La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres

Resumen: Informamos el papel de la geometría dinámica (GD) como una herramienta mediadora entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. Se ejemplifica cómo afecta la GD a la estructura de los esquemas de uso que los estudiantes han desarrollado previamente en otros ambientes. La perspectiva teórica se erige sobre dos principios: el primero, el principio cognitivo, establece que toda forma de conocimiento está mediada por la acción de una herramienta material o simbólica. El segundo, el epistemológico, establece que la mediación de una herramienta transforma la naturaleza del conocimiento en construcción. La experimentación se realizó con 15 estudiantes entre 15 y 18 años. Los resultados sugieren que los estudiantes pueden descubrir y construir nuevos esquemas de uso como resultado de las dificultades generadas por el empleo inadecuado de una herramienta propia de la GD. En este proceso, el profesor es fundamental.

Palabras clave: geometría dinámica (GD), herramienta *vs.* instrumento, mediación instrumental, conocimiento perceptivo *vs.* geométrico, estudiantes de preparatoria.

Dynamic geometry, a mediation tool between perceptual and geometric knowledge

Abstract: We report on the role of Dynamic Geometry (GD) as a tool mediating between perceptive and geometric knowledge. Here we exemplify how GD changes the structure of the schemes that students had previously developed in other environments. These results are part of a project that was carried out for three years. The theoretical perspective taken is based on two principles: the first one, the cognitive principle, maintains that all forms of knowledge are mediated by the action of a material or symbolic tool. The second, the epistemological principle, sustains that the mediation of a tool transforms the nature of knowledge which is under construction. The experimental phase was developed with 15 students aged 15-18. Results suggest that students can discover and construct new schemes of use as a result

Fecha de recepción: 5 de junio de 2008.

of difficulties generated by inadequate use of dynamic geometry tools. Throughout this process, the teacher's role is fundamental.

Keywords: dynamic geometry (GD), tools *vs.* instrument, instrumental mediation, perceptive *vs.* geometric knowledge, college students.

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años, la geometría ha venido recuperando su lugar en la enseñanza. Ello se debe, en gran medida, al impulso recibido desde la geometría dinámica (GD), que ha puesto de manifiesto el carácter estructural de los dibujos que se generan sobre la pantalla de las computadoras o calculadoras. Hoy día, se vuelven a plantear problemas que han sido recurrentes para la enseñanza de la geometría, como la confusión entre los objetos geométricos y los dibujos que los representan.

Las matemáticas constituyen una forma de tecnología simbólica y, en concordancia con ello, la GD se concibe como un instrumento semiótico que exhibe su fuerza en la manera como responde al problema del objeto geométrico. A partir de ahí, el razonamiento geométrico puede verse enriquecido por los modos de argumentación que se hacen viables al acercar la percepción y el razonamiento.

Una dificultad documentada en la literatura (véase el apartado "Antecedentes") y conocida por los profesores de geometría es la relacionada con el aprendizaje de las propiedades geométricas. O sea, la capacidad de descubrir relaciones estructurales de los objetos geométricos, la de expresar dichas propiedades tanto de manera oral como escrita y, finalmente, la habilidad para validarlas en el marco de una teoría. Una posible causa puede ser el tipo de representación estática que se utiliza para *movilizar* las ideas geométricas durante una clase. Por lo tanto, sería necesario describir y analizar lo que *sucede cuando se utiliza la GD*.

En este artículo pretendemos responder: ¿qué tipo de conocimiento moviliza el estudiante al resolver problemas geométricos en un ambiente de GD y su relación con los esquemas de uso que se construyen?

Los resultados que se presentan forman parte de una investigación cuya problemática se centra en estudiar la "influencia de la geometría dinámica en el surgimiento y desarrollo de estrategias argumentativas en la resolución de problemas geométricos de los estudiantes de preparatoria". Este problema de investigación forma parte de un proyecto doctoral (Sandoval, 2005). Algunos de los resultados se han publicado en congresos nacionales e internacionales.

ANTECEDENTES

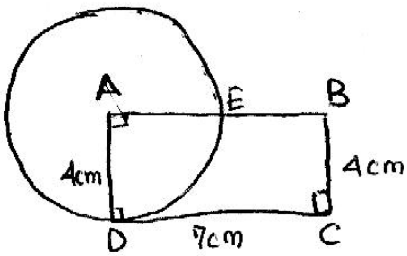
En toda actividad geométrica es indiscutible el papel que han tenido y siguen teniendo las representaciones geométricas como apoyo a la intuición, ya que son fundamentales en la comprensión de enunciados, en los procesos de exploración y conjetura, en la resolución de problemas y en la búsqueda de demostraciones, pues dejan "ver" lo que oculta el enunciado. Al respecto, Mesquita (1998) afirma que la representación geométrica, aunque no permite resolver directamente el problema, contribuye a la definición de la estructura del problema para facilitar las transformaciones de una representación a otra. Pero ¿qué sucede cuando el dibujo no está bien hecho? Con frecuencia, los alumnos tienen dificultades para decodificar una representación geométrica, para descubrir las relaciones estructurales y, más aún, para describirlas coherentemente y utilizarlas en la resolución de un problema. En ocasiones, la representación puede generar obstáculos que impidan llegar a una solución.

Un ejemplo que ilustra cómo utilizan los estudiantes la percepción como medio de deducción es el siguiente (Pluvinage, 1996; Sandoval, 2001, 2005):

En este esbozo, hecho a mano, están dibujados:

- un rectángulo ABCD;
- un círculo con centro en A que pasa por D.

El círculo corta el lado AB en el punto E.
¿Qué longitud tiene el segmento EB?

