Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Larios Osorio, Víctor
Triángulos y deltoides con Geometría Dinámica
Educación Matemática, vol. 16, núm. 3, diciembre, 2004, pp. 135-158
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Triángulos y deltoides con Geometría Dinámica

Víctor Larios Osorio

Resumen: Este trabajo contiene material que sirve como guía para el estudio de algunas curvas en la "geometría del triángulo" utilizando software computacional para Geometría Dinámica, a fin de que se desarrollen habilidades de observación, análisis y razonamiento que lleven al aprendizaje de la demostración a través de observaciones, conjeturaciones y argumentaciones.

Palabras clave: enseñanza de la geometría, Geometría Dinámica, curvas mecánicas.

Abstract: This paper contains material to be used as guide to study some triangle geometry curves using Dynamic Geometry software, in order to develop observation, analysis and reasoning skills to learn the demonstration through observations, making conjectures and proposing arguments.

Keywords: geometry teaching, Dynamic Geometry, mechanical curves.

A Iza

–¿Qué es una deltoide? –preguntó A lleno de curiosidad.
–Es una letroide –contestó M sin pérdida de tiempo.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo proporciona una guía para realizar actividades que sirvan para el estudio de curvas que muy raramente se consideran en el currículo geométrico de bachillerato, a pesar de que están relacionadas con algo tan común como los triángulos. Para ello, se echa mano del Software para Geometría Dinámica (o SGD) y de la idea de *mosaico deductivo*.

Una de esas curvas es la llamada *circunferencia de los nueve puntos*[1] que es posible construir con regla y compás, aunque se aborda también en cursos de Geometría Analítica, pero con la ayuda de software es posible relacionarla con otras construcciones que resultan interesantes. Sin embargo, el uso de software no debe eliminar el análisis y la reflexión por parte de los alumnos, ya que las computadoras son una herramienta que puede complementar o ayudar la visualización de los objetos geométricos, pero no es un sustituto de la capacidad intelectual del individuo.

Aunque este trabajo está pensado para que, en su aplicación, el profesor le pida a los alumnos que provean argumentos y desarrollen su razonamiento deductivo, es pertinente aclarar que no se puede esperar que se proporcionen argumentos o demostraciones como se presentan aquí. Uno de los objetivos principales al proponer un trabajo como éste es que se busque desarrollar habilidades de razonamiento en el alumno, a fin de que pueda construir demostraciones deductivas aceptables, pero coherentes con su desarrollo cognitivo, a partir de observaciones, análisis, reflexiones, planteamiento de conjeturas y propuesta de argumentos.

Brevemente, he de decir que, de manera obvia, las observaciones y conjeturas que se proponen a lo largo de este trabajo son una propuesta personal, y queda la posibilidad de que el lector, o sus alumnos, hagan otras y las exploren, propiciando nuevas conjeturas y nuevos argumentos que enriquezcan el trabajo.

En cuanto al software utilizado, se recomienda el uso de *Cabri Géomètre II* (de origen francés) por encima de *El Geómetra* (de origen estadounidense), pues sus opciones para la construcción de lugares geométricos lo hacen más adecuado en este caso. No obstante, es la experiencia del docente la que le permitirá elegir, basándose en las ventajas y desventajas (tanto técnicas como de uso) que tienen cada uno de ellos.

LA RECTA DE SIMSON

Se inicia con la construcción, en la pantalla de la computadora, de un triángulo cualquiera con vértices A, B y C. Además, se crea un punto P libre y se constru-

[1] Según Howard Eves, este nombre le fue dado por Poncelet y se le quedó en la tradición de los países de habla inglesa (y de otros países como México), pero algunos geómetras franceses le han llamado *circunferencia de Euler* y algunos alemanes *circunferencia de Feuerbach*.

Figura 1

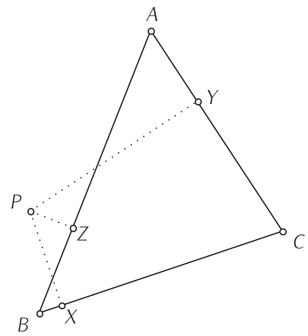
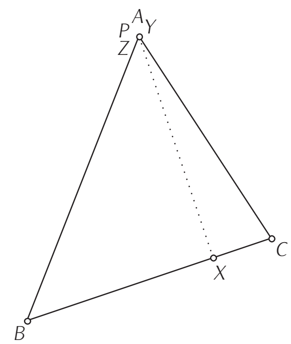


Figura 2



yen los pies de las perpendiculares a los tres lados del triángulo que pasan por *P*, los cuales llamaremos *X*, *Y* y *Z* (figura 1).

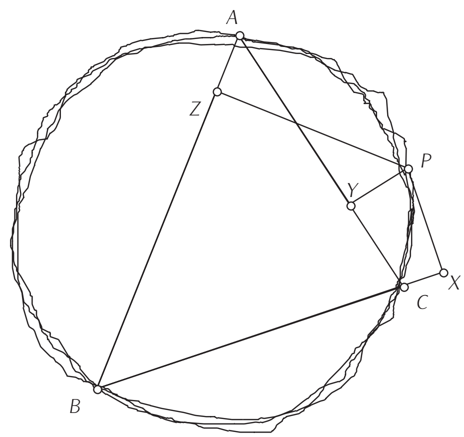
Es importante mencionar que, al utilizar software, aparecen algunas dificultades técnicas, como el hecho de que ocasionalmente desaparecen los pies de las perpendiculares (dependiendo del software y su versión), por lo que no es mala idea pedirle a los alumnos que resuelvan este problema logrando que *X*, *Y* y *Z* aparezcan siempre (aunque estén en las extensiones de los lados) sin afectar la construcción original.

Ahora bien, se tiene que *X*, *Y* y *Z* no necesariamente son colineales, aunque podrían serlo en algunos momentos. El siguiente paso es determinar la (o las) posición(es) de *P* para que sean colineales. La exploración se puede iniciar con los casos extremos: cuando *P* coincide con uno de los vértices y entonces ocurre que dos de los pies coinciden entre sí (si $P = A$ entonces $Y = Z$, véase la figura 2). Además, ocurre que la recta que contiene a los tres pies coincide con una de las alturas del triángulo. En conclusión, tres posible posiciones de *P* son los vértices del triángulo.

