel), se les pidió observar el dibujo de tres albercas y se les dijo que utilizaran y describieran una relación funcional. Aquí, los niños deberían fijarse en el número total de mosaicos, los azules y los blancos, y descubrir la relación existente entre ellos. Aquí también debían observar esa relación en una gráfica y responder de qué manera varían. En esta última respuesta, donde los niños deberían responder en qué relación variaban el número de los mosaicos azules y el de los mosaicos blancos, tuvieron dificultad y no pudieron encontrar dicha relación.

DISCUSIÓN

Una introducción temprana al álgebra con las características aquí descritas parece plausible y en correspondencia con perspectivas de naturaleza histórica y curricular. Los primeros resultados del estudio señalan algunas competencias y algunas dificultades específicas de las edades de los niños participantes. Los niños percibieron la relación proporcional entre los segmentos de la figura producida, la tabla con los valores de cada segmento y los comandos en Logo los auxiliaron para percibir mejor la relación proporcional. Además, fueron capaces de invertir una relación proporcional muy simple $y = 2x$, $x = (1/2)$ y reconocer que un cuadrado debe tener los cuatro ángulos iguales, en el lenguaje verbal, siempre utilizaron una proporción entera "el doble de", aunque en el cálculo usaron un factor fraccionario (la mitad). También manejaron la idea de función o correspondencia.

La mayor dificultad se presentó cuando, en la segunda parte de la secuencia didáctica, los niños tuvieron que trabajar con secuencias geométricas en contextos distintos, supuestamente deberían interconectar dicho contenido con otra situación y eso no fue tan evidente para ellos. Aquí los niños encontraron muchas dificultades y sólo las superaron cuando se les presentó una tabla numérica y tuvieron la oportunidad de comparar valores numéricos. El vínculo entre lo numérico y lo geométrico está ausente muchas veces en la instrucción escolar. Por otro lado, esto nos permite verificar que tales vinculaciones son importantes (aritmética y geométrica), ya que ambas pueden ofrecer más significado para el alumno. En este sentido, el apoyo gráfico y numérico del ambiente Logo parece tener efectos satisfactorios.

Al relacionar el razonamiento proporcional con las primeras ideas algebraicas empezaron a aparecer algunas dificultades, principalmente para reconocer una secuencia geométrica o aritmética y, en ellas, la percepción de un patrón que las organiza. En actividades posteriores, cuando tuvieron que tratar con una relación funcional y percibir cómo varían los datos en una situación particular, no les fue posible hacerlo, a pesar de que creemos que es factible ofrecer actividades donde la relación funcional sea vista como una relación esencialmente proporcional, donde el niño tenga la oportunidad de verificar cómo varían las cantidades.

En una etapa posterior del estudio se pondrá énfasis en el tránsito entre las estructuras aditivas y multiplicativas, así como también en el análisis simultáneo de dichas estructuras. Nuestro propósito es verificar si, con una secuencia didáctica adecuada, los niños son capaces de superar los obstáculos encontrados y si la conjugación de diferentes mediadores (Logo y lápiz y papel) posibilita un cambio en el nivel conceptual capaz de superar la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo y la discriminación entre sistemas multiplicativos y aditivos.

Creemos que llegar al álgebra, a través del razonamiento proporcional y los procesos de generalización, es un camino viable, pero ciertamente los niños encontrarán muchos obstáculos que tendrán que superar, tales como el tránsito de las estructuras de tipo aditivas hacia las de tipo multiplicativo, pues al abordar secuencias geométricas y la relación funcional, el niño deberá pensar en términos multiplicativos y no aditivos. En este sentido, creemos importante interconectar tres dominios matemáticos: el aritmético, el geométrico y el algebraico. Estudiaremos dicha transición (del campo de las estructuras aditivas a las multiplicativas) en los diversos instrumentos de investigación que serán utilizados en una siguiente etapa del estudio (cuestionario diagnóstico, secuencia didáctica, discurso producido durante las sesiones de trabajo y, específicamente, en las entrevistas clínicas con enseñanza), con el propósito de observar detenidamente tales obstáculos y caracterizarlos, a fin de poder ofrecer a los alumnos actividades que les permitan remontar esos obstáculos en su evolución hacia los conceptos y competencias planteados como metas de aprendizaje.

NOTA

El contenido de este artículo corresponde al estudio piloto que forma parte del proyecto de investigación "Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría", desarrollado dentro del programa de Doctorado en Ciencias (Especialidad en Matemática Educativa) del Cinvestav del IPN.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Secretaría de Relaciones Exteriores por el financiamiento de la investigación "Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría" mediante las becas que otorga el Imexci, por medio de la Dirección General de Cooperación Educativa e Intercambio Académico y al Conacyt, por el financiamiento otorgado al proyecto de grupo: "La incorporación de nuevas tecnologías a la cultura escolar: la enseñanza de las ciencias y las matemáticas en la Escuela Secundaria" (Ref G-263385), en el marco del cual se desarrolla el trabajo aquí presentado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bednarz, N., C. Kieran y L. Lee (1996), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching,* Holanda, Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. R. (1984), *Algebra: Children's Strategies and Errors,* Windsor, Reino Unido, NFER-Nelson.