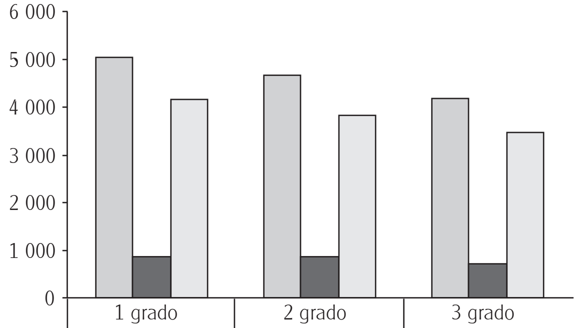


3 cm	3.5 cm	4 cm	Ninguna de las anteriores

Este problema se aplicó en mayo de 2005, a estudiantes de secundaria como parte de una competencia regional realizada en un estado de la República Mexicana, vía Internet. Hasta ese momento, Cabri había sido poco utilizado por los maestros. Los resultados obtenidos, de un total de 13 930 alumnos de los tres grados de secundaria, se presentan en la figura 1.

Los resultados obtenidos muestran una fuerte tendencia a establecer únicamente relaciones perceptivas, similar en los tres grados (82%). Lo anterior presupone un razonamiento basado en la percepción y vinculado con la representación

Figura 1 Resultados obtenidos a este problema, estratificado por grados



	1 grado	2 grado	3 grado
Total	5 055	4 688	4 187
Respuestas correctas	859	865	721
Respuestas incorrectas	4 190	3 823	3 461

geométrica, desligada de la información dada tanto en ésta (longitud de los segmentos del rectángulo) como en el enunciado. Cabe destacar que el programa curricular de los tres grados contempla el estudio de estas figuras geométricas tanto en su construcción como en el estudio de sus propiedades. Los resultados anteriores hacen comprensible que la confusión entre el dibujo y el objeto geométrico sea un problema presente en diferentes niveles educativos. Esto se debe a que la representación no alcanza a ser concebida, al mismo tiempo, como objeto perceptivo y estructural.

La GD ofrece un campo de exploración que no es factible en las representaciones con lápiz y papel. Los resultados de investigaciones muestran no sólo potencialidades en el uso de la GD en la resolución de problemas matemáticos, sino también restricciones. Por ejemplo, Arzarello *et al.* (1998) y Olivero (2003) encontraron que el arrastre permite la exploración y la validación de una construcción para producir y validar conjeturas y, a la vez, ayuda a su formulación de manera condicional (los estudiantes construyen enunciados del tipo *Si... entonces...*) “Los comportamientos de arrastre cambian según la especificidad de las modalidades epistemológica y cognoscitiva” (p. 33). En este mismo sentido, Olivero y Robutti (2001) consideran que la medida en Cabri constituye un *puente* entre el nivel perceptivo y el teórico, y puede ser una ayuda en la interacción entre los dos niveles.

> Las medidas son útiles cuando el estudiante desea saber si algo es verdad; sin embargo, si el alumno desea probar que algo es verdad, las medidas no le son útiles por mucho tiempo. [...] Las medidas en Cabri [de la misma manera que el arrastre] son herramientas de mediación entre el nivel perceptivo de la actividad matemática y la teórica de los estudiantes (p. 11).

Otra de las potencialidades está relacionada con el estatus de dependencia y orden de los componentes de una representación. Al respecto, Talmon y Yerushalmy (2004) afirman que en la GD el orden en que se dibujan los componentes de un objeto y la dependencia entre ellos es determinante, mientras que en la geometría de lápiz y papel no parece tener sentido.

Por otro lado, el uso de la GD en la resolución de problemas abiertos fomenta la producción y validación de conjeturas, ya que "pone énfasis en aspectos teóricos del dibujo y hace que los estudiantes sean conscientes de la teoría que hay detrás de sus dibujos" (Furinghetti *et al.*, 2001, p. 334).

Una de las restricciones que tiene la GD se relaciona con lo numérico-perceptivo. Para resolver este conflicto de usar un software y uno más general y teórico, el papel del profesor es crucial. Al respecto, Olivero y Robutti (2002) resaltan la importancia de esta intervención en el sentido de hacer conscientes a los alumnos para que vean "que una demostración no depende de una representación gráfica particular que ha sido usada" (pp. 14-15).

Teniendo en cuenta tanto las potencialidades como las restricciones anteriores, partimos del supuesto de que el uso de la GD contribuye al desarrollo de la comprensión de las ideas asociadas con la construcción y la demostración en geometría. Además, que las herramientas del arrastre, la construcción y la medida ayudan a los alumnos en la transición de lo perceptivo a lo teórico.

EL PAPEL DE LAS HERRAMIENTAS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Los seres humanos nos hemos valido de artefactos de todo tipo para mediar acciones. En la educación, en particular, Rabardel (1999) considera que los instrumentos cumplen una función muy importante para el estudiante, no son únicamente auxiliares o neutros dentro de la enseñanza, son parte activa en la construcción del conocimiento mediante sus acciones.

> Los artefactos, las herramientas y los signos contribuyen a la formación de las funciones psíquicas y los conocimientos. Los instrumentos constituyen las formas que estructuran y mediatizan nuestros registros de las situaciones y los saberes y, por ello, ejercen una influencia que puede ser considerable. La mediación instrumental aparece como un concepto central para pensar y analizar las modalidades por las cuales los instrumentos influyen en la construcción del saber (p. 204).

Para Rabardel (1999), un *artefacto* puede ser material o un sistema simbólico, empleado como medio para la acción (el ábaco, la computadora, mapas o un programa de GD). El *instrumento* es una entidad mixta que comprende el artefacto material y los *esquemas de uso*. Estos últimos son las representaciones que han formado parte de las competencias del usuario y que son necesarias en la utilización del artefacto. Es decir, son resultado de una construcción propia del sujeto, autónoma o producto de una apropiación de esquemas sociales de utilización.

