Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Moreno Guzmán, Salvador; Cuevas Vallejo, Carlos Armando
Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial
Educación Matemática, vol. 16, núm. 2, agosto, 2004, pp. 93-104
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial

Salvador Moreno Guzmán y Carlos Armando Cuevas Vallejo

Resumen: Uno de los problemas en la enseñanza de las matemáticas es ejercerla de una manera rutinaria y descontextualizada, lo cual nos lleva a verla como algo carente de sentido. Este tipo de enseñanza, que induce a conductas imitativas, produce, entre otras cosas, interpretaciones erróneas en conceptos matemáticos. En este artículo, presentamos un estudio que muestra que tanto estudiantes como profesores, cuando se les propone resolver un problema no rutinario o cuya solución no obedece al esquema en que se enseñó, aplican los algoritmos de manera mecánica, llegando a soluciones inverosímiles y que, a pesar de la obvia contradicción de su solución con el problema propuesto, no son capaces de enmendar o ver su error.

Palabras clave: enseñanza, interpretación, máximos, mínimos, cálculo.

Abstract: One of the problems in mathematics education is a tendency to carry it out in a routinary way and outside of any context, which takes us to see it as something lacking of any sense. This type of education, which leads to imitative behavior, produces misconceptions in mathematical concepts, among other things. In this article, we present a study that shows how students as well as teachers, when asked to solve a non-routine problem or one whose solution does not follow the scheme that was taught, apply the algorithms in a mechanical way reaching incredible solutions and that, in spite of the obvious contradiction of its solution with the proposed problem, they are not able to amend or to see their mistake.

Keywords: teaching, interpretation, maximals, minimals, calculus.

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más graves que confronta la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos es que usualmente se enseña con una fuerte carga operativa, en deterioro de la parte conceptual. Tanto el docente como el alumno ponen énfasis en la parte operativa y dejan de lado la parte conceptual (Amit y Vinner, 1990; Oaks, 1987/1988, 1990; Schoenfeld, 1985; Hiebert y Lefevre, 1986).

Hiebert y Lefevre (1986) anotan que, mientras los procedimientos algorítmicos se aprenden más o menos, o incluso bien, los conceptuales carecen de significado, lo que conduce a un conocimiento procedimental sin sentido, o a lo que Skemp (1976) llama "reglas sin sentido".

Este hecho queda en evidencia cuando los estudiantes se enfrentan a problemas no rutinarios; al respecto, Orton (1983) menciona que la mayoría de los errores se cometen cuando se resuelven problemas de cálculo diferencial que están asociados con aspectos conceptuales. Vinner (1989) informa que, entre estudiantes graduados de la preparatoria *(high school)* que han aprobado un curso de cálculo diferencial y han aprobado los exámenes de admisión con no menos de 80% de aciertos, sólo 24% conoce la interpretación geométrica de la derivada y 7% conoce la definición de derivada por límite. Por su parte, Tutle (1988) encuentra que el porcentaje de respuestas correctas en un examen con preguntas técnicas de cálculo diferencial fue entre 73 y 92; en tanto que el porcentaje de aciertos en preguntas de tipo conceptual está entre 7 y 22.

Muchas y variadas son las razones de estos resultados, y van desde cuestiones educativas, sociopolíticas, económicas, sociales y hasta psicológicas. En este artículo nos referiremos sólo a los aspectos educativos, con la intención de poner en evidencia que cuando la enseñanza de las matemáticas se da de manera prescriptiva, rutinaria y ajena al entorno del estudiante, conduce a interpretaciones falsas alrededor de los conceptos matemáticos.

El presente artículo tiene el propósito de mostrar que, debido a una interpretación errónea que los estudiantes hacen sobre el tema de máximos y mínimos, cuando se les propone resolver problemas no rutinarios proporcionan respuestas inverosímiles; es decir, respuestas que contradicen la solución intuitiva del problema planteado e imposibles de llevar a cabo.