Para buscar más posiciones, se podría pedir al software que mida $\angle XYZ$ y entonces mover *P* hasta que la medida sea lo más cercana a 0° o 180°, según convenga. Al utilizar la computadora se puede aprovechar la opción **Traza activada** de *Cabri* (o la opción **Trazar punto** de *El Geómetra*) sobre *P* y moverlo, partiendo de alguno de los vértices, a fin de mantener el ángulo lo más cerca a los valores convenientes. El resultado (después de varios intentos) podría ser como el que aparece en la figura 3.

Figura 3

$m\angle XZY = 2°$



Se observa que *P* parece estar en una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo: su circunferencia circunscrita. En otras palabras, podríamos conjeturar que para que los puntos *X*, *Y* y *Z* estén alineados es necesario que el punto *P* esté en la circunferencia circunscrita del triángulo original.

Aunque podría parecer aventurado ampliar esta conjetura, añadiéndole un "y viceversa" al final, después de una exploración, llegaría a la conclusión de que es así. Por lo anterior, al parecer la siguiente afirmación es verdadera:

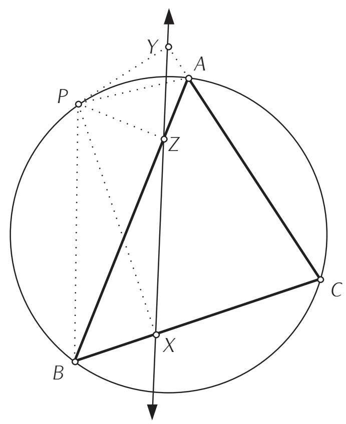
Conjetura 1. Sea un triángulo *ABC* y un punto *P*, y sean *X*, *Y* y *Z* los pies de las perpendiculares a los lados del triángulo que pasan por *P*. Los puntos *X*, *Y* y *Z* son colineales si y sólo si *P* pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo *ABC*.

Ahora, si bien se propone que se construyan demostraciones en clase, no se pretende que se haga a la primera oportunidad y con un nivel muy formal (como ya se dijo en la introducción). Por lo pronto, aquí va una demostración que sirve como guía.

En lo siguiente nos apoyaremos en la figura 4, donde se muestran todos los puntos, rectas, segmentos y la circunferencia que se han mencionado.

Además, por cuestiones de claridad, primero se demostrará la implicación: *si P pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo, entonces los puntos X, Y y Z son colineales.*

Figura 4



Tomemos en cuenta el cuadrilátero *APBC*, el cual es cíclico (pues es posible trazar una circunferencia que pase por sus cuatro vértices). Con algunos ejemplos se puede ilustrar que una de las propiedades de estos cuadriláteros es que sus ángulos opuestos (internos) son suplementarios. Por tanto, se tiene que

$$\angle APB = 180° - \angle BCA.$$

Ahora tendremos en cuenta otros tres cuadriláteros: *BXZP*, *CYPX* y *AYPZ*. Si se observa al cuadrilátero *BXZP* se tiene que $\angle BXP$ es un ángulo recto, por lo que es posible construir una circunferencia que pasara por los tres puntos y que *B* y *P* serían los extremos de uno de sus diámetros; observemos que también $\angle BZP$ es un ángulo recto, por lo que se podría construir otra circunferencia que pasara por los tres puntos, siendo *B* y *P* también extremos de uno de sus diámetros, por lo que ambas circunferencias en realidad serían una. En conclusión, este cuadrilátero es cíclico. Para el caso de los otros dos cuadriláteros (*CYPX* y *AYPZ*) ocurre lo mismo.

Ahora, teniendo en cuenta el cuadrilátero *CYPX*, resulta entonces que $\angle XCY + \angle YPX = 180°$, y como $\angle XCY = \angle BCA$ se tiene que

$$\angle APB = 180° - \angle BCA = \angle YPX.$$

Si ahora a $\angle APB$ y $\angle YPX$ se les quita (o resta) $\angle APX$, se tiene que

$$\angle XPB = \angle YPA.$$

Concentrémonos ahora en el cuadrilátero cíclico *BXZP*. Se tiene que $\angle XPB = \angle XZB$, pues subtienden el mismo arco.

Similarmente, con el cuadrilátero cíclico *AYPZ*, se tiene que $\angle YPA = \angle YZA$, por la misma razón.

Entonces, se obtiene que

$$\angle XZB = \angle YZA,$$

y como *AB* es un segmento de recta, entonces *X*, *Y* y *Z* están alineados.

Hasta aquí con esta parte de la demostración, ¿podría terminarla el lector?

Resulta que la Conjetura 1 es más bien el Teorema 1 y, de hecho, la línea a la que pertenecen estos tres puntos se denomina *recta de Simson de P con respecto al triángulo ABC*.[2]

Además, conviene rehacer la construcción mostrada en la figura 1, a fin de que *P* esté en la circunferencia circunscrita (que al moverlo sólo pueda moverse sobre ella) y también pedirle a los alumnos el desarrollo de *macros* en el software que generen esta recta a partir de los vértices del triángulo y del punto *P* para simplificar construcciones posteriores.

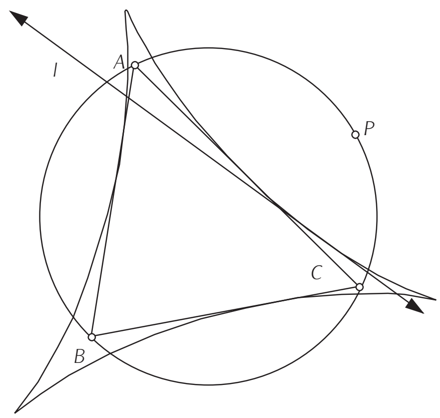
LA DELTOIDE

Una curva cuya obtención con regla y compás resulta complicada, pero que es relativamente fácil de ver utilizando la computadora, es la "deltoide" o "hipocicloide de tres picos".

Resulta que, al mover el punto *P* a lo largo de la circunferencia, su recta de Simson gira suavemente en sentido contrario, delineando una deltoide que, por esta relación con la recta y el triángulo, se llama *deltoide de Steiner*,[3] y está ilustrada en la figura 5. Con la opción **Trazar** del software activada sobre la recta de Simson, se ve cómo se forma la curva. Sin embargo, para un estudio más detallado y libre, se recomienda utilizar la opción que se incluye en los programas para **Construir el lugar geométrico** de la recta de Simson con respecto a *P*.