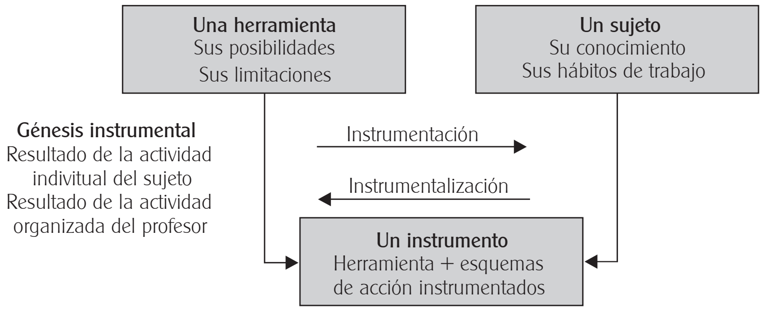
Cada herramienta genera un campo de acción y, a su vez, le impone al sujeto ciertas restricciones que debe identificar, comprender y aprender a administrar. Dichas restricciones hacen posible el surgimiento de nuevos tipos y nuevas formas de acción. En tal sentido, la utilización de una herramienta incrementa las capacidades de asimilación del sujeto y contribuye a la apertura del campo de sus acciones posibles (Rabardel, 1999).

El artefacto relacionado con la acción es lo que Rabardel denomina *instrumento*. Por ejemplo, dos instrumentos diferentes relacionados con el artefacto compás son construir círculos o trasladar una distancia. Un artefacto puede generar varios instrumentos. La producción de éste se llama *instrumentación*. Con la utilización del artefacto compás y las propiedades asociadas al uso de este artefacto puede generarse la definición de círculo (Santillán, 2002).

El impacto del instrumento sobre la conceptualización no se manifiesta de inmediato dados los sistemas técnicos complejos. La apropiación del instrumento por parte de los usuarios resulta de un desarrollo progresivo de *génesis instrumental* (véase figura 2). Entonces, el instrumento no es algo dado, no existe en sí mismo, sino que es elaborado por el sujeto en este proceso. El instrumento se convierte en tal, cuando el sujeto se ha apropiado de él y lo ha integrado a su actividad (Rabardel, 1999, p. 210).

Analicemos brevemente cómo resolver el siguiente problema usando GD: Sea AB un segmento, *d* la mediatriz de AB, O un punto de la mediatriz (véase la figura 3). Construir el rectángulo con centro en O y vértices A y B.

Figura 2 Explicación de la génesis instrumental (Trouche, 2003)



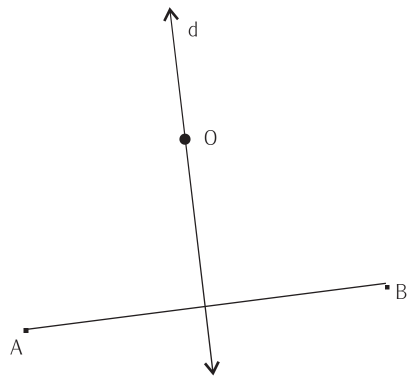
La manera de resolver el problema tiene relación estrecha con las herramientas disponibles y su manejo depende de la integración del conocimiento matemático y de la propia herramienta. En particular, en Cabri se pueden usar la simetría central, rectas paralelas, perpendiculares y círculo, o rectas y círculo para construir un diagrama dinámico de un paralelogramo. El empleo de la herramienta afecta no sólo la opción de la estrategia de la construcción, sino también las acciones que le sucederán.

Cada una de las acciones que se van a implementar requieren una comunicación con Cabri mediante movimientos del cursor y clics. Laborde (2004*b*) define esta secuencia de acciones básicas como un *esquema de acción instrumentado*. Además, el usuario debe construir una organización invariante unida a la secuencia de acciones elementales y es lo que se define como *el esquema de uso* (Rabardel, 1999). Como lo plantea Laborde (2004*a*, 2004*b*), el diseño del propio programa afecta la construcción de éstos, incluso el conocimiento matemático también está inmerso en ellos.

Por tanto, la manera de resolver un problema en matemáticas tiene relación estrecha con las herramientas disponibles y su manejo depende de la integración del conocimiento matemático y de la propia herramienta. Como lo comenta Santillán (2002):

> El medio [...] es la base material que hace posible las acciones del sujeto [...] La meta o fin no cambia si utilizamos una u otra herramienta, pero el proceso para alcanzar la meta, según los medios que se utilicen, cambia y cambia la estrategia. La planeación, una actividad cognitiva compleja, queda

Figura 3 Representación figural del problema



marcada por la herramienta [...] La actividad cognitiva es inherente al instrumento (p. 82).

Como se ha esbozado a lo largo de esta sección, el uso de las tecnologías digitales conlleva una reestructuración cognitiva, ya que también requiere el aprendizaje de una sintaxis. En algunos casos, el manejo de una sintaxis diferente a la del ambiente informático, como es el ambiente de lápiz y papel, genera en el estudiante ciertas dificultades, las cuales se deben principalmente a que los usuarios prefieren trasladar sus estrategias de lápiz y papel a estas tecnologías digitales al resolver los problemas. La introducción de estas tecnologías digitales en la enseñanza ha sido concebida por algunos como la solución para evitar los problemas materiales a los estudiantes y permitirles examinar sólo sus problemas conceptuales. La situación no es así de simple, ya que las herramientas introducen problemas de manipulación y nuevas preguntas en cuanto a la resolución de tareas planteadas a los estudiantes (Laborde, 2004).

METODOLOGÍA

El tipo de estudio que informamos es exploratorio-descriptivo (Hernández *et al.*, 2003), ya que analizamos la relación entre lo perceptivo y lo teórico en el razonamiento de los estudiantes cuando resuelven un problema apoyados en la GD de Cabri. Realizar el análisis requirió un seguimiento a partir del momento en el que los alumnos comenzaban la lectura del enunciado y todas las acciones realizadas durante el transcurso de la actividad. Este tipo de metodología permite dar cuenta, por ejemplo, de la utilización de herramientas, el uso o identificación de alguna propiedad dentro del campo perceptivo o teórico, y la sistematización y validación de las soluciones, así como también de los vacíos de significación y las diferentes interpretaciones que requerían procesos de negociación de significados y cambios en las acciones implementadas. En esta investigación se utilizaron técnicas de tipo cualitativo. En particular, el estudio de casos permitió mostrar la consistencia de los significados personales de los estudiantes involucrados en la resolución de los problemas.