Para validar esta afirmación, se formuló un estudio exploratorio en el que se realizaron diversas mediciones con estudiantes de maestría y de ingeniería, y también con profesores de los niveles medio superior y superior. La elección de los estudiantes se realizó de manera aleatoria en un grupo del primer año de ingeniería y los estudiantes de maestría provenían de diversas escuelas de ingeniería y ciencias.

A continuación, se describirá cómo se delineó el estudio y los resultados obtenidos.

La primera tarea consistió en diseñar problemas, a fin de detectar dificultades que los estudiantes tienen sobre la comprensión de los conceptos de máximos y mínimos. Para lograr nuestros propósitos, se eligieron, de acuerdo con la experiencia profesional de los autores, dos problemas que tuvieran las siguientes características:

- Que fuera un problema práctico que ejemplificara una situación real.
- Interesante para la mayoría de los estudiantes.
- Fácil de entender, aunque no necesariamente fácil de plantear y resolver.
- Con un nivel de dificultad similar al que poseen los problemas típicos de máximos y mínimos que presentan los textos de nivel medio superior.
- Las funciones que resultaran de cada problema deberían ser continuas y diferenciables en todo su dominio.

Adicionalmente, los problemas deberían cumplir los siguientes requisitos:

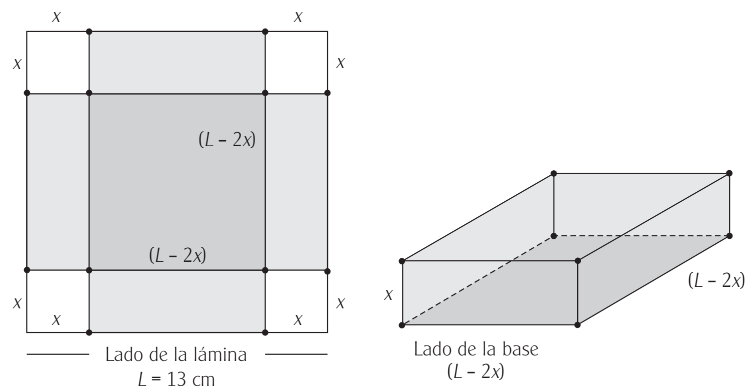
En un primer problema, la función que modelara la situación planteada debería poseer un máximo que se localizara en un punto crítico y cuyo máximo fuera posible de calcular mediante el criterio de la segunda derivada. En un segundo problema, la función tendría que tener un máximo que se ubicara en un extremo de su dominio de definición, en donde el criterio de la segunda derivada no operara. El primer problema, que llamaremos problema 1, se logró localizar en la literatura existente (Leithold, 1972, p. 195; Granville, 1992, p. 58; Swokowski, 1989, p. 195). Sin embargo, el segundo ejercicio, que llamaremos problema 2, se tuvo que concebir con la idea de que el problema cumpliera con las características señaladas anteriormente y, además, con la finalidad de reducir el trabajo de modelado, el problema se diseñó con el mismo propósito de calcular el volumen de una caja. A continuación, se expone el primer problema.

PROBLEMA 1

Determinar las dimensiones de los cuadrados de las esquinas que se deben cortar de una lámina cuadrada de 13 cm de lado[1] para construir una caja de base cuadrada sin tapa, que tenga volumen máximo (véase la figura 1).

[1] La dimensión de 13 cm se eligió de manera que el punto crítico se localizara en un valor no entero y, por ende, no fácil de calcular mediante una tabulación.

Figura 1 Caja que se construye con la lámina de la izquierda



En el problema 1, resulta una función volumen de la forma $V(x) = (13 - 2x)^2x$; y el valor crítico se localiza mediante la ecuación $V'(x) = 0$, resultando $x = 13/6$ cm. Esto da lugar a un volumen máximo

$$V\left(\frac{13}{6}\right) = \left(13 - 2\left(\frac{13}{6}\right)\right)^2\left(\frac{13}{6}\right) = \frac{2}{27}(2\,197)$$

Así, el volumen máximo es $V_{máx} = 162.74$ cm^3, el cual se alcanza cuando la longitud que se recorta es de $x = 13/6$ cm.