[2] El nombre de la recta se debe al matemático escocés Robert Simson (1687-1768).
[3] El nombre se debe al matemático Jakob Steiner (1796-1863).

Figura 5



Hagamos una aclaración del lenguaje, pues se ha abusado un poco. En realidad, las rectas de Simson que aparecen en la pantalla de la computadora son un subconjunto (finito) de la familia (infinita) de las rectas de Simson con respecto a un triángulo y toda esa familia "delinea" a la deltoide, pues ésta es la envolvente de las rectas de Simson. Sin embargo, por familiaridad, se seguirán haciendo referencias de este tipo al hablar, por ejemplo, de que "la recta de Simson genera..." en lugar de decir "la familia de rectas de Simson son tangentes a..." o "la envolvente de las rectas de Simson es..." y así aprovechar las potencialidades dinámicas del software, pues *Cabri* utiliza la envolvente para crear el lugar geométrico de las rectas, a diferencia de otros programas (aunque vale la pena que el docente experimente con éstos, a fin de ver cuál resultado se obtiene).

Ahora bien, una vez que ha sido creada la curva como lugar geométrico, ésta puede ser manipulada, es decir, es posible trasladarla, girarla o dilatarla, variando la posición de los vértices del triángulo. Es interesante preguntar a los alumnos si el cambio de la posición de *P* podría o no afectar a la deltoide en su tamaño o posición, si se mantienen fijos los vértices del triángulo. Antes que eso, ¿podría decir el lector por qué afectaría o no?

Pueden plantearse otras preguntas. Por ejemplo: "¿Depende la posición de la deltoide de alguna medida de los lados del triángulo o de la posición de sus vértices o de las medidas de sus ángulos?", "¿o su tamaño?" "¿Cuál es el centro de la deltoide?"

Como caso particular, se les puede sugerir a los alumnos que muevan los vértices del triángulo, tratando de que no se modifique el radio de la circunferencia circunscrita y observando el tamaño y posición de la deltoide. Al lector le queda el reto de hacer una construcción en la computadora en la cual se garantice que, al moverse los vértices del triángulo, no varía el radio de la circunferencia circunscrita. Tras una exploración, es interesante observar que, en estas condiciones, al mover los vértices del triángulo sin modificar el radio de la circunferencia, la deltoide gira y se traslada, pero aparentemente no cambia de tamaño. Una inquietud que podría surgir sería sobre la relación entre la deltoide y el tamaño de la circunferencia, más que entre la deltoide y la posición de los vértices. Si así ocurre, entonces se puede afirmar lo siguiente (a reserva de que después se argumente a favor o se refute).

Conjetura 2. El tamaño de la deltoide generada con la recta de Simson de un punto *P* con respecto a un triángulo *ABC* depende del radio de la circunferencia circunscrita del mismo triángulo.

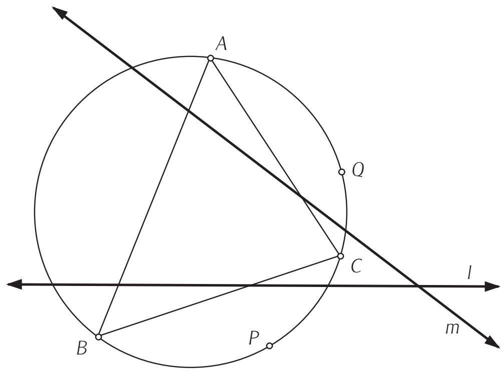
Es importante notar que lo queda en adelante es un reto para encontrar argumentos a favor o contraejemplos, pero aún no se tienen elementos suficientes para ello, por lo que habrá que explorar algunas cuestiones.

Además, consideremos de paso el posible "centro" de la deltoide. ¿Cuál podría ser este punto? En un primer momento, si el triángulo que se ha construido es casi equilátero, se podría aventurar que el "centro" de la deltoide es el circuncentro, pero al modificar el triángulo y hacer que uno de sus ángulos sea obtuso o muy agudo, es posible ver claramente que esto es falso, pues la deltoide se mueve, pero la circunferencia circunscrita y su centro no. Otras posibilidades son los demás puntos notables del triángulo (baricentro, ortocentro e incentro), para lo cual habría que pedirle en un primer momento a los alumnos que analizaran,[4] con base en los objetos que se han manejado hasta este momento, cuál de estos puntos podría ser un candidato adecuado y después realizar una exploración con la computadora.

Por lo pronto, y para un posterior análisis, se hará la siguiente afirmación.

[4] Es importante el hecho de pedirles a los alumnos que realicen análisis de algunos hechos sin necesidad de acudir a la computadora o en un momento previo al uso de esta herramienta electrónica.

Figura 6



Conjetura 3. El "centro" de la deltoide generada a partir de una recta de Simson de P con respecto a un triángulo ABC es alguno de los puntos notables del triángulo (baricentro, ortocentro o incentro), exceptuando al circuncentro.

A continuación, se considerará una curva que puede ayudar a desentrañar este asunto.

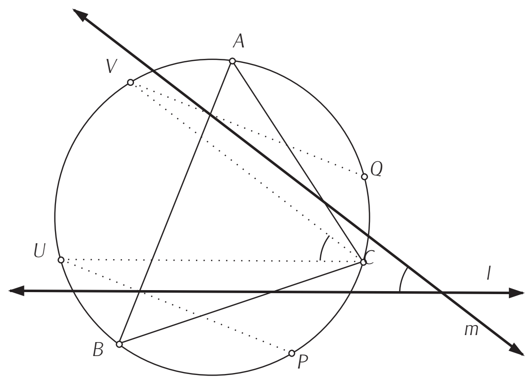
LA SIGUIENTE CURVA

Si se construyen (se podría usar una macro) dos rectas de Simson, l y m, de P y Q, respectivamente con respecto al triángulo ABC (véase la figura 6), ¿qué relación se observa entre el ángulo que forman esas dos rectas y las posiciones de P y Q (o la medida del arco que subtienden)?

