Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Perera Dzul, Paula B.; Valdemoros Álvarez, Marta E.
Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado
Educación Matemática, vol. 21, núm. 1, abril, 2009, pp. 29-61
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado

Paula B. Perera Dzul y Marta E. Valdemoros Álvarez

Resumen: Este informe muestra los resultados globales obtenidos en un estudio en el que se desarrolla una enseñanza experimental con un grupo de cuarto grado de primaria (niños de 9 años de edad) de una escuela pública. Consta de un programa de enseñanza integrado con actividades que giran en torno a varios escenarios afines a la vida real de los niños. Aquí se exhibe cómo las actividades propiciaron en el escolar la construcción de la noción de fracción y el reconocimiento de algunos de sus significados (relación parte-todo, medida, cociente intuitivo y rudimentos de operador multiplicativo). Asimismo, para valorar los avances alcanzados por los alumnos en el programa de enseñanza, se aplicaron dos cuestionarios, uno antes y otro después de su implementación. También se seleccionó a tres niños que fueron entrevistados para el estudio de casos, a fin de profundizar en los procesos relevantes de aprendizaje de cada uno de ellos.

Palabras clave: enseñanza experimental, significados de fracción, escenarios, matemática realista, resolución de problemas.

Experimental teaching of fractions in fourth grade

Abstract: This report shows the global results obtained in a study in which an experimental teaching scheme is developed under a fourth grade group of a primary public school (9 year old students). This scheme is a teaching program composed of activities focused on a variety of scenarios close related to the child-ren's daily life. This work remarks how these activities favored the construction of the notion of fractions in the student, as well as the recognition of some of its meanings (part-whole relationship, measure, intuitive quotient and multiplicative operator rudiment). Moreover, in order to asses the achieved goals of the stud-ents in the teaching program, two questionnaires were applied: one before the implementation and the other one after it. Furthermore, three children, chosen in advance for the case study, were interviewed with the objective of analyzing the most relevant learning processes involved in each one of them.

Fecha de recepción: 20 de septiembre de 2008.

Keywords: experimental teaching, meanings of fraction, scenarios, realistic mathematics, problem solving.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones siguen teniendo dificultades (Figueras, 1988, 1996; Valdemoros, 1993, 1997, 2001; Pitkethly y Hunting, 1996; Perera y Valdemoros, 2002) en la educación básica. Una de las causas es que son poco usadas en situaciones de la vida real, por lo tanto, los niños cuentan con escasos conocimientos previos (Freudenthal, 1983) cuando inician el estudio de este contenido matemático en la escuela primaria. Otro de los problemas, posiblemente, se deba a la enseñanza del lenguaje de las fracciones en edad temprana, así como a la implementación de tareas abstractas relacionadas con estos números.

En los últimos años se ha producido una gran riqueza de información en torno a las fracciones, esto se ha hecho evidente en publicaciones recientes de volúmenes completos (*The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 22, núms. 2 y 3, 2003) consagrados a investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de estos números, de las cuales mencionamos algunas de ellas en los siguientes párrafos.

Investigadores como Sáenz-Ludlow (2003), Steencken y Maher (2003) y Bulgar (2003) realizaron experimentos de enseñanza en torno al conocimiento de las fracciones con alumnos de cuarto grado de educación básica. Al respecto, puntualizamos que Sáenz-Ludlow (2003) estableció que un importante resultado de su estudio fue el reconocimiento de que los niños construyeron un puente entre sus conocimientos de número natural y la conceptualización inicial de la fracción, en particular, en todos discretos. Por su parte, Steencker y Maher (2003) observaron en los alumnos el uso de diagramas con explicaciones para exponer sus ideas. Asimismo, Bulgar (2003) señala que las representaciones creadas por los niños para expresar sus ideas y argumentar sus respuestas los ayudaron a resolver las actividades.

Nabors (2003) implementó un experimento de enseñanza constructivista con cuatro estudiantes que interactuaron en un micromundo computacional usado para resolver tareas de razonamiento fraccionario.

Otros estudios efectuados en torno a la enseñanza de las fracciones (Steffe, 2002, 2003; Tzur, 2004), en los cuales los niños interactúan entre ellos y con el investigador, plantean la interacción como actividad importante para la comprensión de este contenido.

También hay investigaciones que enfocan su atención en las estrategias de solución que presentan los estudiantes en los problemas vinculados con la noción de fracción (Christou y Philippou, 2002; Misailidou y Willians, 2003).

Considerando que el estudio de las fracciones es una de las tareas más difíciles de realizar en el ámbito de la enseñanza elemental, en esta investigación se abordan los significados de la fracción vinculados a: relación parte-todo, medida, cociente intuitivo (reparto) y rudimentos de operador multiplicativo. La selección de estos contenidos se justifica porque la noción de medida y cociente intuitivo están considerados en el programa de cuarto grado de Educación Primaria del Plan y Programas de Estudios (SEP, 1993) de México, no así el de operador multiplicativo –contemplado en el quinto grado junto con el de razón–; a pesar de esto, decidimos explorar las ideas embrionarias de operador multiplicativo, por estimarlo accesible para los niños del presente estudio. Hemos excluido de esta investigación el significado de razón por considerarlo demasiado complejo y, como tal, susceptible de ser tratado en otro trabajo.

El estudio se llevó a cabo con un grupo de cuarto grado de educación primaria. Elegimos este nivel porque es en el grado donde se profundiza el trabajo con las fracciones, haciendo más complejo su uso a través de la resolución de problemas en diferentes entornos (*Plan y Programas de Estudio, Primaria,* SEP, 1993). Asimismo, observamos que las tareas expuestas en el libro de texto oficial de dicho grado son pocas en comparación con las actividades presentadas en los libros de texto de quinto y sexto grados. Además, notamos que el libro de texto de cuarto grado no ha tenido ningún cambio desde 1994, mientras que los de tercero, quinto y sexto grados fueron sustituidos por nuevos textos y publicados en 2001.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Debido a la complejidad que presenta para los niños la construcción del conocimiento de fracción, nos surgieron estas preguntas:

- ¿Qué estrategias y situaciones de enseñanza debe implementar el maestro para facilitar el aprendizaje de los números fraccionarios en los niños de cuarto grado de educación primaria?
- ¿Cuál debe ser la intervención del maestro en la resolución de las actividades en el aula para que el alumno logre construir un conocimiento sólido de las fracciones?

- ¿Qué dinámica grupal es conveniente establecer en el aula para que se propicie en el niño el desarrollo de actividades sobre fracciones de una manera eficaz?