Para resolver este problema se les proporcionó a estudiantes y profesores el enunciado del problema con la figura 1. Adicionalmente, se les proporcionó una hoja de actividades con los siguientes apartados:

1) Simbolice las variables que intervienen en el problema.
2) Plantee la función volumen.
3) Determine el dominio de la función volumen.
4) Elabore una tabla de valores para x y $V(x)$ (tabulación).
5) Con los valores de la tabla, elabore una gráfica de la función volumen.
6) Dé la interpretación de la tabla y de la gráfica, proporcione un valor aproximado para el volumen máximo.
7) Resuelva el problema mediante el cálculo diferencial.

Las primeras tres preguntas son básicas para resolver el problema. De los estudiantes y profesores a quienes se les aplicó este estudio, 100% respondió correctamente a las dos primeras preguntas; en la tercera pregunta, dominio de la función, alrededor de un 80% respondió acertadamente; es decir,

D_v $\{x \in \square\ \Omega 0 \leq x \leq 13/2\}$, y 20% dio como respuesta incorrecta
D_v $\{x \in \square\ \Omega 0 \leq x \leq 13\}$.

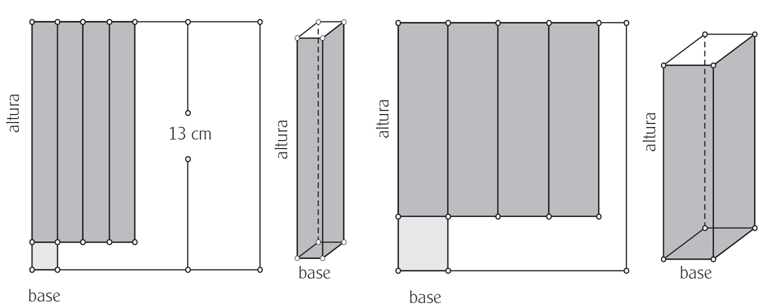
En relación con las preguntas 5 y 6, 100% de los encuestados respondió correctamente dando un valor aproximado al volumen máximo; y también 100% de ellos resolvió correctamente el problema 1, mediante el criterio de la segunda derivada. Cabe mencionar que, a pesar de tener incorrecto el dominio de la función 20% de los estudiantes, el resultado correcto no se vio afectado mediante el criterio de la segunda derivada, puesto que el punto crítico es interior al dominio de *V*, y el dominio incorrecto comprende el conjunto del dominio de *V*.

PROBLEMA 2

Determinar el volumen máximo que se puede obtener al construir una caja de base cuadrada sin tapa, con una lámina cuadrada de 13 cm de lado, donde la base esté formada por una esquina de la lámina (véase la figura 2).

En este problema, al plantear el modelo resultó la función $V(x) = x^2 (13 - x)$, en la que el dominio está determinado por el intervalo $(0 \leq x \leq 13/4)$. En esta función, el máximo se localiza en $x = 13/4$ cm extremo del dominio de definición y da lugar a un volumen máximo de:

Figura 2 Construcción de una caja, mediante las láminas de la izquierda



$$V\left(\frac{13}{4}\right)=\left(\frac{13}{4}\right)^2\left(13-\frac{13}{4}\right)=102.98\ \text{cm}^3$$

Así

$$V_{\text{máx}} = 102.98\ \text{cm}^3$$

Para la exploración con este segundo problema, se les proporcionó a estudiantes y profesores el enunciado del problema con la figura 2. Adicionalmente, se les proporcionó a los estudiantes la misma hoja de actividades del problema 1. A los profesores, a fin de no dar indicios para la solución, no se les proporcionó hoja de actividades

La experiencia se desarrolló en dos fases: en la primera fase se eligió al grupo de profesores a quienes se les proporcionó un cuestionario y el problema 2 sin hoja de actividades, tal y como se presenta en la figura 2. Los resultados se resumen en la siguiente encuesta.