Con el software, es posible medir la longitud del arco que subtienden P y Q, midiendo $\angle PGQ$ (donde G es el circuncentro), y el ángulo entre las dos rectas, estableciendo convenientemente tres puntos que nos permitan hacer esto. Después de una exploración en la pantalla de la computadora, es posible descubrir que, de hecho, la medida del ángulo entre las dos rectas es la mitad de la medida del arco PQ.[5] ¿Podría el lector hallar argumentos más formales que sustenten esta afirmación?, otra posibilidad es que se le pida a los alumnos que proporcio-

[5] Esta afirmación es, de hecho, un teorema, pero su demostración no se incluye para darle énfasis a otros hechos.

Figura 7



nen algunos tras mirar la figura 7 (obsérvese que los segmentos *CU* y *CV* son paralelos respectivamente a las rectas *l* y *m*, y que los segmentos *PU* y *QV* son perpendiculares a uno de los lados del triángulo).

De esta manera, se propondría construir ahora el punto *Q* de tal suerte que sea diametralmente opuesto a *P*, lo que quiere decir que la posición de *Q* dependerá de la posición de *P*. ¿Podría el lector realizar una construcción en la computadora que garantice esto? También podría pedírsele esta construcción a los alumnos. Entonces, resultará que *l* y *m* son perpendiculares entre sí, porque el arco *PQ* es de 180° (figura 8).

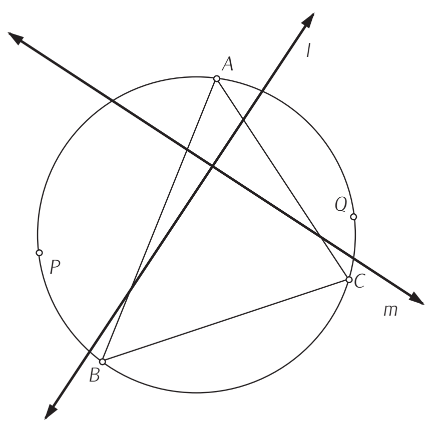
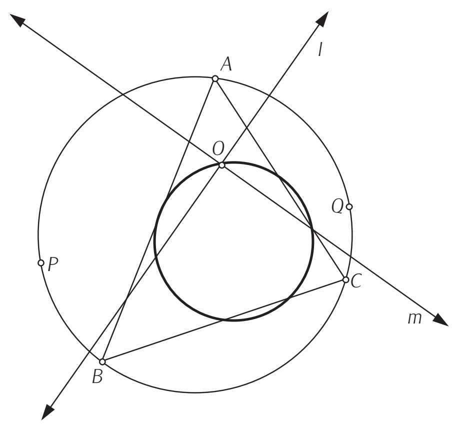


Figura 8

Figura 9



Ahora bien, si se llama *O* al punto de intersección de *l* y *m*, entonces se pediría a los alumnos que activen la opción **Trazar** sobre *O* y muevan *P* (con lo cual se movería *Q* también), observando la curva que describe *O*. De hecho, es posible construir, con ayuda de la computadora, el lugar geométrico que define *O* con respecto a *P*, obteniendo un resultado similar al de la figura 9.

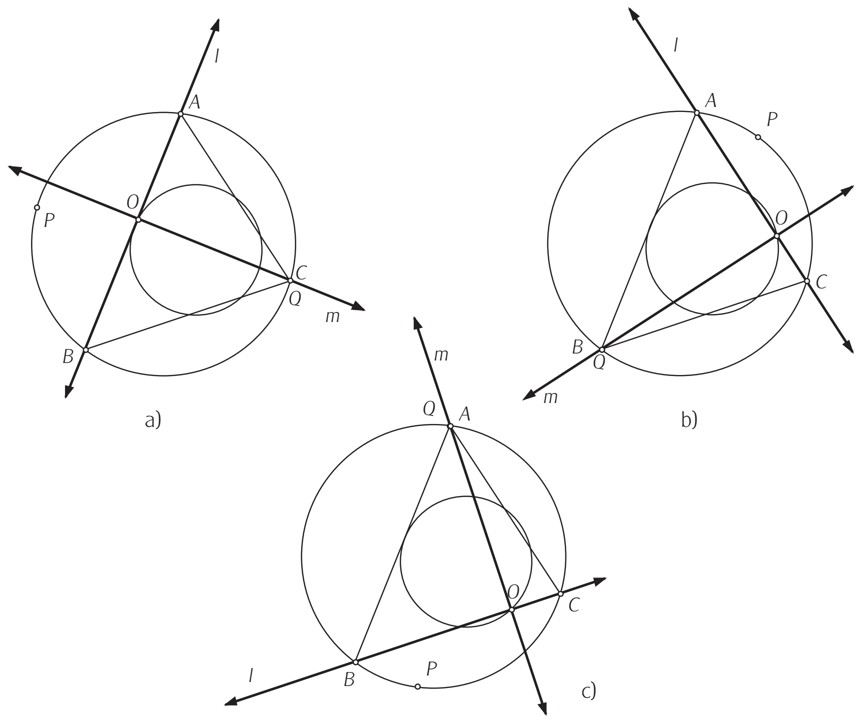
Entonces, con esta última observación en la que parece que *O* describe una circunferencia, se puede lanzar la siguiente afirmación.

Conjetura 4. Si se tiene un triángulo *ABC*, se construyen dos puntos *P* y *Q* sobre su circunferencia circunscrita de tal suerte que estén diametralmente opuestos, se construyen sus rectas de Simson, *l* y *m* respectivamente, y se llama *O* al punto de intersección de éstas, entonces *O* pertenece a una misma circunferencia sin importar la posición que tenga *P* (y por tanto *Q*) en la circunferencia circunscrita.

Esta afirmación es cierta y, si se expone una argumentación formal, se eleva al rango de teorema (que sería el Teorema 2), pero su demostración no la expondremos aquí, pues requiere algunos resultados previos y su complejidad va más allá del objetivo de este trabajo. Por lo pronto, aceptaremos este resultado como cierto, ¿podría el lector determinar qué circunferencia es?

Para responder a esta pregunta, podemos considerar que por tres puntos no alineados pasa una y sólo una circunferencia, por lo que habría que buscar cuál

Figura 10

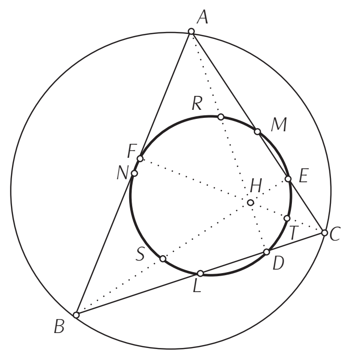


tercia de puntos de esta curva nos conviene analizar. Para ello, se comenzaría por plantear algunos casos y sugerir investigar la posición de *P* necesaria para que su recta de Simson coincida con alguno de los lados del triángulo. Al determinar esta información, se descubre que es necesario que *P* esté situado diametralmente opuesto a un vértice del triángulo para que *l* coincida con el lado opuesto a dicho vértice (véase la figura 10).