Acorde con las preguntas expuestas, el problema de esta investigación se refiere a cómo influye en el niño una enseñanza matemática realista y lúdica, desarrollada con un enfoque constructivista, en la adquisición de las nociones relativas a la fracción.

Ante esta problemática, la hipótesis de nuestro estudio la planteamos como:

> Un programa de enseñanza constructivista, realista, lúdico y cooperativo favorecerá en el niño de cuarto grado de educación primaria la consolidación de la noción de fracción y de los significados de relación parte-todo, medida, cociente intuitivo y la idea embrionaria de operador multiplicativo.

Relacionado con el problema de investigación, el objetivo general que nos propusimos lograr es: Establecer si una enseñanza constructivista, a través de actividades realistas y lúdicas resueltas de manera colaborativa, propicia en el niño de cuarto grado el afianzamiento del aprendizaje de las fracciones.

Respecto a los objetivos específicos que se pretendió alcanzar en este estudio, destacamos:

- Verificar que las actividades realistas de la enseñanza favorezcan en los alumnos una mayor comprensión de los números fraccionarios.
- Comprobar que las situaciones propuestas a través de la resolución de problemas propicien en los niños la construcción de los significados elementales de la fracción.
- Constatar que la interacción y el debate entre los alumnos contribuyan a la resolución reflexiva de los problemas planteados.

MARCO TEÓRICO

En este apartado presentamos algunas ideas de didáctica de las matemáticas que ofrecen un fundamento a nuestro estudio. También mostramos enfoques relacionados con la didáctica de las fracciones. Además, enunciamos determinadas aportaciones de la psicología de la cognición acerca de estos números.

En relación con la didáctica de las matemáticas, Brousseau (2000) menciona que actualmente el término didáctica comprende la actividad misma de la enseñanza de las matemáticas, el arte y el conocimiento para hacerlo, la habilidad para preparar y producir los recursos para realizar esta actividad y todo lo que se manifiesta en torno a ella. Este autor también menciona que el enfoque actual de la enseñanza está orientado a solicitar al maestro la elección de problemas que provoquen en el alumno aprendizajes que se manifiesten a través de respuestas nuevas.

Freudenthal (1983), basándose en su fenomenología didáctica, critica la enseñanza tradicional basada en el desarrollo de conceptos, pues esta manera de instruir acentúa el aspecto formal de las definiciones. Freudenthal señala que este modo de enseñar fragmenta las relaciones con otros contenidos matemáticos y no se fundamenta en la experiencia del estudiante, propiciando que los conceptos queden aislados en la mente del alumno, lo que impide que los aplique en la resolución de problemas asociados a su vida cotidiana.

Goffree (2000) plantea un enfoque didáctico en el cual menciona el marco de una educación matemática realista, brindando numerosos fundamentos didácticos a la enseñanza. Este autor señala que el maestro debe diseñar situaciones problemáticas concretas para que el niño pueda dar sus propios significados, así como crear modelos de una situación real que permita al alumno investigarla, apropiándose de dichos modelos para solucionar otros problemas. También indica que el profesor debe tener en cuenta cualquier conflicto cognitivo que el niño haya pensado por sí mismo para incluir la reflexión en la clase. Además, menciona que hay que propiciar en el aula la interacción entre los niños de manera natural, basando la enseñanza de las matemáticas en problemas del mundo real como fuente de ideas y de situaciones en donde puedan ser aplicadas.

En cuanto a la didáctica de las fracciones, Thomas Kieren ha realizado diversos estudios acerca de la construcción de estos números. Este autor reconoce varios constructos intuitivos (medida, cociente, operador multiplicativo y razón), en los que subyace el conocimiento de la fracción. Además, identifica un quinto constructo intuitivo: la relación parte-todo que sirve de base para la construcción de los otros cuatro citados anteriormente (Kieren, 1983). Teniendo en cuenta la importancia de estos constructos intuitivos en nuestra indagación, consideramos apropiado describir la naturaleza básica de ellos.

Las definiciones que Kieren (1980) da a los constructos intuitivos son las siguientes: la relación parte-todo la considera como un todo (continuo o discreto) subdividido en partes iguales y señala como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes. La fracción como medida la reconoce como la asignación de un número a una región o a una magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad. La fracción como cociente la refiere como el resultado de la división de uno o varios objetos entre un número determinado de personas o partes (Kieren, 1980, 1983, 1988, 1992). El papel de la fracción como operador es el de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente. Esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura asociada al uso de fracciones (Kieren, 1980). La fracción como razón es considerada por Kieren (1980) como la comparación numérica entre dos magnitudes.

Asimismo, Kieren (1993) presenta un modelo recursivo para la comprensión de las matemáticas. Este modelo es un proceso dinámico en forma de espiral que conlleva envolverse a sí mismo para crecer y extenderse. El modelo está integrado por ocho niveles incrustados de conocimientos o acciones eficientes, los cuales son: *hacer primitivo, hacer imagen, tener imagen, notar propiedad, formalizar, observar, estructurar e inventar*. Consideramos apropiado destacar que, en este estudio, se tuvieron en cuenta los tres primeros niveles que corresponden al pensamiento más intuitivo del sujeto, según el reconocimiento explícito del propio Kieren (1993); es decir, la partición como "actividad primitiva", "hacer imagen" como los problemas de reparto que se anticipan en el uso de diferentes particiones y fracciones para representar la misma cantidad, y "tener imagen" como fracciones equivalentes generadas a través de una fracción dada. Con ello, estamos volcando nuestra atención a las elaboraciones primarias, elementales del sujeto cognoscente, las que, sin embargo, están siempre presentes en cualquier elaboración cognitiva, aun cuando ésta sea más avanzada.

Por otra parte, Freudenthal (1983) da sugerencias amplias para la enseñanza de los números fraccionarios. Al referirse a la relación parte-todo, señala que enfocar dichos números con este único significado es bastante limitado, tanto fenomenológica como matemáticamente, ya que este tipo de enfoque sólo produce fracciones propias. Asimismo, este autor da ejemplos didácticos para la enseñanza de las fracciones y sugiere tener en cuenta las magnitudes de área y longitud como medios para visualizar las relaciones de equivalencia.

De igual manera, Streefland (1991) diseñó un curso con el cual se enriquece la enseñanza de las fracciones. Su objetivo es proporcionar una didáctica para el manejo constructivo y productivo de materiales concretos. Las actividades del curso se centran en situaciones de la vida real y emplean algunos acontecimientos que se desarrollan en espacios reales.