La experimentación se realizó durante tres meses con 15 alumnos de primer semestre de bachillerato en la Ciudad de México durante tres meses. La edad de los estudiantes osciló entre 15 y 18 años, con conocimientos elementales de geometría y sin experiencia alguna con la GD. Dichos conocimientos y habilidades básicas se confirmaron a través de un cuestionario y una entrevista semiestructurada. Los criterios para seleccionar a los participantes se basaron en el cuestionario inicial, buscando tener una muestra representativa de cada una de las diferentes categorías establecidas por Sandoval (2001) en relación con la interpretación figural y con las formas de argumentación. La participación de los estudiantes no estuvo sujeta a calificación alguna y fue en horario fuera de clase.

Mi participación fue activa dentro de la fase experimental, pues fui la instructora de los sujetos de estudio en el proceso de familiarización con Cabri y observadora participante en la fase de implementación de las actividades.

La tecnología utilizada

Para la experimentación se utilizaron computadoras, una por equipo de trabajo, debido a la facilidad para videograbar el desarrollo de las actividades. Puesto que el interés era observar cómo algunas herramientas propias de la GD generan o modifican las soluciones presentadas por los estudiantes, se puso especial atención en observar la interacción que tuvieron los sujetos de estudio con este tipo de tecnología, esos objetos informáticos, sus representaciones y cómo los relacionaron con la solución de los problemas planteados en las actividades.

Se utilizó Cabri en el supuesto de que puede ayudar a los estudiantes a identificar las propiedades geométricas que subyacen en la construcción de la figura y que son necesarias para la producción de una explicación (Arzarello *et* *al.*, 1998; Furinghethi *et al.*, 2001; Mariotti, 2001; Olivero y Robutti, 2001, 2002; Olivero, 2003). Se comprobó que la tecnología provee, en este caso, la retroalimentación a las acciones que necesitan los estudiantes para poder interpretar sus resultados dentro de la geometría euclidiana.

Las actividades

En el diseño y selección de las actividades se tuvo en cuenta: el nivel académico de los estudiantes, el potencial de la GD de Cabri, la presentación de las actividades y los contenidos involucrados en la solución de cada actividad. El diseño de las actividades por explorar incluyó problemas abiertos (en el sentido que lo proponen Furinghetti *et al.*, 2001, p. 322). La actividad aquí informada se rediseñó de Healy y Hoyles (1998) de tal manera que permitiera la construcción de una configuración dinámica, análisis de invariantes, construcción de un enunciado (conjetura) y elaboración de una explicación (validación de una conjetura).

Trabajo en el salón de clase

Se estableció un acuerdo dentro del salón de clase que implicó nuevos papeles tanto para mí como para los estudiantes. En este tipo de trabajo los alumnos están conscientes de que todos pueden y deben contribuir a la solución del problema y que la participación y comparación de ideas y estrategias es mucho más productiva que el esfuerzo aislado.

Cada sesión de trabajo se dividió en dos partes. En la primera, los alumnos se organizaron en equipos de máximo tres y se les dio un tiempo adecuado (en promedio hora y media) para que exploraran y resolvieran el problema planteado. En la segunda parte, un estudiante de uno de los equipos, elegido por ellos mismos, presentó el proceso y la solución obtenida por su equipo a todos los demás participantes de la clase. La discusión fue dirigida por mí. La discusión plenaria permitió la afinación de argumentos y, en general, una reflexión más profunda sobre las estrategias involucradas en la solución de los problemas. Los estudiantes, con su trabajo y apoyados en la GD mediante procesos de exploración, generaron conjeturas y argumentos que validaron sus resultados. En este artículo sólo presentaremos los resultados de la primera parte de la sesión de trabajo relacionada con resolución de problemas abiertos.

El proceso de familiarización con Cabri

El propósito era buscar que los alumnos conocieran el funcionamiento básico de la GD; que generaran sus propios esquemas de uso y manejaran la herramienta con eficiencia. Esta etapa les permitió conocer y localizar los diferentes comandos, diferenciar entre objetos independientes (iniciales) y objetos dependientes, establecer relaciones entre diversos objetos, utilizando los comandos del programa, etc. Una figura en Cabri puede realizarse mediante distintos procedimientos de construcción. En tal sentido, la GD permite varias maneras de resolver un mismo problema. Se da por sentando que dicha solución depende del conocimiento movilizado por el sujeto.

RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD EN EL SALÓN DE CLASE

Solucionar una actividad matemática en un ambiente tecnológico requiere dos clases de conocimiento: el matemático y el instrumental. Los significados que construye un sujeto están contextualizados en la experiencia fenomenológica y en su proceso de descontextualización, esto es, una evolución en los significados requiere la construcción social en clase con la guía del profesor (Mariotti, 2001).

Hemos seleccionado algunos episodios correspondientes al desarrollo de un problema abierto. En diferentes segmentos de las transcripciones (diálogos o respuestas escritas) se han resaltado, usando *cursivas,* las partes que consideramos más relevantes. Usaremos nombres ficticios para referirnos a los estudiantes.

El problema que se les planteó a los alumnos fue:

> A es el centro de un círculo y AB es un radio. Construye la mediatriz del radio AB. (La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que lo divide en dos partes iguales.) En uno de los puntos donde la mediatriz corta a la circunferencia, coloca un punto C. Une los puntos A, B y C. ¿Qué figura se obtiene? Escribe un enunciado que caracterice tu conjetura. Explícala.

Descripción global de resultados

Los estudiantes se organizaron en siete equipos. De los resultados obtenidos, seis equipos hicieron bien la construcción sugerida en el enunciado, excepto un equipo formado por tres estudiantes. Este equipo se analizará en detalle en la siguiente sección.

La mayoría mostró claridad al interpretar el problema, no tuvieron dificultad con el significado de mediatriz ni de triángulo equilátero y se debió, posiblemente, a las discusiones previas en las actividades de familiarización y al comando de *Mediatriz*. Al parecer los estudiantes construyeron este esquema de uso. El interés no era indagar si los estudiantes tenían el concepto de triángulo equilátero o de mediatriz, sino explorar el resultado de integrar su conocimiento, sus maneras de trabajar y los esquemas de uso propios de las herramientas de Cabri para el problema geométrico planteado.