Por ejemplo, si *P* queda diametralmente opuesto a *C* (figura 10a), entonces resulta que *Q* y *C* coinciden. También ocurre que la recta *m* pasa por el vértice *C*. Además, como *m* es perpendicular a *l* y esta última coincide con el lado opuesto a *C* (el lado *AB*), se tiene que *m* coincide con la altura del triángulo que pasa por *C* y que *O* coincide con el pie de dicha altura.

Como con los otros lados y vértices del triángulo ocurre lo mismo, es decir, que cada que vez que *P* se coloca diametralmente opuesto a cada uno de los

Figura 11



vértices del triángulo, O coincide con el pie de la altura que está en el lado opuesto al vértice considerado, entonces la circunferencia que traza O pasa por los tres pies de las alturas del triángulo. Por consiguiente, habría que preguntarse: ¿cuál es la circunferencia relacionada con un triángulo que contiene a los pies de las alturas? La respuesta es: *la circunferencia de los nueve puntos*.

LA CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

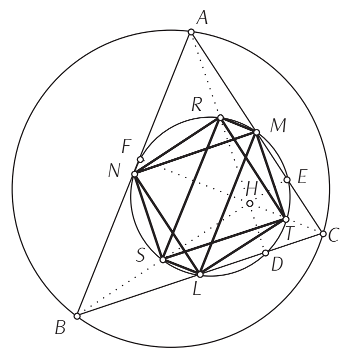
En esta sección hablaremos un poco sobre la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo. Quizá resulte interesante que los alumnos realicen la construcción con regla y compás, o bien utilizando la computadora, a fin de que practiquen sus habilidades manuales y pongan en práctica algunos conceptos geométricos involucrados.

A esta circunferencia se le llama así, porque, para un triángulo cualquiera, contiene los tres pies de las alturas (llamados D, E y F en la figura 11), a los puntos medios de los lados (L, M y N) y a los puntos R, S y T, que son los puntos medios de los segmentos que unen a los vértices del triángulo con su ortocentro (H).

Este hecho es un teorema, el cual se puede enunciar como sigue.

Teorema 3. La circunferencia de los nueve puntos. Dado un triángulo, los pies de sus alturas, los puntos medios de sus lados y los puntos medios de los segmentos que unen sus tres vértices con su ortocentro pertenecen a una misma circunferencia.

Figura 12



Si observa el lector, no se la ha llamado de antemano *conjetura,* porque es información que tendría el docente para presentársela a los alumnos, ya que éstos, en el nivel medio, no tienen por lo general información al respecto.

Para una demostración, consideremos la misma notación de la figura 10, pero añadiendo algunos segmentos que ilustrarán mejor los argumentos, tal como se muestra en la figura 12.

Consideraremos primero lo referente a un solo lado del triángulo.

Como M y N son los puntos medios de los lados CA y AB, respectivamente, el segmento MN es paralelo al lado BC por el teorema de paralelismo. Si ahora consideramos el triángulo HBC, se tiene que también ST es paralelo a BC por el mismo teorema de paralelismo, pues S y T son puntos medios de los lados HB y CH, respectivamente. En consecuencia, MN es paralelo a ST.

Similarmente, AB es paralelo a LM y a RS; y CA es paralelo a NL y a TR.

Ahora bien, regresando a los segmentos paralelos ST y MN, éstos forman parte del cuadrilátero $STMN$.

Consideraremos ahora el triángulo HCA.

Como T y M son puntos medios de HC y CA, respectivamente, entonces TM es paralelo a AH. Pero como este último es parte de la altura del triángulo ABC, que es perpendicular a BC, entonces TM también es perpendicular a BC y, por consiguiente, también a ST y a MN.

Y puesto que el cuadrilátero $STMN$ es cíclico, entonces, sus ángulos opuestos son suplementarios y, en consecuencia, es un rectángulo, siendo por tanto que $ST = MN$. Además, uno de los diámetros de su circunferencia circunscrita es SM.

Similarmente, los cuadriláteros *RSLM* y *TRNL* son rectángulos también y, por tanto, cuadriláteros cíclicos. Además, dos de los diámetros de la circunferencia circunscrita del cuadrilátero *RSLM* son *SM* y *RL*, mientras que uno de los diámetros de la circunferencia circunscrita del cuadrilátero *TRNL* es también *RL*. Por tanto, los vértices de los tres rectángulos (*L, T, M, R, N* y *S*) están en la misma circunferencia.

Finalmente, consideremos el triángulo *LDR*, el cual tiene un ángulo recto en *D*, por lo que *RL* es un diámetro de su circunferencia circunscrita, que es la misma circunferencia a la que nos hemos referido en el párrafo anterior. Por consiguiente, *D* pertenece a dicha circunferencia.

De manera similar, se ve que *E* y *F* también están en la misma circunferencia.

Y aquí termina la demostración. Otro planteamiento interesante en este momento es determinar cuál es el centro de esta circunferencia, lo cual ayuda mucho para el caso de la construcción del trazo (ya sea que se haga con regla y compás o con una computadora). Para ello, es posible experimentar con ayuda de la computadora si el ortocentro o el circuncentro son el centro de esta circunferencia y, entonces, se tendrá *evidencia cabrística*[6] de que no es así.

Convendría lanzar el reto a los alumnos, quizá haciendo aproximaciones cada vez mejores de la posición del centro y llegar a afirmar lo siguiente.

Conjetura 5. El centro de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio del segmento cuyos extremos son el circuncentro y el ortocentro.

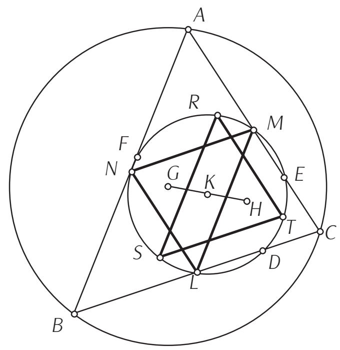
Para una demostración de este hecho, que lo convertiría en el Teorema 4, se utilizará la figura 13, la cual tiene la misma nomenclatura que las figuras anteriores, pero se ha añadido el circuncentro (*G*).