Además, Streefland (1993) menciona que el maestro puede guiar a la luz los conocimientos que tienen los estudiantes sobre cierto contenido matemático, al propiciar confrontaciones entre ellos en situaciones relevantes. De igual manera, Streefland (1991, 1993) apunta que la enseñanza debe apegarse a la *realidad* para que dicho conocimiento tenga un significado para el niño. Consideramos que estos planteamientos permanecen claramente vigentes en la actual situación educativa nacional.

En relación con las aportaciones de la psicología a la cognición de las fracciones, Solé y Coll (1999) señalan que la concepción constructivista no es una teoría, sino más bien un marco explicativo que considera como parte medular la dimensión social de la enseñanza, en el sentido de que la educación escolar es un proyecto social que se desarrolla en una institución también social. Además, explican que la concepción constructivista está integrada por un conjunto articulado de principios que pueden ser utilizados para diagnosticar, establecer juicios y tomar decisiones fundamentales en torno a la enseñanza.

Según la concepción constructivista, el niño aprende cuando es capaz de elaborar una representación personal acerca de un objeto de la realidad o contenido que se pretende enseñar, dicha elaboración implica el interés del niño y sus conocimientos previos en relación con el tema que se va a enseñar. En este proceso los alumnos modifican los conocimientos que tienen y también interpretan los nuevos conocimientos para integrarlos a los que ya poseen; cuando se da este tipo de proceso del niño, se dice que el alumno ha aprendido significativamente (Solé y Coll, 1999).

Por consiguiente, la concepción constructivista pretende que los alumnos aprendan y se desarrollen en la medida en la que construyen significados apropiados en torno a los contenidos que se van a enseñar. Dicha construcción incluye la actitud activa del niño, su disponibilidad y sus conocimientos previos (Lenzi, 1998; Castorina, Lenzi y Aisenberg, 1997; y Miras, 1999) en una situación interactiva en la que el profesor actúa como guía y mediador entre el niño y la cultura (Solé y Coll, 1999).

Respecto a lo cognitivo, Kieren (1983) propone dos tipos de herramientas o mecanismos mentales para la construcción del conocimiento del número fraccionario, unos de desarrollo y otros constructivos. Los de desarrollo están vinculados con la experiencia, se identifican con la conservación del todo y el razonamiento proporcional; los constructivos se relacionan con la partición, la equivalencia cuantitativa y la generación de unidades divisibles. Los significados y sus correspondientes “mecanismos” se encuentran ligados a aplicaciones específicas y forman parte de lo que se ha denominado matemática intuitiva.

Por otra parte, Kamii (1994) señala que el enfoque constructivista para la enseñanza de la aritmética se basa en una pedagogía que solicita que los maestros vean la enseñanza desde la perspectiva de cómo aprenden los niños y cómo llegan a comprender un contenido escolar, en vez de hacerlo desde el punto de vista de cómo se comportan, sea cual sea la naturaleza de dicho comportamiento social o cognitivo.

También indica que la confrontación de ideas entre los escolares facilita el desarrollo de un nivel de pensamiento más elevado cuando se sistematizan los conocimientos previos que existen en la mente de ellos. Asimismo, destaca que el clima social de una clase influye ampliamente en la manera en la que los niños aprenden o no un contenido escolar, dependiendo del ambiente generado por el maestro y sus alumnos (Kamii, 1994).

Además, Kamii (1994) menciona que, de acuerdo con el constructivismo, los niños aprenden modificando ideas anteriores, en vez de acumular trozos de información. Este enfoque difiere de la enseñanza tradicional, pues en esta última, los alumnos aprenden interiorizando conocimientos, el papel del maestro se limita a corregir errores y a facilitar respuestas correctas. Del mismo modo, Kamii señala que en la enseñanza constructivista, el maestro debe fomentar el intercambio de ideas, a fin de estimular a los niños para que argumenten y defiendan sus soluciones ante sus compañeros. Para propiciar este intercambio, el maestro tendrá que planear cómo crear un ambiente adecuado al pensamiento de los niños, en lugar de planear cómo se dirige una clase para que se den aprendizajes específicos.

Con lo expuesto anteriormente y retomando el problema de investigación aquí formulado, visualizamos un panorama que nos permitió plantearnos este estudio, el cual consideramos que es una manera pertinente de indagar sobre la aplicación de la enseñanza que nos conduzca a consolidar las nociones relativas a la fracción y algunos de sus significados, en cuarto lugar. También lo reconocemos como una manera adecuada de abordar las fracciones, en la que los alumnos disfrutan el trabajo, al desarrollarse en un ambiente lúdico, donde el maestro interviene como guía y mediador entre el niño y la cultura (Solé y Coll, 1999).

Además, señalamos nuestro acuerdo con el enfoque teórico sustentado por Freudenthal (1983), Streefland (1991, 1993) y Goffree (2000) en torno a la matemática realista, el cual documentamos en el marco teórico.

DESARROLLO METODOLÓGICO

Esta investigación doctoral es de carácter cualitativo, ya que se realizó el análisis de los avances alcanzados por un grupo de cuarto grado de primaria con niños de 9 años de edad dentro de su ambiente escolar, con el propósito de conocer cuáles son los cambios que se producen en sus pensamientos durante el desarrollo de un programa de enseñanza que recrea experiencias de su propia vida (Freudenthal, 1983). Además, se efectuó el estudio de tres casos para profundizar sobre los procesos y fenómenos que se manifestaron en cada uno de ellos. La indagación se llevó a cabo al inicio del año escolar para tener la certeza de que los niños no habían abordado los tópicos de las fracciones que se consideran en el currículo de cuarto grado de educación primaria.

En el proceso de la enseñanza experimental, la investigadora fungió como coordinadora de las actividades, es decir, le correspondió organizar y dirigir las sesiones de trabajo desarrolladas por el grupo.

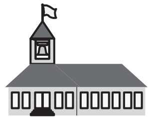
Durante el tiempo que duró el programa de enseñanza, se buscó crear un ambiente de confianza y respeto mutuos, donde los alumnos se sintieran motivados, con libertad de resolver las actividades tal como ellos lo consideraran conveniente y que tuvieran la oportunidad de expresar sus estrategias de resolución, a la par de aceptar sus equivocaciones.

El punto de partida de la investigación fue la aplicación de un cuestionario inicial a 30 escolares, con el propósito de obtener información sobre los conocimientos con que contaban acerca de las fracciones. Dicho instrumento permitió seleccionar a tres de ellos para llevar a cabo el estudio de casos, también nos facilitó la organización de la enseñanza. El cuestionario inicial estuvo conformado por 13 tareas organizadas en cuatro bloques. En el primer bloque se presentan problemas relacionados con el significado de medida. El segundo incluye actividades vinculadas con la relación parte-todo. El tercero contiene situaciones de reparto. En el cuarto bloque se muestran tareas referentes al significado de operador multiplicativo. Una de las actividades de dicho cuestionario se muestra en la figura 1.