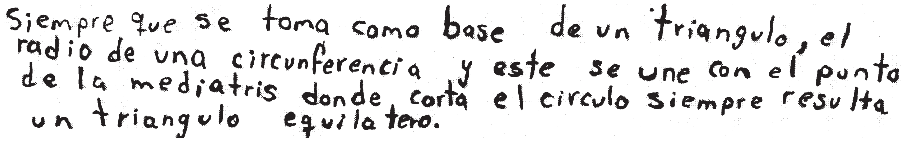
Una vez hecha la construcción, la primera estrategia para establecer el tipo de figura formada por los puntos A, B y C fue utilizar la medición. La conclusión a la que llegaron los seis equipos fue que el triángulo era equilátero, porque sus lados eran iguales y cada uno de los ángulos internos medía 60°. Su razonamiento se basa en lo que perciben referente a la apariencia y a su propia lectura de los datos numéricos dados por la GD. Todos los equipos usaron el arrastre para verificar su construcción.

Para justificar que la figura siempre era la misma (un triángulo equilátero), en el caso de los mismos seis equipos, los alumnos retomaron parte de la descripción hecha de su construcción. Cinco equipos establecieron la primera relación geométrica: los segmentos AC y AB son radios de la misma circunferencia y, por tanto, son iguales.

En la redacción de enunciados se identifican diferencias en relación con su estructura. En el caso de los equipos de René-Fernando, Liliana-Gabriela, Fermín-Gustavo, lo que prevaleció fue la descripción de sus observaciones y, por ende, no utilizaron una estructura del tipo "si... entonces...". Un ejemplo de este tipo de enunciado es el de Fermín: "Toda figura que tenga un punto como centro de un círculo, y otro punto *(en la circunferencia)* unido con el centro *(o sea un radio),* una mediatriz que tenga un punto en cualquier lado de ella y que divida el radio, al unir los tres puntos formará un triángulo equilátero."

Sin embargo, enunciados como los escritos por Fanny-Enrique, Camila-Gladis-Sofía y Felipe-Omar establecieron condiciones y una conclusión. Uno de los enunciados con mejor redacción es el siguiente:

Figura 4 Enunciado redactado por Fanny y Enrique



Este tipo de enunciado se consideró como teórico, ya que hizo referencia a elementos geométricos y posiblemente fue el resultado de la interacción entre el conocimiento, los estudiantes y Cabri. En la redacción se nota el uso de cuantificadores universales y condiciones necesarias y suficientes.

Los resultados obtenidos (construcciones, enunciados y explicaciones) sugieren que, si un alumno tiene una interpretación "pobre" de los elementos involucrados en el dibujo electrónico y éstos están asociados con el problema, su solución quedará ligada con herramientas perceptivas. Estas herramientas se caracterizan por su relación con la apariencia y los resultados numéricos. Los argumentos se establecen con una estructura más descriptiva que explicativa. De lo contrario, los estudiantes exhiben el uso de herramientas no sólo propias del programa, sino un vínculo entre esa evidencia con la teoría geométrica, a fin de fundamentar sus soluciones. En Sandoval (2005), se presenta una categorización de las estrategias argumentivas de los estudiantes al resolver problemas geométricos con GD. En la figura 5 se sintetiza lo realizado por los estudiantes y comentado en esta sección.

Figura 5 Resultados globales de la actividad. Parte 1

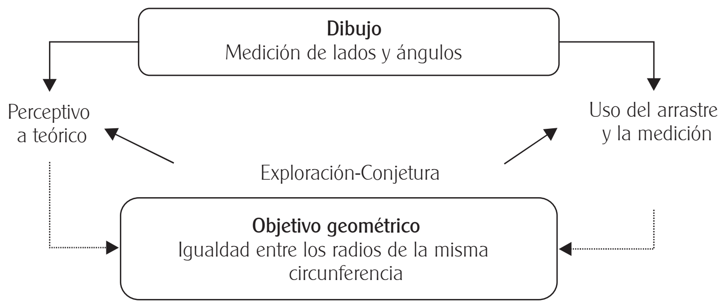
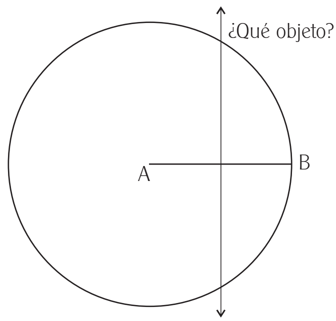


Figura 6 Confusión generada por el comando *Punto sobre objeto*



Esquemas de uso y gd. El caso de Gladis, Sofía y Camila (G, S y C)

La manera de resolver un problema, en matemáticas, tiene relación estrecha con las herramientas utilizadas y su manejo depende de la integración del conocimiento matemático y de la herramienta misma. Un ejemplo de ello, es el caso de G, S y C, quienes hicieron una interpretación diferente del enunciado del problema.

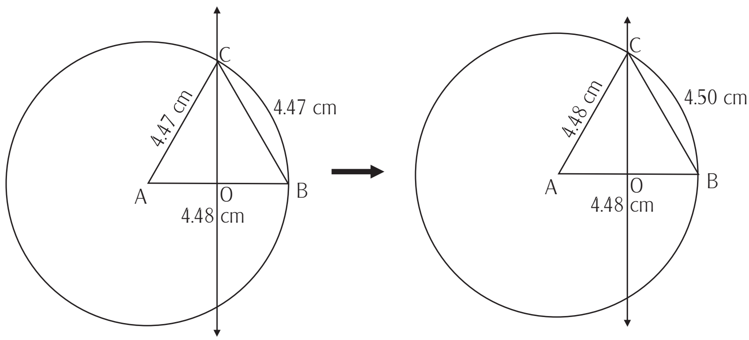
1. Esquemas de uso ligados al contexto del lápiz y el papel

La primera situación conflictiva a la que se enfrentó el equipo fue la ubicación del punto C[1] y persistió durante el desarrollo de la actividad. Sofía leyó las instrucciones y, una vez que terminó el enunciado, señaló con su dedo en la pantalla el lugar del punto C. Cuando Gladis quiso ubicar el punto C con el comando *Punto sobre objeto,* en lugar de *Punto de intersección, Cabri preguntó ¿Qué objeto?* (véase la figura 6).