Consideremos los triángulos *ABC*, *RST* y *LMN*. Considerando los mismos argumentos que para el caso de la demostración del teorema anterior, se tiene que los tres triángulos son semejantes, pues sus lados correspondientes son paralelos entre sí. Además, como los lados de los dos últimos triángulos miden la mitad que los lados correspondientes del primer triángulo, entonces los triángulos *RST* y *LMN* son congruentes entre sí.

Puesto que *R, S* y *T* están en las alturas del triángulo original, *H* es el orto-

[6] La expresión "evidencia *cabrística*" (que por cierto se la atribuyó al doctor Alejandro Díaz Barriga Casales) la he usado para referirme a las ocasiones en que se obtiene información o experiencia, para formular una conclusión, a partir de las observaciones de las construcciones realizadas en la computadora, particularmente con el programa *Cabri*.

Figura 13



centro del triángulo *RST*. Y como *G*, circuncentro del triángulo *ABC*, se obtiene al construir las perpendiculares a los lados que pasan por *L*, *M* y *N*, entonces, *G* es el ortocentro del triángulo *LMN*.

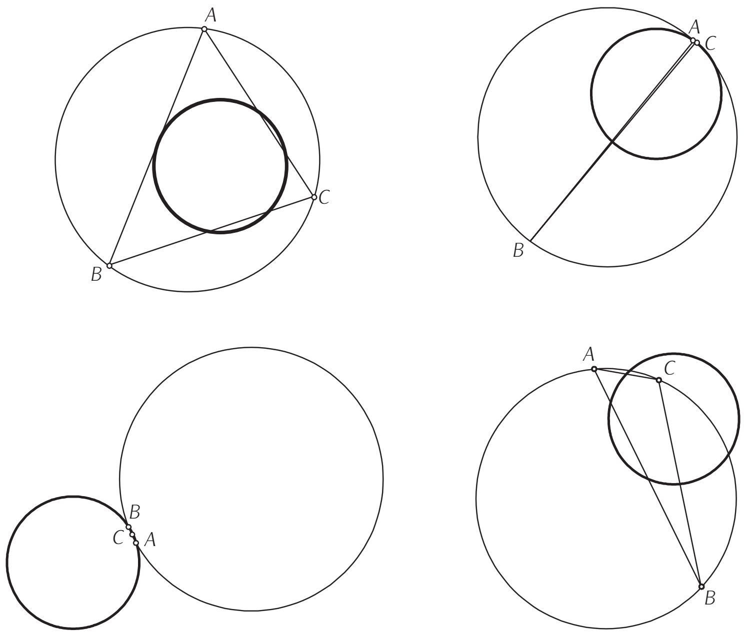
Es interesante observar que es posible obtener cualquiera de estos dos triángulos a partir del otro, realizando un giro de 180° con centro en un punto que coincide con el centro de la circunferencia de los nueve puntos, ya que los vértices de ambos triángulos están en ella. Ahora bien, con la misma rotación, el punto *G* (ortocentro de un triángulo) se convierte en el punto *H* (ortocentro del otro triángulo), por lo que el centro de la rotación y de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio del segmento que une a ambos puntos.

Como se dice comúnmente: *quod erat demostrandum*.

Para seguir hablando de esta circunferencia, se puede pensar en su tamaño en relación con el triángulo y a su circunferencia circunscrita. El software sirve para explorar una construcción en la que aparezca un triángulo *ABC* y sus circunferencias circunscrita y la de los nueve puntos, para ver la relación entre éstas en lo que respecta a sus tamaños.

Una posibilidad es hacer la construcción de tal manera que, al mover los vértices del triángulo, no se modifique ni el tamaño ni la posición de la circunferencia circunscrita (construcción que, de hecho, ya se planteó previamente al lector). Después se construye la circunferencia de los nueve puntos y se mueven los vértices, observando el tamaño de esta última circunferencia. Cuatro de las posiciones posibles de los vértices se ilustran en la figura 14, llegándose a casos extremos de hacer pequeño al triángulo o a alguno de sus ángulos.

Figura 14



Se podrá observar entonces que, al no variar el tamaño de la circunferencia circunscrita, parecería que la circunferencia de los nueve puntos tampoco varía en su tamaño, sino sólo de posición. Para estar seguros, se le podría pedir al software utilizado que muestre las medidas de los radios de ambas circunferencias y continuar explorando para tener suficiente *evidencia cabrística* y plantear lo siguiente.

Conjetura 6. En un triángulo cualquiera, el radio de su circunferencia de los nueve puntos mide la mitad del radio de su circunferencia circunscrita.

Sin embargo, esta afirmación no se queda como conjetura, sino que a continuación se presenta una demostración que la convierte en el Teorema 5.

Para ello, consideremos los triángulos *ABC* y *RST* (véase figura 13). Podemos establecer una correspondencia entre ellos ($\Delta ABC \leftrightarrow \Delta RST$) y como los lados correspondientes son paralelos entre sí, entonces ambos triángulos son semejantes.

Además, ocurre que cada uno de los lados del triángulo *RST* miden la mitad de lo que miden los lados correspondientes del triángulo *ABC*, por lo que las medidas de los radios de las circunferencias circunscritas de ambos triángulos están en razón de 2:1. Sin embargo, la circunferencia circunscrita del triángulo *RST* es la circunferencia de los nueve puntos, por lo que su radio es la mitad del radio de la circunferencia circunscrita del triángulo *ABC*. Con esto se han completado los argumentos de la demostración.

Así pues, basándonos en estos dos últimos teoremas, se puede decir que la circunferencia de los nueve puntos se obtiene al aplicarle a la circunferencia circunscrita una homotecia, con un razón de 2:1, respecto al ortocentro. Es como si la circunferencia circunscrita se encogiera progresivamente hasta que su radio se redujera a la mitad, al tiempo que sufre una traslación a medida que su centro se desplaza hacia el ortocentro, llegando hasta el punto medio del segmento que va del circuncentro a este último.