Butto, C., J. Delgado y J. Zamora (2002), "El ambiente de la hoja de cálculo y aspectos relacionados con el lenguaje", Informe de Investigación, 04.0404.1.01.002.2002, México, UAM-Iztapalapa.

Carraher, D., A. Schliemann y B. Brizuela (2000), "Early Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions", conferencia magistral presentada en el PME-NA XXII; Tucson, AZ, 7 a 10 de octubre.

—— (2001), "Operate You On Unknowns", en *PME 25 Psychology of Mathematics Education,* Utrecht, Holanda, vol. 1, pp 130-140.

Da Rocha Falcão, J. T. (1993), "A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas", en A. D. Schliemann, D. W. Carraher, A. G. Spinillo, L. L. Meira y J. T. da Rocha Falcão (1993), *Estudos em Psicologia da Educação matemática,* Recife, Editora Universitária, UFPE.

Durán Ponce, R. (1999), *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras, por alumnos de sexto grado de primaria,* Tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN.

Filloy, E. (1999), "Modelos Teóricos Locales (MTL): Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa", en *Aspectos teóricos del álgebra educativa,* Grupo Editorial Iberoamérica, capítulo 1.

Filloy, E. y T. Rojano (1989), "Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra", *For the Learning of Mathematics,* vol. 9, núm. 2, pp. 19-25.

Hart, K., D. Johnson, M. Brown, L. Dickson y R. Clarkson (1982), "Ratio: Enlargement", en *Children Mathematical Frameworks 8-13 A Study of Classroom Teaching*, capítulo 9, pp. 191-226.

Herscovics, N. y L. Linchevski (1994), "A Cognitive Gap Between Arithmetic and Algebra", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 27, pp. 59-78.

Hoyles, C. y R. Sutherland (1989), *Logo Mathematics in the Classroom*, Routledge.

—— (1985), *Ways of Learning in a Computer Based Environment: Some Findings of the Logo Maths Project*, Londres, Institute of Education, University of London.

Inhelder, B. y J. Piaget (1958), *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*, Nueva York, Basic Books.

Kaput, J. y M. Blanton (2000), "Generalizing and Progressively Formalizing in a Third-Grade Mathematics Classroom: Conversations about Even and Odd Numbers", conferencia magistral presentada en PME-NA XXII, Tucson, AZ, 7 a 10 de octubre.

Karplus, R. y R. P. Peterson (1970), "Intellectual Development Beyond Elementary School II, Ratio e Survey", Sciences Curriculum Improvement Study, Berkeley, Universidad de California.

Kieran, C. (1992), "The Learning and Teaching of School Algebra", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, MacMillan, pp. 390-419.

Linchevski, L. (2001), "Operating on the Unknowns: What Does It Really Mean?", en *PME 25 Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, Holanda, pp. 140-144.

MacGregor, M. y K. Stacey (1993), "Seeing a Pattern and Writing a Rule", en *PME, Psychology of Mathematics Education*, Ibaraki, Japón.

Mason, J., A. Graham, D. D. Pimm y N. Gower (1985), *Routes of Roots of Algebra*, Gran Bretaña, The Open University Press.

Matz, M. (1980), "Towards a Computational Theory of Algebraic Competence", *Journal of Mathematical Behaviour*, vol. 3, núm. 1, pp. 93-166.

NCTM (1989), *National Standards for Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics.

Noelting, G. (1980), "The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept: Part I. Differentiation of Stages", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 11, pp. 217-253.

Radford, L. (1996), "The Role of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective", en N. Bernardz, C. Kieran e I. Lee (eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, Holanda, Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2001), "Of Course They Can!", en *Proceedings of the 25th Conference of the International Association for the Psychology of Mathematics Education,* Holanda, pp. 145-148.
Reggiani, M. (1994), "Generalization as a Basic for Algebraic Thinking: Observations with 11-12 Years Old Pupils", en *Proceeding of the XVIII PME Conference,* Lisboa, Portugal, pp. 97-104.
Sfard, A. y L. Linchevski (1994), "The Gains and Pitfalls of Reification-The Case of Algebra", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 26, pp. 191-228.
Slavit, D. (1999), "The Role of Operation Sense in Transitions from Arithmetic to Algebraic Thought", *Educational Studies in Mathematics,* Holanda, Kluwer Academic Publishers, vol. 37, pp. 251-274.
Tall, D. (2001), "Reflections on Early Algebra", en PME *25 Psychology of Mathematics Education,* Utrecht, Holanda, pp. 149-155.
Tourniaire y Pulos (1985), "Proportional Reasoning: A Review of The Literature", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 16, pp. 181-204.
Ursini, S. (1993), *Pupils' Approaches to Different Characterizations of Variable in Logo,* Tesis doctoral, Londres, Institute of Education, University of London.
Vygostky, L. S. (1978), "Mind in Society", en *The Development of Higher Psychological Processes,* Harvard University Press.

DATOS DE LAS AUTORAS

Cristianne Butto
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México
cristianne_butto@hotmail.com

Teresa Rojano
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México
trojano@ilce.edu.mx

www.santillana.com.mx/educacionmatematica