RESULTADOS DEL ESTUDIO EXPLORATORIO DEL GRUPO DE PROFESORES

El estudio se llevó a cabo con un grupo integrado por ocho profesores del departamento de matemáticas pertenecientes a la academia de Cálculo Diferencial de una escuela superior.

La información que se muestra en el cuadro 1 reúne la antigüedad del profesor, el número de cursos de Cálculo Diferencial que, hasta ese momento, había impartido en los niveles medio superior y superior, si en el curso cubre el tema de máximos y mínimos, el tiempo dedicado al tema y su profesión. En la última columna, se dispone la respuesta al problema 2, escribiendo “Bien” si fue acertado o “Mal” si fue mal resuelto.

Al resolver el problema 2, 100% de los profesores simbolizaron bien el problema y plantearon con éxito la función volumen. Sin embargo, el dominio pasó inadvertido para 75% de los profesores de la muestra. Todos, sin excepción, aplicaron el criterio de la segunda derivada y llegaron a que el volumen máximo se encontraba en $x = 26/3 = 8.66$ cm. Es decir, se tiene que partir una longitud de 13 cm (longitud de la hoja) en cuatro partes iguales, cada una con una longitud de 8.66 cm. Cuestión imposible de realizar.

Cuadro 1 Encuesta y resultados de la resolución del problema 2 para profesores

Encuesta a profesores de nivel superior							
Prof.	Antigüedad docente (años)	Cursos de nivel superior	Cursos de nivel medio superior	¿Cubre el tema?	Tiempo dedicado al tema (horas)	Profesión	**Respuesta al problema**
1	25	Más de 15	Más de 10	Sí	6 a 8	físico matemático	**Bien**
2	20	Varios	Varios	Sí	5	físico matemático	**Bien**
3	14	6	8	Sí	10	matemático	**Mal**
4	28	35	8	Sí	6	físico matemático	**Mal**
5	13	10	25	No	8 a 10	físico matemático	**Mal**
6	9	7	5	Sí	4	matemático	**Mal**
7	25	16	0	Sí	8	matemático	**Mal**
8	9	23	44	Sí	15 a 20	ingeniero industrial	**Mal**

La segunda fase se desarrolló con los estudiantes, a los cuales se les proporcionó una hoja con el enunciado del problema, las figuras anteriores y la simbolización de las variables, la función volumen y su dominio.

RESULTADOS DEL ESTUDIO EXPLORATORIO DEL GRUPO DE ESTUDIANTES DE MAESTRÍA

Para tener una idea de los antecedentes académicos de estos estudiantes, se pidió que contestaran un cuestionario respecto a su profesión y sobre el número de cursos impartidos de Cálculo Diferencial. La información recabada se muestra en el cuadro 2.

Al revisar las hojas donde se desarrolló el problema 2, se presentó una sorpresa: ¡ningún estudiante resolvió bien el problema!

Un estudiante no supo calcular la derivada, seis aplicaron el criterio de la segunda derivada sin errores algebraicos o de derivación y dieron como solución

Cuadro 2 Resultados de encuesta a estudiantes de maestría

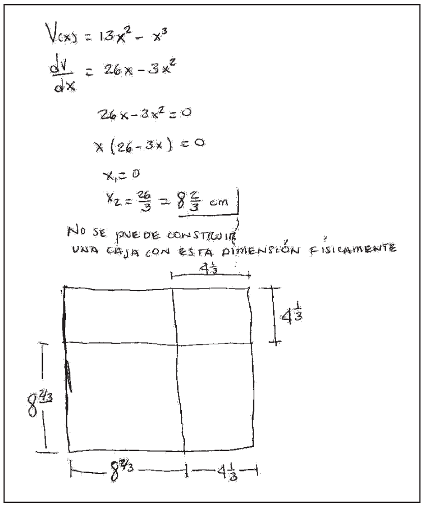
Estudiante	Profesión (carrera)	Núm. de cursos impartidos de Cálculo Diferencial
1	ingeniero	0
2	ingeniero	0
3	matemático	1
4	físico	0
5	físico matemático	5
6	matemático	No respondió
7	matemático	20
8	lic. en educación matemática	4
9	matemático	6

el valor crítico $x = 26/3 = 8.66$ cm, obteniendo el volumen máximo al evaluar la función volumen en este punto. Finalmente dos estudiantes, al aplicar el criterio de la segunda derivada y obtener el valor crítico, se dieron cuenta de que el valor crítico se encontraba fuera del dominio de la función, concluyendo con ello que el problema ¡no tenía solución!