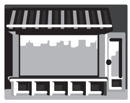
El siguiente instrumento de esta investigación fue el programa de enseñanza desplegado con un enfoque constructivista, con el fundamento de que los alumnos aprenden y se desarrollan en la medida en la que construyen significados apropiados en torno a los contenidos que van a estudiar (Solé y Coll, 1999). De acuerdo con lo anterior, el programa de enseñanza tuvo como propósito crear un ambiente favorable que posibilitara al niño el desarrollo adecuado de las acti-

Figura 1 Problema del cuestionario inicial, que ilustra el significado de medida (de acuerdo con Kieren, 1980)

Éste es el camino que recorre Lalo de su casa a la escuela.



Y éste es el camino que recorre de su casa a la tienda.



Éste último camino ¿qué parte es del camino de arriba? ________

vidades planteadas en las sesiones de trabajo y, además, le permitiera establecer los diferentes tipos de relaciones que le ayudaran a construir los significados de la fracción vinculados a relación parte-todo, medida, cociente intuitivo y rudimentos de operador multiplicativo.

Las actividades que integran el programa de enseñanza están relacionadas con situaciones de la vida real. Dichas tareas fueron diseñadas tomando como eje el currículo vigente de matemáticas de cuarto grado de primaria (1993) y los objetivos de nuestra investigación. La enseñanza experimental se realizó en 18 sesiones de trabajo. Las sesiones se desarrollaron dos veces por semana con una duración de una hora cada una, en un periodo de tres meses. Las actividades que se llevaron a cabo en las sesiones de trabajo fueron: *a)* recortar e identificar del todo la fracción representada por diversas figuras; *b)* medir distancias para obtener partes fraccionarias de un todo; *c)* reconocer las partes fraccionarias que se generan al cubrir totalmente una figura con un todo y escribir en sus respuestas las fracciones que surjan en las situaciones planteadas; *d)* distinguir las partes fraccionarias de un todo en las situaciones problemáticas que se desarrollan en una fiesta de cumpleaños; *e)* solucionar situaciones de reparto de artículos adquiridos en un mercado; *f)* completar la reducción de figuras relacionadas con la clase de educación física.

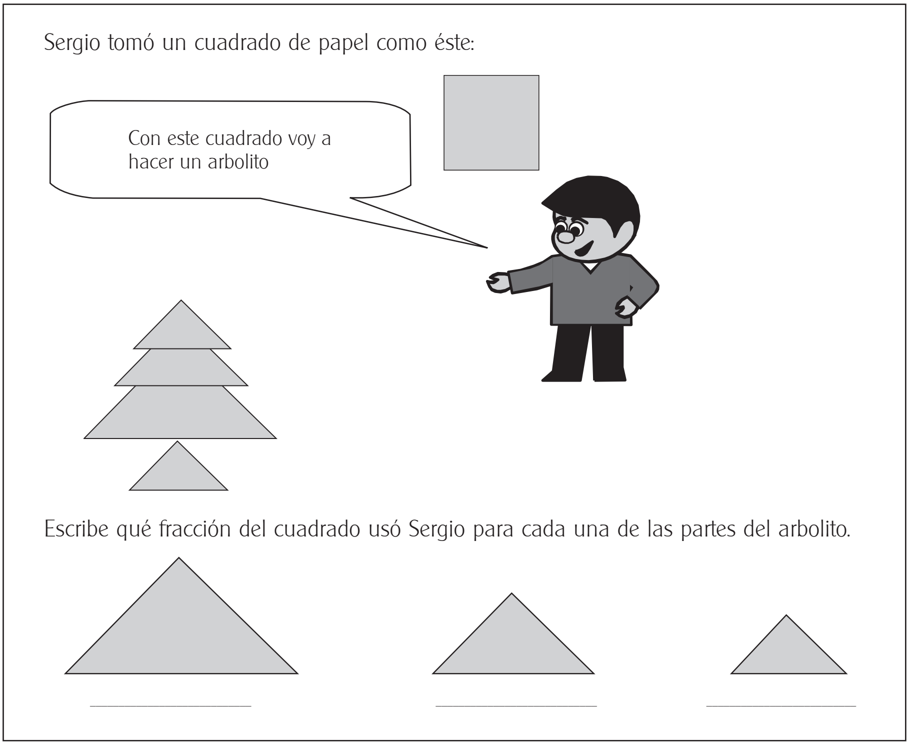
Las actividades se reunieron en torno a diversos "escenarios" que representan distintos espacios o ámbitos de aplicación de las fracciones. La secuencia en que éstos se trataron fue la siguiente: *1)* la primavera en el salón de clases; *2)* la fiesta de Manuel; *3)* iremos de compras; *4)* el recreo; *5)* el periódico mural "La voz del niño"; *6)* la clase de educación física. El primer escenario involucra el significado de la relación parte-todo. El segundo y el tercero están integrados por actividades de reparto. El cuarto y el quinto se relacionan con tareas de medida. El sexto se refiere a actividades de operador multiplicativo (rudimentos de operador multiplicativo). Cada "escenario" supuso una modalidad particular de desarrollo de los números citados en un terreno real determinado.

A continuación presentamos las secuencias de cada escenario: *a)* En el de "La primavera en el salón de clases" iniciamos con la identificación del todo, seguimos con la partición del todo, para concluir con el reconocimiento de la fracción. *b)* En los de la "Fiesta de Manuel" e "Iremos de compras", empezamos con el reconocimiento del todo, proseguimos con la partición del todo de acuerdo con el número de receptores, enseguida realizamos la distribución de las partes entre los sujetos que participan en el reparto y terminamos con la identificación de la fracción que le tocó a cada persona. *c)* En los del "Recreo" y el periódico mural "La voz del niño", primero tratamos la identificación de la unidad, seguimos con el cubrimiento de una magnitud dada con la unidad identificada, después efectuamos la partición de la unidad para cubrir totalmente dicha magnitud y finalizamos con el cálculo de las veces que cabe el todo en la magnitud dada. *d)* En el de "La clase de educación física", principiamos con la observación de la cancha del dibujo original y de la parte de la cancha reducida, después el conteo de los cuadros que corresponden a las medidas de los lados de la cancha y de la parte de la cancha reducida, luego comparamos, analizamos y reflexionamos sobre dichas medidas y, por último, completamos el dibujo de la cancha reducida.

