Las cuadráticas. Una aproximación constructivista

Juan Antonio Pérez

Resumen: En el presente trabajo se propone una alternativa constructivista para la transmisión de los hechos básicos a propósito de la solución de ecuaciones cuadráticas. El objetivo es privilegiar los aspectos geométricos de la obtención de la solución general, así como propiciar la experimentación durante el proceso de aprendizaje.

Palabras clave: álgebra, ecuaciones cuadráticas, graficación, aprendizaje, enseñanza, procedimientos de solución.

Abstract: This note is devoted to propose a constructivistic alternative to be used in the transmission of the basic facts related to the solution of quadratic equations. The main purpose is to focus on the geometric aspects of the general solution construction, and to provide tools for experimentation during the learning process.

Keywords: algebra, quadratic equations, graphing, learning, teaching, solution procedures.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje entendido como una reconstrucción intelectual de la realidad es una de las bases de las teorías constructivistas del conocimiento. En este proceso, compatible con lo que Ausubel (1973) llama *aprendizaje significativo,* la experimentación y visualización desempeñan un papel por demás importante. Desde este punto de vista, generar alternativas constructivistas de la edificación de los *constructos* de Bunge (Bunge, 1980, pp. 53-63) se convierte en una de las tareas más apremiantes de la educación contemporánea.

La geometrización del descubrimiento guiado en el caso de las matemáticas permite un transcurso gradual y sólido de la experiencia sensorial a la formalización, pues como apunta Rosenblueth (Rosenblueth, 1994, p. 198), "... el método deductivo solamente es introducido al final de la investigación para obtener una demostración rigurosa, es decir, para mostrar que los resultados no son inconsistentes". La interiorización del conocimiento matemático adquiere la dinámica propuesta por Lakatos (Lakatos, 1978, p. 21), a propósito de la sustitución de teorías viejas por nuevas, con ventaja sobre el alcance de la generalidad y la superioridad en contenido.

El conocimiento, según LaCasa (LaCasa, 1994, pp. 103-121), no es el resultado de una mera copia de la realidad preexistente, sino un proceso dinámico e interactivo a través del cual la información externa es interpretada y reinterpretada por la mente que va construyendo progresivamente modelos explicativos cada vez más complejos y potentes. Este proceso es la manera más productiva de aprendizaje, pues de acuerdo con Watzlawick (Watzlawick, 1992, p. 123) "...forjamos y no encontramos –como ingenuamente suponemos– nuestras realidades individuales, sociales, científicas e ideológicas".

En su apología del constructivismo radical (López Pérez, 2000, p. 76), López Pérez señala que, según la "epistemología del sentido común", contraria al constructivismo, "...los hombres no son conscientes de estos procesos de construcción de la realidad". En concordancia con el constructivismo, pues, es necesario el pleno uso de la conciencia en el proceso de apropiación del conocimiento, y de ahí la importancia de la visualización y la experimentación programadas.

La presente nota muestra una alternativa constructivista a la presentación del tema relativo a la solución de ecuaciones cuadráticas en la enseñanza media, complementaria a la deducción tradicional de la solución general. El énfasis se coloca en la visualización.

ANTECEDENTES

La ecuación cuadrática más simple tiene la forma

$$x^2 = q$$

y el procedimiento usual de completar cuadrados en la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.1}$$

tiene como objetivo reducirla a la forma más simple. Procedimiento común en matemáticas: resolver un problema llevándolo a la forma de uno previamente resuelto. El resultado de la manipulación algebraica descrita es la "fórmula"

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{1.2}$$

de no siempre grato recuerdo. Con frecuencia, el instructor, en un intento geometrizador, informa que los ceros de la ecuación 1.1 son las abcisas de los puntos en los que la parábola

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1.3}$$

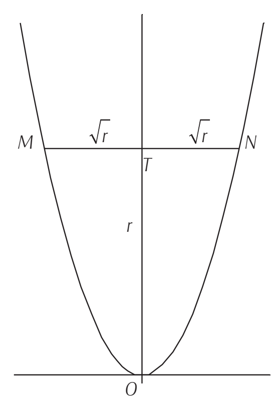
coincide con el eje horizontal.

Aun en estas condiciones, el contenido geométrico no parece conectar adecuadamente con la expresión algebraica que ofrece la solución general.

El autor está convencido de que Tomás de Aquino, además de ser santo, debió haber sido geómetra: "Ver para creer" bien pudiera convertirse en el lema del buen estudiante de matemáticas. Un buen razonamiento se apoya por lo general en un dibujo representativo, aunque éste no sea igualmente bueno. La idea de la presente nota es ofrecer una alternativa para hacer "visible" la solución general de las cuadráticas.

LA PARÁBOLA $y = x^2$

La primera observación que proponemos es extremadamente simple: la parábola $y = x^2$ tiene simetría bilateral, en otras palabras, posee un eje de simetría que coincide con el eje de las ordenadas. La recta horizontal $y = r$ para $r > 0$ tiene dos puntos en común con esta parábola, éstos equidistan del eje de las ordenadas, y $\sqrt{r}$ es la distancia común.



La siguiente observación valiosa, aunque también extremadamente simple, es la relación que guardan las distancias $\sqrt{r} = \overline{NT} = \overline{MT}$ y $r = \overline{OT}$. Otra observación, también muy simple, nos dice que y alcanza su valor mínimo en $x = 0$, es decir, en la intersección de la parábola con el eje de simetría.