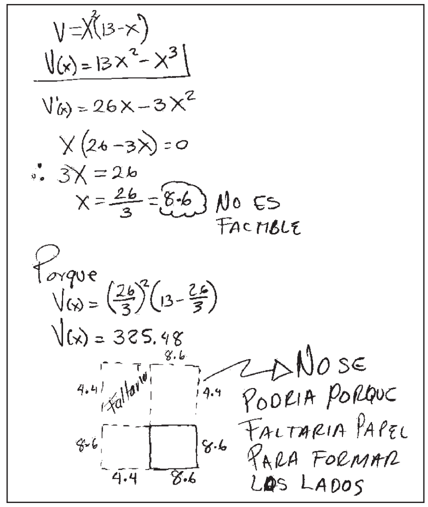
Cabe subrayar que los seis estudiantes llegaron a una solución incorrecta del problema, a pesar de que en la hoja del problema se dio el dominio de la función.

RESULTADOS DEL ESTUDIO EXPLORATORIO DEL GRUPO DE INGENIERÍA

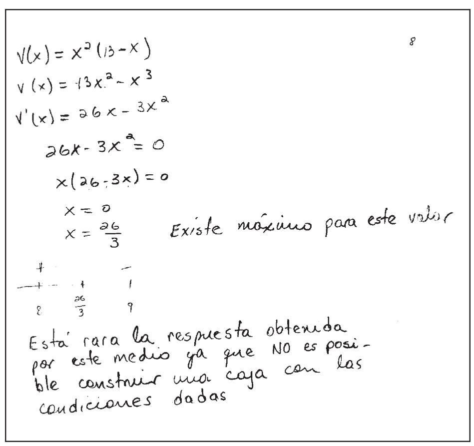
En este segundo problema, todos los estudiantes aplicaron el criterio de la segunda derivada para la obtención de los puntos críticos y, desde el punto de vista operativo, no tuvieron errores. Sin embargo, la interpretación fue similar a la registrada por los estudiantes de maestría; esto es, tres estudiantes se percatan de que el valor crítico está fuera del dominio de la función y concluyen que el problema no tiene solución. Los demás estudiantes dan por buena la solución que obtienen para el punto crítico. Enseguida se muestran comentarios de tres estudiantes.



Estudiante A



Estudiante B



Estudiante C

CONCLUSIONES

Los resultados anteriores ponen de manifiesto una interpretación errónea de los conceptos de máximos y mínimos, al aplicar el criterio de la segunda derivada sin reflexionar en la solución obtenida y al no considerar como información relevante que el dominio de la función es cerrado, cuestión importante al definir los máximos y mínimos de una función continua, acotada y diferenciable en su dominio. Es conveniente observar que, para la segunda fase del problema 2, a los estudiantes se les proporcionó el dominio de la función y, a pesar de ello, respondieron erróneamente el problema planteado.

En una encuesta, aparte del cuestionario, se les preguntó sobre cómo definían o entendían el máximo o mínimo de una función; la respuesta en general, salvo un 10%, fue que, para definir un máximo o un mínimo, se requería que la derivada fuera cero en esos puntos. Es decir que, para la mayoría, tanto de profesores como de estudiantes, el máximo o mínimo de una función sólo se puede encontrar a través del criterio de la segunda derivada; de no ser posible la aplicación de este criterio, entonces concluyen, erróneamente, que el problema no tiene solución o que la función no tiene máximo.