Enseguida, en la figura 2, mostramos una de las tareas del programa de enseñanza. Esto es marcadamente diferente de las actividades didácticas contempladas en el libro de texto oficial, en donde los contenidos curriculares comunes no se encuentran secuenciados, sino que son presentados de manera discontinua.

En las sesiones de enseñanza, los niños trabajaron las actividades organizados en equipos, a fin de fomentar el intercambio y la discusión de ideas, la coordina-

Figura 2 Tarea del programa de enseñanza incluido en el escenario "La primavera en el salón de clases"



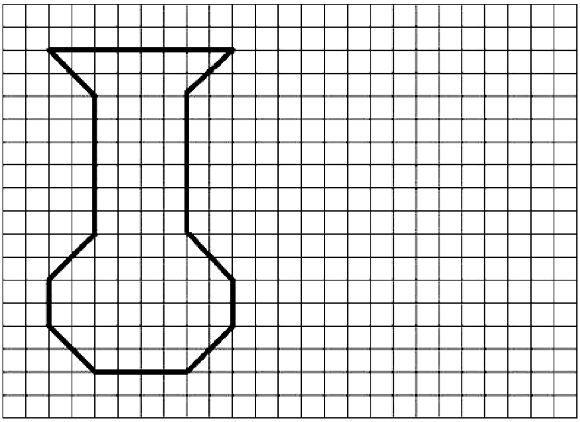
ción de puntos de vista y el trabajo colaborativo. Al concluir cada actividad, se realizaron confrontaciones grupales, donde los alumnos exponían a sus compañeros las estrategias que habían desarrollado para resolver la tarea. Si un alumno presentaba alguna estrategia incorrecta en su solución, los demás escolares intervenían haciéndole ver el error cometido durante el proceso para llegar al resultado.

Al concluir el programa de enseñanza, se aplicó el cuestionario final al grupo que participó en el estudio de campo. El propósito fue valorar los avances que se alcanzaron durante las sesiones de trabajo. Las 13 tareas que conforman este cuestionario son análogas a las planteadas en el cuestionario inicial y a las desarrolladas en las sesiones de enseñanza.

Posteriormente, se entrevistó a tres niños para el estudio de casos, éstos fueron previamente seleccionados de acuerdo con los resultados obtenidos en el

Figura 3 Actividad seis de la entrevista

6. Perla dibujó un florero de la misma forma que el de abajo, pero de diferente tamaño, ella redujo a un medio cada uno de los lados. ¡Dibújalo!



cuestionario inicial. El propósito del estudio de casos fue ahondar sobre los procesos importantes de aprendizaje en cada uno de los niños. Las entrevistas fueron semiestructuradas (según Cohen y Manion, 1990), ya que contamos con un protocolo, en el que se tiene la posibilidad de cambiar el orden de las preguntas cuando el entrevistador necesita profundizar en su indagación, y también se dispuso del material necesario para cada caso. Las entrevistas que efectuamos pueden ser consideradas como un instrumento de evaluación, puesto que fueron realizadas después de la aplicación del cuestionario final.

Cada entrevista está constituida por seis tareas. La primera y la tercera de ellas están vinculadas al significado de relación parte-todo. La segunda está relacionada con el significado de medida. La cuarta y la quinta incluyen situaciones de reparto. La sexta trata sobre el significado de operador multiplicativo. En la figura 3 presentamos la actividad seis de la entrevista.

Para validar este estudio, se realizó la triangulación de los instrumentos metodológicos empleados. En dicha validación se confrontaron y compararon los datos recopilados en los cuestionarios inicial y final, las observaciones registradas por el responsable de la investigación y por otro observador durante las sesiones de enseñanza, así como las observaciones y los datos obtenidos en las entrevistas del estudio de casos.

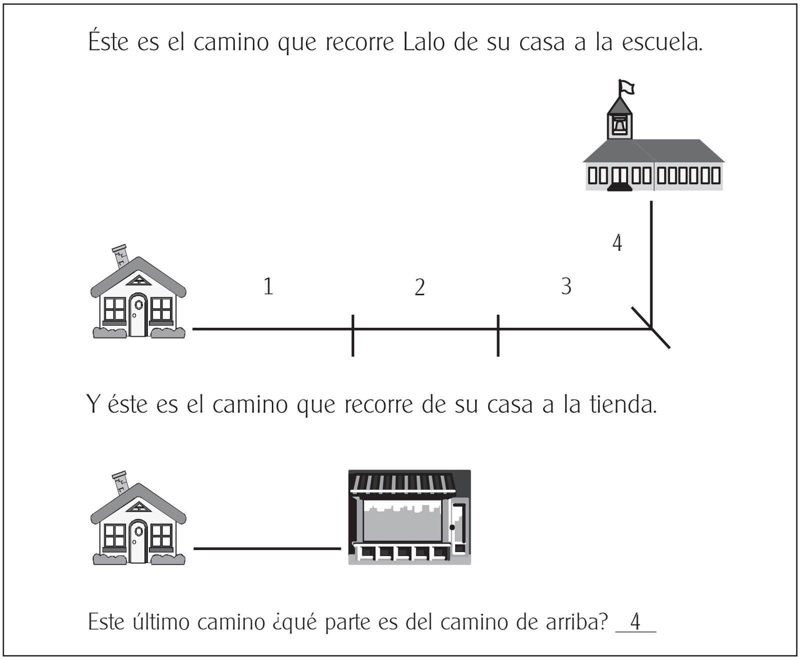
RESULTADOS

Del análisis de las soluciones dadas a las tareas del cuestionario inicial podemos decir que en las actividades vinculadas con el significado de *relación parte-todo*, la mayoría de los alumnos tuvieron problemas para representar en un todo las fracciones: medios, cuartos y octavos. A pesar de que las tareas requieren como solución la identificación de fracciones, la generalidad de los niños ignoraron dicha solicitud y escribieron sólo números naturales, o bien, usaron los algoritmos de la aritmética que les son conocidos, fenómenos coincidentes con algunos de los resultados informados tanto por Figueras (1988) como por Valdemoros (1993). También se hizo evidente el desconocimiento de un vocabulario apropiado para nombrar la parte fraccionaria obtenida en la partición, lo cual indica que los conocimientos con los que cuentan los niños en relación con este contenido matemático son reducidos.