Dicho mensaje indica ambigüedad. Las alumnas tenían un esquema de uso relacionado con esta herramienta análogo al ambiente de lápiz y papel, esto es, únicamente colocar un punto sobre la circunferencia y la mediatriz, pero en Cabri es diferente. El equipo no supo qué opción elegir y, por tanto, tal pregunta generó la disyuntiva de la ubicación del punto sobre la mediatriz o sobre la circunferencia (son las opciones que les muestra Cabri, véase la figura 6). Esta situación se evidencia en el siguiente diálogo, en el que Gladis preguntó a sus dos compañeras acerca de la ubicación del punto C:

[1] Donde la mediatriz corta a la circunferencia.

Figuras 7a y 7b Conflicto causado por la ubicación del punto C en la construcción



GLADIS: *¿Sobre la mediatriz o sobre la circunferencia?*

Sofía leyó nuevamente el enunciado: "Donde la mediatriz corta a la circunferencia".

Gladis lo ubicó sobre la mediatriz y continuó con la construcción utilizando el comando de *Triángulo* para unir los puntos A, B y C. Esta interacción evidencia el desconocimiento que tienen las estudiantes sobre el comportamiento dinámico de las herramientas propias de Cabri y, por consiguiente, de la jerarquía de dependencia entre los objetos inmersos en una construcción. Asimismo, muestra ausencia de esquemas de uso propios de Cabri relacionados con punto de intersección y punto sobre un objeto, quizás por desconocimiento de las características de la geometría dinámica. Resolver esta ambigüedad requería un conocimiento de las características propias de los comandos *Punto sobre objeto y Punto de intersección,* esto es, de los objetos iniciales necesarios para utilizar dichos comandos. Sin embargo, el que las herramientas sean descubiertas por los estudiantes implica que las usen posteriormente con sentido.

2. Validación de conjeturas. Uso de la medición

La conjetura de Gladis, después de sus observaciones, fue que "se supone" que las medidas de los tres lados deben ser las mismas; es decir, el triángulo era equilátero. El equipo esperaba que los resultados de la medición fuesen iguales, pero se sorprendieron al ver que sólo la medida de los segmentos AC y BC reportaban dicha igualdad (véase la figura 7a). Al momento se generó un conflicto entre su percepción y el resultado de la medición, no obstante las motivó a iniciar el proceso de búsqueda de explicaciones para ese resultado.

CAMILA: ¡Ehhh! ¿No será que este punto está muy abajo [se refiere al punto C]? A ver *sube tantito* el punto C.
GLADIS: Es que el punto C como lo colocamos sobre la mediatriz, dije que era sobre la circunferencia. ¿Lo coloco sobre la circunferencia?
CAMILA Y SOFÍA: ¡Sí!

Al momento no utilizaron el arrastre, sólo razonaron basadas en la figura estática. Gladis borró el punto C y lo colocó ahora sobre la circunferencia, luego trazó el triángulo. De nuevo, usaron el comando de medición para verificar su conjetura, pero los resultados no coincidieron. Ahora eran iguales los segmentos AB y AC y, por tanto, el conflicto entre lo perceptivo y la medición continúa (véase la figura 7b). Otra vez el equipo buscó explicaciones para esas medidas.

GLADIS: Pero, ¿por qué cambió éste? [Se refiere a la medida del segmento BC].
SOFÍA: O sea es que de hecho éste [señala AC] *sí debe medir igual* que éste [señala a AB] *porque son radios*.

Tal estrategia argumentativa evidenció elementos teóricos, ya que no estaba anclada únicamente en la percepción, pues las estudiantes lograron ver a través de ella (proceso de visualización). En otras palabras, la interpretación que le dan a dicha representación se acerca más al objeto geométrico. Sofía establece las relaciones estructurales que dan soporte a lo que las medidas muestran (véanse las figuras 7a y 7b): todos los radios de la misma circunferencia son iguales, como queda plasmado en el siguiente diálogo.

SOFÍA: Pero si éste [parece que se refiere al triángulo ACO][2] tiene la misma altura que éste [parece que se refiere al triángulo BCO].
GLADIS: ¿Tiene que ser el triángulo equilátero? Se supone que con base en la construcción que hicimos *los tres lados sí debían medir lo mismo*.

Estos resultados coinciden con lo afirmado por Olivero y Robutti (2003) en el sentido de que la medición propició la reflexión entre lo que observaban

[2] Se denotará como O al punto de intersección de la mediatriz y el radio AB.

numéricamente y su conocimiento geométrico. Es decir, esta herramienta sirvió de puente entre el conocimiento perceptivo y el geométrico.

3. De lo perceptivo a lo geométrico. Uso del arrastre

Como se describió en el inciso 2, la medición generó conflicto en las estudiantes y, por consiguiente, se vieron en la necesidad de revisar su conjetura. Hasta ese momento las medidas fueron el único medio de verificación, sin embargo, apareció otra herramienta en juego, sugerida por Sofía: "Hazle el arrastre nada más para ver qué triángulo forma". Gladis seleccionó el punto C y lo movió lentamente, buscando que las tres medidas coincidieran, y así sucedió.

CAMILA: ¡Ya! Ya quedó.
GLADIS: ¿Aquí? ¿Crees que esté bien encima de la recta y la circunferencia?

Lo anterior muestra el origen de una nueva conjetura: para que las medidas sean iguales, es decir, que el triángulo ABC sea equilátero, el punto C tiene que estar en la intersección de la mediatriz y la circunferencia. La relación que se establece entre los elementos es perceptiva.

SOFÍA: [...] Hazle la prueba del arrastre, a ver.

El arrastre ahora fue realizado sobre la circunferencia y se evidenció que las tres medidas permanecen iguales entre sí. Por lo tanto, se mantuvo la invariante de que el triángulo ABC era equilátero. La observación fue comentada en el equipo.

GLADIS: Es que no estaba bien el punto de arriba [refiriéndose al punto C].