Una de las posibles causas de esta concepción errónea alrededor de máximos y mínimos, tanto en profesores como en alumnos, y que se manifiesta de manera evidente al resolver correctamente el primer problema e incorrectamente el segundo, la proporciona Tall, cuando menciona que:

> Cuando se encara con dificultades conceptuales, el estudiante debe de aprender a hacerles frente. En matemática elemental, este enfrentamiento incluye aprender habilidades manipulativas y de cálculo para aprobar los exámenes [...] El problema es que tales rutinas muy pronto llegan a ser simplemente "rutinas", así, el estudiante empieza a encontrar dificultades para responder preguntas que conceptualmente son desafíos. El profesor compensa colocando preguntas en los exámenes que los estudiantes pueden contestar y el círculo vicioso de enseñanza de procedimientos y aprendizaje se pone en movimiento. Como resultado, las conexiones conceptuales tienen menos probabilidad de ser llevadas a cabo (D. Tall, 1996, p. 306).

En otras palabras, con este proceso de instrucción, en donde más que enseñar se entrena a los estudiantes para desarrollar habilidades en procesos algorítmicos, mediante la memorización y el recitado de operaciones, reglas, definiciones, etc., los cursos de matemáticas se convierten en algo rutinario, carente de sentido para el estudiante, lo cual conlleva, como se muestra en este estudio, a mal interpretar conceptos importantes de la matemática.

> Para la gran mayoría de los estudiantes, el cálculo no es un cuerpo de conocimientos, sino un repertorio de conductas y comportamientos imitativos (Moise, 1984, citado en Tall, 1996, p. 290).

Un posible trabajo posterior a esta actividad es diseñar situaciones didácticas para la enseñanza de los conceptos de máximos y mínimos que puedan evitar estas falsas interpretaciones. Tareas en las que se está trabajando.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Amit, Miriam y Shlomo Vinner (1990), "Some Misconceptions in Calculus - Anecdotes or the Tip of an Iceberg?", *Proceedings Fourteenth PME Conference,* México, I, pp. 3-10.

Hiebert, J. y P. Lefevre (1986), "Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis", en J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 1-27.

Granville, W. A. (1992), *Cálculo Diferencial e Integral,* México, Limusa.

Leithold, Louis (1972), *El cálculo con geometría analítica,* México, Harla.

Oaks, A. B. (1988), *The Effects of the Interaction of Conception of Mathematics and Effective Constructs on College Students in Remedial Mathematics,* tesis de doctorado, University of Rochester, 1987, Dissertation Abstracts International 49, 54A.

—— (1990), "Writing to Learn Mathematics: Why do We Need it and How Can it Help Us?", Conferencia presentada en la Association of Mathematics Teachers of New York State Conference, Ellenville, NY.

Orton, A. (1983), "Students Understanding of Differentiation", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 14, pp. 235-250.

Schoenfeld, A. H. (1985), *Mathematical Problem Solving,* Nueva York, Academic Press.

Skemp, R. R. (1976), "Relational Understanding and Instrumental Understanding", *Mathematics Teaching,* núm. 77, pp. 20-26.

Swokowski, Earl (1989), *Cálculo con geometría analítica,* México, Grupo Editorial Iberoamérica.
Tall, David (1996), "Functions and Calculus", en J. Bishop *et al.* (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* Países Bajos, pp. 289-325.
Tutle, F. W. (1988), "Revision in Calculus Instruction, Suggestions from Cognitive Science", conferencia presentada en el Congreso Internacional de Educación Matemática, Budapest.
Vinner, S. (1989), "Mathematics Service Courses – Lip Service", *The Proceedings of the 2nd Jerusalem Convention on Science Education.*

DATOS DE LOS AUTORES

Salvador Moreno Guzmán
CCH Naucalpan-Universidad Nacional Autónoma de México, México
salvador@correo.unam.mx

Carlos Armando Cuevas Vallejo
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
ccuevas@mail.cinvestav.mx

www.santillana.com.mx/educacionmatematica