Referente al significado de fracción como medida, observamos que los alumnos tuvieron dificultades para calcular las veces que cabe una longitud determinada en una magnitud dada (véase la figura 1). Al resolver esta tarea, los niños mostraron cierta dificultad al llevar a cabo la medición del camino de la casa a la escuela a través del camino de la casa a la tienda, al no reconocer en cuál de los dos caminos iban a efectuar la medición. También presentaron conflictos para nombrar la parte fraccionaria que se generó al partir un todo en dos partes iguales. Además, no pudieron determinar $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$ de un todo. En cuanto a la solución de estas tareas, muchos alumnos aplicaron los algoritmos de la aritmética que les son familiares, o bien, escribieron como respuesta un número natural. La respuesta de Aidé en la figura 4 ejemplifica esta situación. Asimismo, percibimos que los conocimientos con que cuentan los escolares de este grupo respecto a dichas fracciones limitaron sus habilidades para desarrollar estrategias apropiadas de partición.

Respecto a las actividades relacionadas con el significado de *cociente intuitivo* (correspondiente a una situación de reparto), la mayoría de los niños tuvieron dificultades para resolver la distribución de un todo entre un determinado número de personas. La tendencia de los alumnos en estas tareas fue la de partir en medios. Muchos integrantes del grupo no agotaron la partición de los

Figura 4 Respuesta de Aidé a una actividad correspondiente al significado de medida



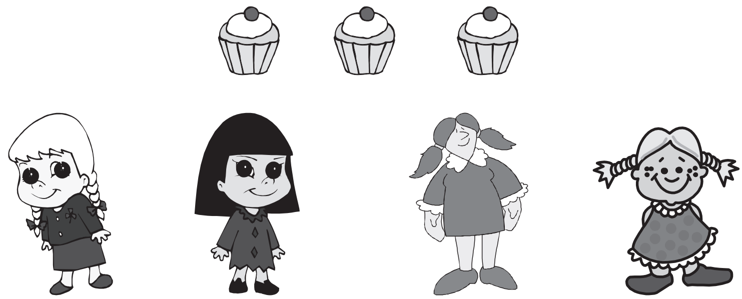
objetos dados en relación apropiada con el número de personas que participaron en el reparto, lo cual no les permitió obtener un reparto exhaustivo, o bien, lograron un reparto exhaustivo pero no equitativo. Asimismo, un gran número de ellos consideró el todo como indivisible. Dejaron la colección de objetos sin fraccionar y, por tanto, sin distribuir; sólo un alumno escribió como respuesta *“no se pudo repartir”*. Estos estudiantes carecen de los recursos que Kieren (1983, 1988) señala esenciales para la construcción de la fracción: la identificación de la unidad y su consiguiente partición. De igual modo, los escolares manifestaron conflictos para establecer la relación de orden entre las partes fraccionarias obtenidas en dos repartos diferentes (Perera y Valdemoros, 2002).

Distinguimos en estas actividades que la poca experiencia con que cuentan los miembros de este grupo en relación con la distribución de un todo fue determinante en las estrategias que desarrollaron en las situaciones de reparto. A continuación, en la figura 5 mostramos la respuesta de Ilse a una de estas actividades de reparto.

Figura 5 Respuesta de Ilse a una actividad relacionada con una situación de reparto

La mamá repartió en partes iguales tres gelatinas entre sus hijas:

Laura, Lupe, Rosa y Paty.



Laura Lupe Rosa Paty

¿Cuánta gelatina le tocó cada niña? *no se pudo repartir*

En relación con las tareas vinculadas al significado de *operador multiplicativo* (rudimentos de operador multiplicativo), casi todo el grupo tuvo problemas para ampliar al doble los lados de una figura dada o para reducirlos a la mitad. Para resolver estas actividades, la mayoría de los niños reprodujeron la figura teniendo en cuenta sólo la posición de sus lados e ignoraron las magnitudes que tenían que ampliar o reducir. Para acortar los lados de la figura a la mitad, algunos niños únicamente lo hicieron en una dimensión (ancho o largo).

En el desarrollo del *programa de enseñanza*, al inicio de las sesiones, los niños tuvieron conflictos para involucrarse en el trabajo colectivo, ya que estaban acostumbrados a la producción individual, posteriormente superaron esta problemática cuando llevaron a cabo la resolución de las tareas en equipos. Esto favoreció en el niño el intercambio de ideas, la argumentación de sus respuestas y la justificación de sus soluciones. Además, propició la elaboración de soluciones correctas y la manifestación de anticipaciones en relación con la equivalencia de fracciones y la proporcionalidad entre dos figuras. En la figura 6 mostramos la actividad en las que varios alumnos anticiparon la relación de equivalencia, en la última sesión de trabajo.

Figura 6 Tarea que forma parte del escenario "La clase de educación física"

Después de ver las canchas, el grupo de 6º grado salió a jugar al patio de la escuela. La mitad del grupo jugó fútbol y la octava parte jugó básquetbol. ¿Qué fracción de todo el grupo no jugó? ______________

En relación con la figura 6, reproducimos a continuación diversos comentarios parciales que Alejandro, Abigail, Brandon Z. y Carla D. expresaron durante la confrontación grupal:

Comentarios de Alejandro

Alejandro: *Éste es el grupo que salió a jugar,* expresa dibujando un círculo en el pizarrón. *Ahora le saco dos partes,* dice dividiendo el círculo en dos partes aproximadamente iguales.

–*Un medio son los niños que jugaron fútbol,* dice escribiendo la letra "F" sobre una de las partes del círculo que dividió.

–*Éste tiene cuatro octavos,* expresa dividiendo la otra parte del círculo en cuatro partes iguales.

–*Éste son los niños que jugaron básquetbol,* declara señalando con un punto uno de los octavos que obtuvo al dividir un medio del círculo en cuatro partes iguales.

–*Tres octavos son los que no jugaron,* enuncia trazando una raya sobre los tres octavos restantes que no había marcado.

Comentarios de Abigail

Ella utilizó la partición del círculo que efectuó Alejandro.

Abigail: *Tres octavos es igual a un cuarto más un octavo,* expresa señalando dos octavos y otro octavo más. *Porque dos octavos son un cuarto,* enuncia y borra la línea que divide el cuarto en dos partes iguales.

Comentarios de Brandon Z.

Brandon Z.: *Un octavo es igual a dos dieciséis,* expresa dividiendo un octavo en dos partes iguales (notamos que no usa la expresión dieciseisavos). *Porque son dieciséis partes de todo,* dice dividiendo la mitad del círculo en ocho partes aproximadamente iguales.

–*Los que no jugaron son un cuarto más dos dieciséis,* enuncia escribiendo en el pizarrón su respuesta $\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{16}\right)$. Cabe aclarar que la respuesta de Brandon Z. propició la subdivisión de un todo en dieciseisavos, que corresponde a un número de partes mayor que 10, además, los escolares incorporaron a sus conocimientos la terminación *avos* a las fracciones con denominadores mayores que 10, porque les indicamos el lenguaje apropiado para nombrarlas.