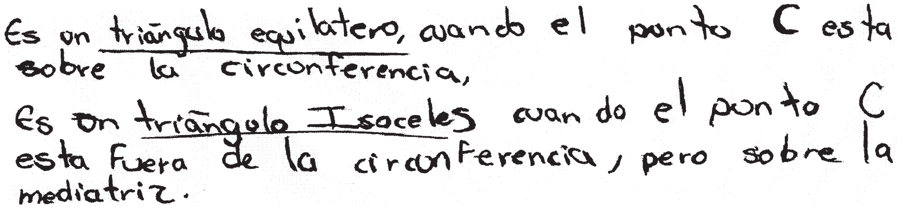
Las conjeturas formuladas por el equipo son resultado de la exploración dinámica en su construcción, es decir, son enunciados dinámicos. El conflicto continuó, por lo que solicitaron mi intervención. Puesto que mi papel era de investigadora y no de profesora, mi intervención se limitó a sugerir nuevamente la lectura del enunciado y la revisión de la construcción. El equipo inició un intercambio de ideas con el propósito de buscar una explicación para la evidencia numérica de su pantalla, pero no lograron encontrarla.

Camila retomó su conjetura, el triángulo es equilátero si cumple con ciertas condiciones. Para verificarla, reubicó el punto C en la intersección (perceptiva) de la circunferencia y la mediatriz. Como resultado de la acción, las medidas coincidieron. En el siguiente diálogo, la argumentación muestra el establecimiento de condiciones necesarias para que el triángulo sea equilátero.

GLADIS: Sí cumple [refiriéndose a que el triángulo ABC es equilátero].
SOFÍA: Pues *al hacer la prueba del arrastre* [pausa] *miden lo mismo*.
GLADIS: *Siempre y cuando* el punto C esté sobre la circunferencia, ya que [retoma el ratón] la mediatriz es toda ésta [mueve a C sobre la mediatriz], por lo que *el punto tiene que estar aquí* [en la intersección].

Las conclusiones a las que llegaron fueron producto de un acuerdo mutuo, vinculado a la exploración dinámica del dibujo electrónico, como se muestra a continuación (figura 8).

Figura 8 Justificación dada por G, S y C, al inciso 4


Es un triángulo equilatero, cuando el punto C esta sobre la circunferencia,
Es un triángulo Isoceles cuando el punto C esta fuera de la circonferencia, pero sobre la mediatriz.

A pesar de hacer exploraciones, mediciones, construcciones auxiliares y arrastrar objetos libres, el equipo no pudo explicar *por qué* la igualdad de los tres segmentos. Lo que ellas informaron fue que el segmento AB y AC son radios y, por tanto, son iguales. La relación de igualdad del segmento BC con los otros dos se establece como dependiente de la posición del punto C, es decir, si está sobre la circunferencia o sobre la mediatriz. Este proceso de resolución se puede ilustrar mediante la figura 9.

Cabe destacar que, en la sesión posterior, estas estudiantes fueron las primeras en presentar sus resultados en plenaria y comentar sus dificultades. Gladis manifestó que obtuvieron dos resultados y tenían que ver con el tipo de triángulo en relación con el punto C. Esto es, el triángulo podía ser isósceles o equilátero, como se ilustró en el análisis anterior. Para ilustrarlo, Gladis construyó

Figura 9 Proceso realizado por G, S y C en la resolución de este problema abierto

dos dibujos electrónicos, a fin de ilustrar cada cuestión. En una construcción, el punto C fue ubicado sobre la mediatriz e ilustró el caso en que el triángulo es isósceles. En la segunda construcción, el punto C fue colocado como punto de intersección de la circunferencia con la mediatriz y, por tanto, el triángulo era equilátero. No fue claro, en la videograbación, cómo logró Gladis dar el paso de una relación perceptiva (primera parte de la actividad) a una geométrica, quizás como resultado de la interacción con sus demás compañeros después de la primera sesión de trabajo.

CONCLUSIONES

El equipo de Camila, Sofía y Gladis fue el único que no logró interpretar correctamente el enunciado del problema. Sin embargo, la manera de abordarlo les facilitó establecer relaciones interesantes y condiciones para que el triángulo formado por los puntos A, B y C fuera equilátero. A pesar de que la relación entre la circunferencia y la mediatriz fue perceptiva en la primera parte de la actividad, la construcción presentada en la plenaria ya fue estructural; por lo tanto, se pone de manifiesto un cambio de lo perceptivo a lo geométrico.

Este equipo, al igual que los demás, conjeturó que el triángulo formado por los puntos A, B y C era equilátero y lo justificaron (inicialmente) con la medición y el arrastre. Aunque en este artículo no se presenta la discusión detallada sobre las diferentes modalidades de uso tanto de la medición como del arrastre, dicho análisis sí formó parte de la investigación (Sandoval, 2005). El esquema de uso construido para las herramientas del arrastre y la medición le permitió a este equipo encontrar una configuración adecuada para que el triángulo fuera equilátero. En este sentido, se puede afirmar que estas herramientas, propias de la geometría dinámica, permitieron a los alumnos confrontar su percepción, sus conocimientos geométricos y la retroalimentación inmediata a sus acciones (derivadas de la teoría interna de la computadora), como un mecanismo de control para sus acciones.

El proceso de desarrollo presentado en el artículo evidencia un primer acercamiento de los educandos al utilizar la tecnología como *un cuaderno electrónico,* de manera análoga al contexto de lápiz y el papel: representaciones estáticas, análisis de un caso particular y, con base en él, elaboración de primeras conjeturas. Sin embargo, al utilizar el arrastre y la medición, los alumnos descubren defectos en sus construcciones, por lo que inician una transformación de sus representaciones estáticas mediante las construcciones que *obedecen* la definición de los objetos geométricos involucrados. Esto es, utilizan la herramienta como un reorganizador conceptual, lo que influye en la transformación de objetos particulares a genéricos (figuras 6, 7a y 7b).