Una última observación es que toda parábola

$$y = x^2 + px + q \qquad (1.4)$$

no es más que una traslación de la parábola $y = x^2$. Para convencerse basta escribir $y - q = x^2$ seguido de

$$y - \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Con ello se ha transformado la ecuación (1.4) en una ecuación de la forma

$$y - k = (x - h)^2 \qquad (1.5)$$

que es, en el lenguaje de la geometría analítica, la ecuación "canónica" de la parábola de lado recto $4p = 1$ y vértice (h,k), la cual, mediante un obvio cambio de coordenadas, se transforma en $y = x^2$.

Tenemos entonces que, como toda traslación es una isometría, la relación de distancias de la parábola $y = x^2$ que se muestra en la figura anterior se conserva en la parábola (1.4). Dicho de otra manera, la parábola $y = x^2$ es un buen modelo para cualquier parábola de la forma $y = x^2 + px + q$.

LA SIMETRÍA DE LAS RAÍCES

Las dos raíces de una ecuación cuadrática son reales, ellas son las abcisas de dos puntos que equidistan del eje de simetría de la parábola a la que corresponde la ecuación. Es decir, si a y b son las raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1.6)$$

entonces la recta $x = \frac{1}{2}(a + b)$ es el eje de simetría de la parábola (1.4).

De la discusión anterior obtenemos nuevas conclusiones valiosas:

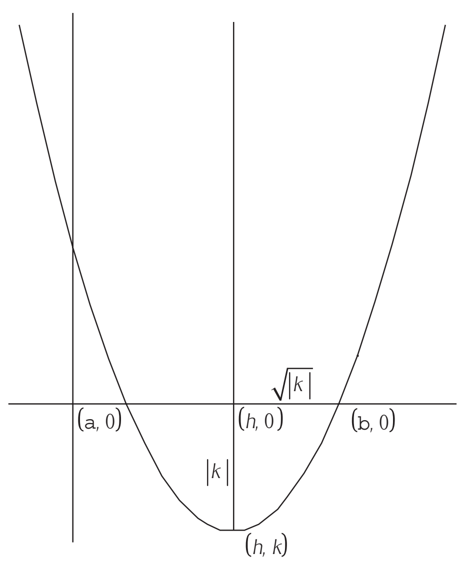
1. La parábola (1.4) tiene un único mínimo.
2. Este mínimo se alcanza en el eje de simetría, es decir, es el valor de y cuando x asume el valor de la media aritmética de las raíces.

Veamos, entonces, que la distancia del vértice (h,k) al eje de las abcisas es precisamente el valor absoluto del valor mínimo de y, es decir $d = |k|$, y además $h = \frac{1}{2}(\mathtt{a} + \mathtt{b})$. Ahora bien, por la regla de Ruffini tenemos que $\mathtt{a} + \mathtt{b} = -p$ y $\mathtt{ab} = q$ de donde $h = -\frac{p}{2}$ y, en consecuencia,

$$k = h^2 + ph + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = -\frac{p^2}{4} + q.$$

Observamos, entonces, que la parábola se comporta como lo muestra la figura que sigue, y así, las raíces están entonces dadas en la forma

$$\mathtt{a} = h - \sqrt{|k|} \quad \text{y} \quad \mathtt{b} = h + \sqrt{|k|}$$



LA CUADRÁTICA GENERAL

Notemos primero que las raíces de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.7}$$

son las mismas que las de

$$x^2 = \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = 0, \tag{1.8}$$

por lo que resulta suficiente estudiar la parábola

$$y = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \tag{1.9}$$

cuyo vértice está en el punto (h,k) donde $h = \frac{b}{2a}$ y

$$k = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Las raíces de la ecuación (1.7) son reales si $k < 0$, es decir, si

$$\left|k\right| = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

y como ya hemos observado, las raíces son

$$h \pm \sqrt{|k|}$$

o sea

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

con lo que recuperamos la conocida solución general.

COMENTARIOS FINALES

El proceso de experimentación inicial en la introducción de las cuadráticas consiste usualmente en la graficación de los casos particulares. Las ventajas del ejemplo que se presenta en esta nota radican en la comparación gráfica de la parábola de lado recto $4p = a$ con la parábola de lado recto $4p = 1$. El proceso de graficación puede reducirse en tiempo, o bien digitalizarse, una buena alternativa es un acetato sobre papel cuadriculado. Como se ha apuntado, éste es sólo un ejemplo en la línea del artículo previo "Ideas geométricas en álgebra elemental", publicado por el autor en *Educación Matemática* durante 1996.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. P. (1973), "Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento", en S. Elam (ed.), *La educación y la estructura del conocimiento,*. Buenos Aires, El Ateneo.

Bunge, M. (1980), *Epistemología,* México, Siglo XXI Editores.

LaCasa, P. (1994), *Modelos pedagógicos contemporáneos,* Madrid, Visor.

Lakatos, I. (1978), *Matemáticas, ciencia y epistemología,* Madrid, Alianza Universidad.

López Pérez, R. (2000), "Constructivismo radical de Protágoras a Waltzlawick", en R. Careaga (ed.), *Tradición y cambio en la psicopedagogía,* Madrid, Universidad Educares.

Nardone, G. y P. Watzlawick (1992), *El arte del cambio,* Barcelona, Herder.

Pérez, J. A. (1996), "Ideas geométricas en álgebra elemental", *Educación Matemática,* vol. 8, núm. 3, pp. 72-84.

Pozo, J. I. (1997), *Teorías congnitivas del aprendizaje,* Madrid, Morata Editores.

Rosenblueth, A. (1994), *Mente y cerebro y el método científico,* México, Siglo XXI Editores.

DATOS DEL AUTOR

Juan Antonio Pérez
Centro Regional de Estudios Nucleares y Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Zacatecas
japerez@cantera.reduaz.mx