Comentarios de Carla D.

Ella utilizó la partición del círculo que efectuó Brandon Z.

Carla D.: *Un cuarto más un octavo es igual a seis dieciseisavos, porque en un cuarto hay cuatro dieciseisavos,* declara señalando los $\frac{4}{16}$ en el $\frac{1}{4}$ del círculo. *Y en un octavo hay dos dieciseisavos,* dice señalando los $\frac{2}{16}$ en el $\frac{1}{8}$ del círculo.

Los comentarios de los niños justifican que apelaron a la cuantificación del todo y de sus partes para aseverar que se refieren a la equivalencia entre una parte y las partes que la conforman. También muestran que la interacción y el debate contribuyeron a la resolución reflexiva de las actividades, lo que coincide con lo dicho por Streefland (1991), Kamii (1994) y Goffree (2000).

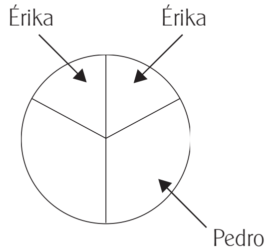
Los escenarios, parte esencial del programa de enseñanza, propiciaron un ambiente de interacción entre compañeros del grupo, donde ellos intercambiaron sus ideas, discutieron sus puntos de vista, reconocieron sus errores y, sobre todo, avanzaron en sus conocimientos, puesto que se favoreció la reflexión ante los problemas planteados. Además, los escenarios permitieron la reconstrucción mental de la realidad de los niños, lo que fue fundamental para la resolución de las tareas.

Asimismo, cuando los alumnos reconstruyeron mentalmente su realidad a través de la resolución de las tareas que conforman los escenarios, observamos que surgió en ellos la conexión y el uso de varios significados de la fracción (Kieren, 1993).

Por último, al resolver en el programa de enseñanza las actividades vinculadas con el significado de medida y de relación parte-todo, los alumnos identificaron y escribieron las fracciones representadas en el todo. Asimismo, lograron producir fracciones equivalentes, dada una fracción. En los problemas de reparto, los estudiantes lograron manifestar expresiones simbólicas de la fracción para nombrar

Figura 7 Respuesta de Alejandro a una actividad de reparto

De esta gelatina, Erika se comerá $\frac{1}{3}$ y Pedro se comerá $\frac{2}{6}$:



¿Quién comerá más gelatina: Erika o Pedro? Ninguno, iguales.

Porque si sumamos

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ y sobró } \frac{1}{3}$$

la parte del todo repartido. Además, dichas tareas propiciaron en los escolares la anticipación de la suma de fracciones con igual denominador. En cuanto a las actividades de operador multiplicativo, éstas favorecieron en los alumnos el reconocimiento de las dimensiones de las figuras (ancho y largo) como fundamentales para realizar sus producciones.

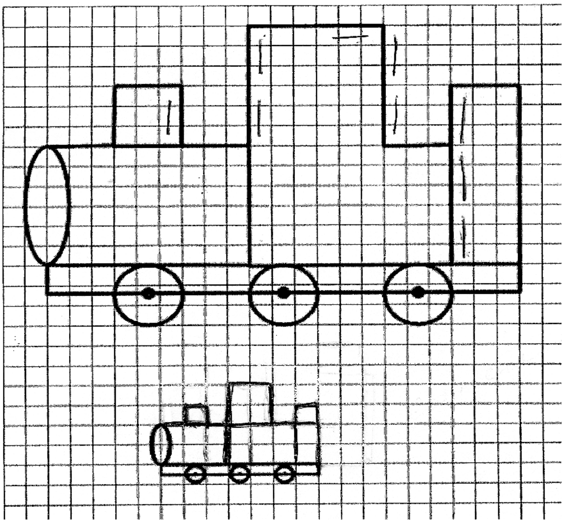
Del análisis de las respuestas dadas a las actividades del cuestionario final, podemos manifestar:

Que en las relacionadas con los significados de *medida* y de *relación parte-todo* de la fracción, la mayoría de los niños del grupo no tuvieron dificultades para dividir un todo en dos, tres, cuatro y seis partes iguales. De igual manera, distinguimos que un gran número de alumnos lograron partir un todo incluso en novenos. Además, utilizaron expresiones simbólicas de la fracción para nombrar las partes fraccionarias que obtuvieron como resultado en las estrategias desarrolladas.

En las correspondientes al significado de *cociente intuitivo* de la fracción, notamos que la mayoría de los niños no presentaron problemas para resolver las tareas vinculadas a situaciones de reparto. Asimismo, desarrollaron procesos apropiados al repartir un todo entre un número determinado de personas. De

Figura 8 Dibujo de Aldo relacionado con el significado de operador multiplicativo (rudimentos de operador multiplicativo)

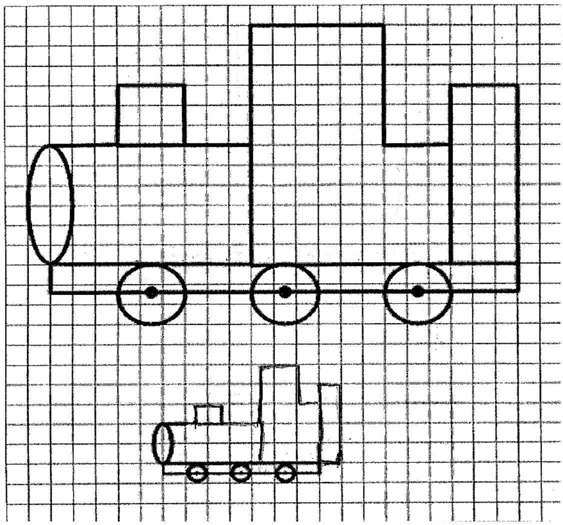
Completa el dibujo de abajo para que obtengas otra locomotora de la misma forma.



igual modo, los alumnos establecieron la relación de equivalencia entre las partes fraccionarias obtenidas en dos repartos diferentes. En relación con dicho significado, presentamos en la figura 7 la solución que dio Alejandro a una de estas actividades.