La dificultad a la que se enfrentó el equipo C, S y G, causada por el uso de un comando equivocado, les permitió descubrir y construir un nuevo esquema de uso respecto a dicha herramienta. El mensaje *¿Qué objeto?* (véase la figura 6), que genera Cabri, indica ambigüedad y, para entenderlo, se requiere tener un conocimiento considerable de la herramienta. Como se ha descrito en este artículo, este equipo no logró resolver esta situación en la primera parte de la actividad. Así que, para resolver situaciones como éstas, se requiere la intervención del profesor y la discusión con sus demás compañeros.

Resulta esencial comprender el comportamiento dinámico de las relaciones en estos nuevos ambientes, entiéndase: las jerarquías de dependencia entre los elementos de una construcción o al momento de utilizar cierta herramienta. Estos resultados coinciden con los encontrados por Talmon y Yerushalmy (2004), que afirman la importancia de establecer las relaciones de dependencia y la jerarquía entre los objetos inmersos en una construcción dinámica.

Retomando lo planteado por Rabardel (1999) en cuanto a que las herramientas son parte activa en la construcción del conocimiento, podríamos decir entonces que el tipo de representación utilizada en el proceso de aprendizaje de un cierto conocimiento geométrico conlleva una conceptualización sobre el objeto geométrico en cuestión. En este proceso, la experiencia que internaliza el estudiante puede tomar elementos propios de la evidencia mostrada a través de la herramienta que se utilice para tal fin. Por ejemplo, con lápiz y papel, la representación le da al estudiante muy poca visión sobre el objeto, pues no lo puede manipular. Con este nivel de evidencia casi nulo tiene que establecer el puente entre la representación y la teoría; es decir, convertir esa evidencia en una argumentación geométrica. Ahora bien, cuando se utiliza un programa de geometría dinámica, como en este caso, el estudiante tiene elementos de apoyo en la creación de ese *puente*. La argumentación generada en estas condiciones cambia con respecto a la argumentación propia de los ambientes de lápiz y papel. En un inicio, los argumentos pueden estar ligados únicamente a la apariencia, pero, gracias a la exploración que realiza el alumno, parece posible establecer un *puente* entre la evidencia geométrica de Cabri y una argumentación geométrica, donde los argumentos tengan un nivel superior de conceptualización y formalización. En esta experiencia, los tratamientos llevados a cabo con la representación generada por la geometría dinámica no les dieron a las estudiantes los pasos para la organización de un razonamiento matemático formal que lograra dar una explicación a sus observaciones. Sin embargo, este tipo de interacción (entre estudiantes y estudiantes con GD) les mostró algunas invariantes y les permitió explorar sus conjeturas, de modo que les facilitó la movilización de elementos teóricos. Es así como los procesos llevados a cabo y las estrategias que respaldaron sus conjeturas (o que las descartaron) muestran una organización sistemática en sus afirmaciones para apoyar un resultado, aspectos necesarios en la construcción de una argumentación matemática.

En lo que se refiere a las actividades de problemas abiertos, en vista de los resultados obtenidos, la geometría dinámica brinda diferentes herramientas que pueden ser útiles en el proceso de resolución. Sin embargo, el educando es quien decide qué estrategia seguir para resolverlo, cuáles herramientas usar, cómo interpretar los resultados que aparecen en la pantalla y la manera de sistematizarlos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F., C. Micheletti, F. Olivero y O. Robutti (1998), "Dragging in Cabri and modalities of transition form conjectures to proofs in geometry", PME, vol. 22, núm. 2, pp. 32-39.

Furinghetti, F., F. Olivero y D. Paola (2001), "Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 32, núm. 3, pp. 319-335.

Healy, L. y C. Hoyles (1998), *Justifying and Proving in School Mathematics*, Technical Report on the Nationwide Survey, Institute of Education, University of London.

Hernández, R., C. Fernández y P. Baptista (2003), *Metodología de la investigación*, 3a. ed., México, McGraw-Hill/Interamericana.

Laborde, C. (2004*a*), "Instrument et processus d'instrumentation", *M2-EIAHD UE 3*, Grenoble, Université Joseph Fourier, pp. 1-8.

——— (2004*b*), "New technologies as a means of observing students' conceptions and making them develop: The specific case of dynamic geometry", *ICME 10-TSG 22*.

Mariotti, M. (2001), "Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment", *Educational Studies in Mathematics*, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, vol. 44, pp. 25-53.

——— (2002), "Technological advances in mathematics learning", en Lynn English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 695-723.

Mesquita, A. (1998), "On conceptual obstacles linked with external representation in geometry", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 17, núm. 2, pp. 183-195.

Olivero, F. (2003), *The Proving Process within a Dynamic Geometry Environment*, tesis de doctorado, University of Bristol.

Olivero, F. y O. Robutti (2001), "Measures in Cabri as a bridge between perception and theory", *PME*, vol. 25, núm. 4, pp. 9-16.

——— (2002), "How much does Cabri do the work for the students?", *PME*, vol. 26, núm. 4, pp. 9-16.

Pluvinage, F. (1996), "Diferentes formas de razonamiento matemático", en F. Hitt (ed.), *Investigaciones en matemática educativa*, México, Iberoamérica, pp. 77-91.

Rabardel, P. (1999), "Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques", *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate, IUFM de Caen, vol. 18, núm. 21, pp. 203-213, agosto.

Sandoval, I. (2001), *Visualización y razonamiento geométrico*, tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

——— (2005), *Estrategias argumentativas en la resolución de problemas geométricos en un ambiente dinámico*, tesis de doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Santillán, M. (2002), *Mediación instrumental con calculadora*, tesis de doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Talmon, V. y M. Yerushalmy (2004), "Understanding dynamic behaviour: Parent-child relations in dynamic geometry environments", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 57, núm. 1, pp. 91-119.

Trouche, L. (2003), "Managing the complexity of human/machine interaction in a computer based learning environment (CBLE): Guiding student's process command through instrumental orchestrations", *CAME 2003 – The Third CAME Symposium Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction, Curriculum & Assessment*.

DATOS DE LA AUTORA

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Universidad Pedagógica Nacional, México
ivonne.sandoval@gmail.com