RELACIONES ENTRE DOS CURVAS

En los párrafos anteriores se mostró cuál es la circunferencia que describe el punto *O* de la figura 9 y se describieron algunas de sus propiedades. Esta circunferencia y la deltoide son dos curvas que se pueden generar, usando rectas de Simson, aprovechando la computadora. Ahora bien, ¿qué pasaría si se ponen juntas? El resultado se ve en la siguiente figura:

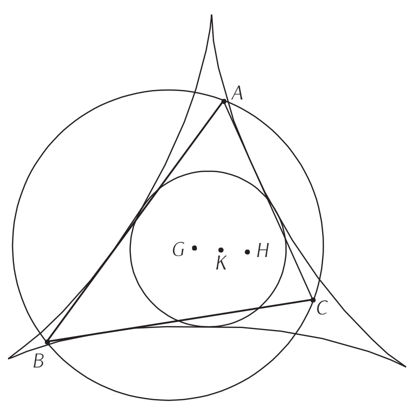
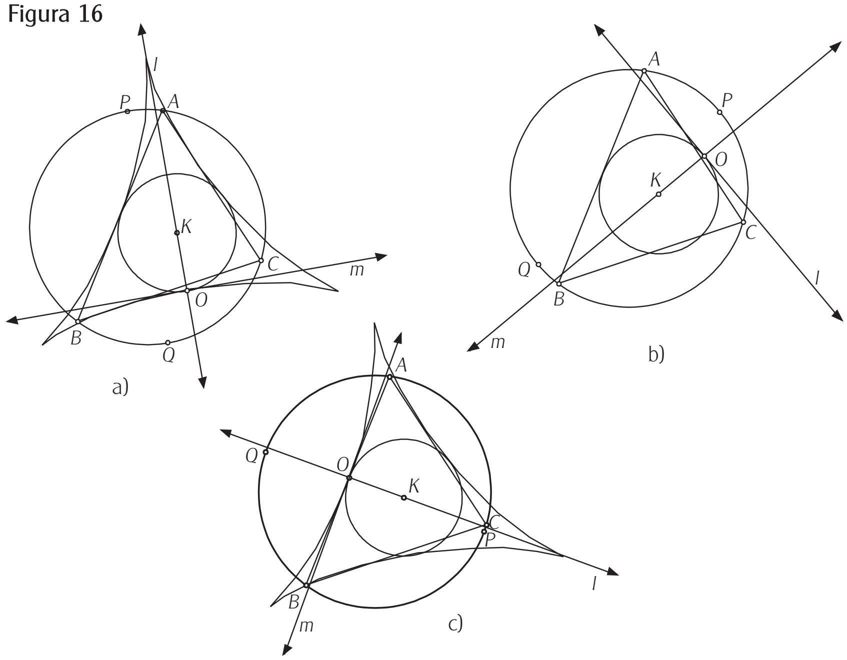


Figura 15

Figura 16



Con la computadora, se podrían mover los puntos iniciales de la construcción: los vértices del triángulo y el punto P que define la recta de Simson para observar lo que ocurre. Es más, si la construcción está hecha de tal manera que los vértices se pudieran mover sin que se modificara el radio de la circunferencia circunscrita (como ya se ha propuesto anteriormente), las observaciones podrían ser más enriquecedoras. De éstas, una podría ser que la deltoide y la circunferencia de los nueve puntos no se separan, parecería que son tangentes.

En realidad, ambas curvas son tangentes entre sí en tres puntos, y es posible realizar un análisis extra para proporcionar argumentos al respecto, pero se necesitan métodos analíticos que no ahondaremos aquí. Un trabajo experimental podría ser que los alumnos, con ayuda de la computadora, determinen cuáles son esos puntos de tangencia.

De hecho, ocurre que si se usan dos rectas de Simson basadas en puntos situados diametralmente opuestos, se tiene que si una de éstas es tangente simultáneamente a ambas curvas, la otra pasa por el centro de la circunferencia de los nueve puntos (véase la figura 16).

Al estar relacionadas estas dos curvas de esa manera, se tiene la ventaja de que es posible resolver algunos problemas de una de ellas, utilizando las propiedades de la otra. Es recomendable remarcar a los alumnos que, en la Matemática, ocurre en ocasiones que, para resolver un problema, se lo sustituye por uno similar o relacionado (escogido convenientemente) pero que es más sencillo de resolver. De hecho, en este momento ya estamos en posibilidad de responder a las Conjeturas 2 y 3, planteadas con anterioridad:

Conjetura 2. El tamaño de la deltoide generada con la recta de Simson de un punto *P* con respecto a un triángulo *ABC* depende del radio de la circunferencia circunscrita del mismo triángulo.

Conjetura 3. El "centro" de la deltoide generada a partir de una recta de Simson de *P* con respecto a un triángulo *ABC* es alguno de los puntos notables del triángulo (baricentro, ortocentro o incentro), exceptuando al circuncentro.

Primero consideraremos la Conjetura 3, pues al aceptar que ambas curvas son tangentes entre sí y por las simetrías de la deltoide, resulta que los centros de ambas son el mismo, por lo que la conjetura es **falsa**, así que habría que corregir: El "centro" de la deltoide generada con la recta de Simson de *P* con respecto a un triángulo *ABC* es el punto medio del segmento cuyos extremos son el circuncentro y el ortocentro del triángulo.

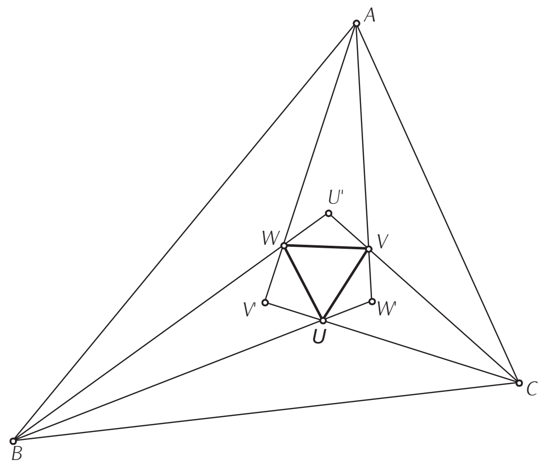
Para resolver el caso de la Conjetura 2, también se utiliza el hecho de la tangencia entre las curvas, lo cual implica que si una de ellas cambia de tamaño, la otra también lo hace y como ya se vio que el tamaño del radio de la circunferencia de los nueve puntos depende del tamaño del radio de la circunferencia circunscrita y no de la posición de los vértices en sí, entonces ocurre lo mismo con la deltoide: su tamaño depende de la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

Con lo anterior, se tiene que la conjetura no es conjetura en sí, sino un teorema: el Teorema 5. Con ello, se ha resuelto la incógnita sobre el tamaño de esta curva.

UN RESULTADO EXTRA

La deltoide, construida como se ha propuesto, tiene otras propiedades que pueden ser investigadas, haciendo su estudio aún más fructífero. Con ayuda de la

Figura 17



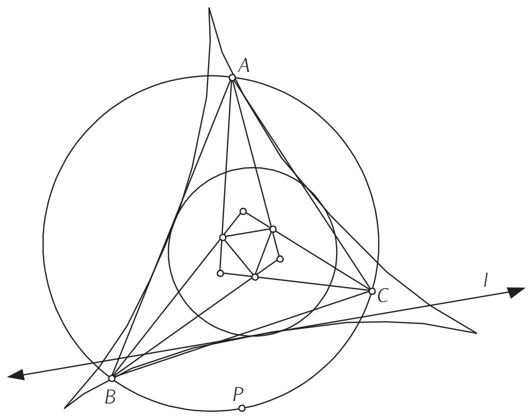
computadora, es posible explorarlas sin tener como objetivo principal, por la complejidad, hallar una demostración formal. En este trabajo, consideraremos un resultado más que, por tener una intención descriptiva, no se le incluye una demostración.

Antes que nada, primero consideremos el llamado *triángulo de Morley de un triángulo ABC,* el cual es un triángulo equilátero que se obtiene, primero, trisectando los ángulos interiores de un triángulo cualquiera, y luego uniendo con segmentos los puntos de intersección de las trisectrices adyacentes. Por ejemplo, y mirando la figura 17, si se tiene un triángulo *ABC* cualquiera y se trisecan sus ángulos interiores en *A, B* y *C* con *AV* y *AW, BW* y *BU,* y *CU* y *CV,* respectivamente, entonces los puntos *UVW* son los vértices de un triángulo equilátero: su triángulo de Morley.

Ahora bien, si además se considera un punto *P* en la circunferencia circunscrita del triángulo y a su respectiva recta de Simson *l,* y se coloca *P* de tal suerte que *l* sea tangente simultáneamente a la deltoide que se genera y a la circunferencia de los nueve puntos del triángulo (véase la figura 18), entonces ocurre que *l* es paralela al lado opuesto del triángulo de Morley del triángulo *ABC*.

Éste y otros resultados interesantes, incluyendo algunas de sus demostraciones, se encuentran en las referencias bibliográficas proporcionadas al final de este artículo.

Figura 18



COMENTARIO FINAL

Como se comentó al inicio de este artículo, aparecen aquí una serie de actividades y observaciones propuestas para que sirvan como una guía en el estudio, en el nivel medio, de curvas, aprovechando la potencialidad gráfica y de manejo a través de la manipulación directa de objetos geométricos que proporciona el Software para Geometría Dinámica. Asimismo, se hace hincapié nuevamente en el hecho de que esta propuesta está abierta al interés del profesor, las observaciones de los alumnos y las posibles conjeturas que puedan ser planteadas a través de un trabajo de grupo. Se hace la invitación al lector de no quedarse con las propuestas plasmadas aquí, sino ampliar las observaciones y explorar otras opciones.

Ha de hacerse la aclaración pertinente de que, aunque se han propuesto actividades que son más fáciles de realizar utilizando computadoras (personales o del tipo *hand held*), la tecnología informática no resuelve por sí misma los problemas de enseñanza y aprendizaje de la Geometría y del razonamiento deductivo, pues aceptar esto implica aceptar que la capacidad cognitiva del ser humano es equiparable a la de una computadora actual y negar la complejidad de los fenómenos educativos. Se hace, entonces, necesaria la participación activa del docente para promover la producción de conocimientos y desarrollo de habilidades, así como para evitar un fracaso en el uso de las computadoras en educación.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer por los comentarios al manuscrito original a la licenciada Noraísa González y al doctor Alejandro Díaz Barriga, así como a *ViL* por la paciencia mostrada al realizar las figuras y el formato una y otra vez hasta que satisfizo mis gustos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Coxeter, H.S.M. (1971), *Fundamentos de geometría*, México, Limusa Wiley.
Coxeter, H.S.M., S.L. Greitzer (1993), *Retorno a la geometría*, España, DLS Euler Editores.
De Guzmán, M. (1998), *La envolvente de las rectas de Wallace Simson en un triángulo: una demostración sencilla del teorema de la deltoide de Steiner* (sitio *web*) http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/Deltoide121298/00deltoi.htm. Visita: 18/02/2002, actualización: 12/1998.
Eves, H. (1985), *Estudio de las geometrías*, México, UTEHA, 2t.
Moise, E.E., F.L. Downs Jr. (1986), *Geometría moderna*, Estados Unidos, Addison Wesley Iberoamericana.
Weisstein, E.W. (2002), "Deltoide", en *Eric Weisstein's world of mathematics* (sitio *web*) http://mathworld.wolfram.com/Deltoid.html. Visita: 18/02/2002, actualización: 2002.

DATOS DEL AUTOR

Víctor Larios Osorio
Departamento de Matemáticas (Facultad de Ingeniería)
de la Universidad Autónoma de Querétaro
vil@uaq.mx

Algunos sitios en los que se puede encontrar información interesante acerca de otros problemas que se pueden trabajar con las herramientas propuestas en este trabajo son:

http://mathforum.org/dynamic/classroom.html
http://www.cut-the-knot.org/geometry.shtml
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Griffiths.shtml.
Laboratorio virtual de triángulos con Cabri
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/
Geometría interactiva
http://www.geometriainteractiva.com/
Geometría con Cabri II
http://terra.es/personal/joseantm/
Sitio sobre Cabri
http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto/cabrijava/risorse.html
Proyecto Cabri
http://www-cabri.imag.fr/
Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, Geometry
http://www.cut-the-knot.org/geometry.shtml
9-point circle as a locus of concurrency
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Griffiths.shtml
Morley's miracle
http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/Morley.shtml
Math Forum: Corner for Interactive Geometry Software
http://mathforum.org/dynamic/classroom.html