Con respecto a las respuestas presentadas en los problemas vinculados al significado de *operador multiplicativo* de la fracción, nos percatamos de que la mayoría de los niños no tuvieron dificultades para disminuir a la mitad los lados de una figura. Sin embargo, notamos que medio grupo no logró reducir los lados de una figura a un tercio. Observamos que los niños no reconocieron que la parte dibujada de la locomotora que tenían que completar correspondía a un tercio de las dimensiones de la de arriba, cometieron el error de disminuir a la mitad las dimensiones faltantes. Tampoco pudieron disminuir los lados a la mitad cuando la figura estaba formada por líneas inclinadas. Notamos que redujeron a la mitad únicamente los dos lados horizontales de la figura; los otros dos lados (líneas

Figura 9 Dibujo de Carla D. relacionado con el significado de operador multiplicativo (rudimentos de operador multiplicativo)



inclinadas) los trazaron uniendo los extremos de los lados reducidos; para cerrar la figura, no tuvieron en cuenta su altura, lo que produjo figuras alargadas o distorsionadas. Como evidencia de las respuestas a esta actividad presentamos en la figura 8 el dibujo correcto que elaboró Aldo y, en la figura 9, el incorrecto que hizo Carla D.

Para contrastar las estrategias desarrolladas por los alumnos en la resolución de las actividades, presentamos en el Anexo 1 los resultados que obtuvieron en los dos cuestionarios (inicial y final).

Después de analizar los resultados del cuestionario final, realizamos las entrevistas a los tres alumnos seleccionados (Mayra, Karla A. y Brandon Z.) y las analizamos con el propósito de llevar a cabo el estudio de casos. Enseguida presentamos el estudio de casos, incluidos los resultados de las entrevistas.

El caso de Mayra

Mayra es una alumna que en el cuestionario inicial manifestó habilidad para reconstruir y expresar de manera escrita sus estrategias de solución. Observamos que tiene un escaso conocimiento intuitivo (Kieren, 1992) acerca de las fracciones, lo que influyó en ella al resolver ocho tareas correctas de las 13 que integran el cuestionario inicial. En el transcurso del programa de enseñanza, Mayra logró enriquecer sus conocimientos acerca de las nociones relativas a la fracción, lo cual mostró en cada sesión de trabajo, así como en el cuestionario final, obteniendo en éste un total de 12 tareas resueltas correctamente de las 13 que lo conforman.

Resultados de la entrevista de Mayra

Mayra resolvió correctamente las actividades que le fueron planteadas. Fue evidente que consolidó nociones fundamentales de la fracción, esto lo manifestó al representar de manera gráfica las partes fraccionarias para completar un todo y al identificar las fracciones obtenidas al partir equitativamente el todo, así como al usar un lenguaje técnico-simbólico (Kieren, 1993) para nombrar las fracciones.

Observamos también la habilidad que tiene Mayra para recortar un todo en partes iguales, lo que le permitió reconocer varias fracciones que surgen al cubrir una superficie dada con una figura determinada.

Asimismo, Mayra representó en pictogramas tanto particiones equitativas como distribuciones equitativas y exhaustivas, esto lo expresó al explicar las estrategias que desarrolló en las situaciones de reparto y al emplear la escritura convencional para indicar las fracciones obtenidas.

Del mismo modo, se observó que Mayra reveló un manejo conceptual en relación con el operador multiplicativo, utilizó como factor $\frac{1}{2}$, que aplicó a todos los lados que forman la figura, para obtener una de menor tamaño que la original. Además, admitió de manera intuitiva la existencia de otros operadores fraccionarios $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ que también podrían ser utilizados como factores para reducir la figura de la actividad, esto se observa cuando escribió 8 (número de cuadritos que representa un lado de la figura) entre 3 y 8 entre 4.

El caso de Karla A.

Karla A. es una niña que en el cuestionario inicial exhibió el uso de pictogramas (Valdemoros, 1993) para resolver las tareas. Como referencia, en el cuestionario inicial resolvió cuatro tareas correctamente de las 13 que lo conforman.

Mostró un gran avance en sus conocimientos sobre las nociones relativas a la fracción, después de haber participado en la enseñanza experimental. Esto lo realizó en las 12 tareas que resolvió correctamente, de las 13 que integran el cuestionario final.

Resultados de la entrevista de Karla A.

Karla A. usó pictogramas para resolver las tareas. Reconoció la fracción como parte de un todo. También identificó la parte fraccionaria para completar el todo, esto lo mostró al dividir el todo en partes iguales y emplear la escritura convencional para nombrar las partes fraccionarias.

Notamos que Karla A. tuvo dificultades para cubrir la superficie dada con una figura determinada, esto propició que obtuviera fracciones diferentes a las solicitadas en la tarea. Sin embargo, ella nombró correctamente las fracciones obtenidas. La problemática se debió a que Karla A. no mostró habilidad para cubrir la superficie dada con las partes de la figura que se necesitaban para resolver el problema.

Por otra parte, observamos que Karla A. efectuó particiones equitativas, esta conducta la manifestó en los pictogramas que realizó para resolver las tareas de reparto. Asimismo, en sus estrategias exhibió de manera intuitiva la suma de fracciones con igual denominador.

Además, distinguimos en esta alumna niveles de abstracciones, al procesar en su pensamiento la equivalencia de fracciones en cada una de sus respuestas. Igualmente, notamos en Karla A. la facilidad de reproducir una figura a la mitad de su tamaño original. Del mismo modo que Mayra, Karla A. admitió de manera intuitiva la existencia de otros operadores fraccionarios $\left(\frac{1}{3} \text{ y } \frac{1}{4}\right)$, al expresar que podemos dividir cada una de las magnitudes de los lados de la figura entre 3 o entre 4, si queremos reducirla a $\frac{1}{3}$ o a $\frac{1}{4}$ de su tamaño original.

El caso de Brandon Z.

Brandon Z. es un alumno que en el cuestionario inicial mostró habilidad en el uso de los algoritmos (Figueras, 1988; Valdemoros, 1993). Sin embargo, observamos que contaba con pocas experiencias en torno a las fracciones, esto lo exhibió al resolver acertadamente sólo una de las 13 tareas que conforman el cuestionario inicial. Durante las sesiones de trabajo, Brandon Z. mostró un avance en sus conocimientos acerca de las fracciones, lo que le permitió resolver correctamente 10 tareas de las 13 que integran el cuestionario final.

Resultados de la entrevista de Brandon Z.

Observamos que Brandon Z. identificó la fracción como parte de un todo, esto lo mostró al representar en un pictograma las partes fraccionarias para completar un todo. Pero cuando el todo estaba integrado por una colección de objetos, tuvo dificultades para considerarlo como una sola unidad. Suponemos que la configuración presentada de los objetos influyó en él para no identificar la colección como un todo, únicamente tuvo en cuenta la tercera parte de ella, esto debido a la posición en que se encontraban los objetos dentro de la configuración.

El uso de los algoritmos le permitió a Brandon Z. avanzar en un nivel abstracto al realizar mentalmente particiones de una fracción y obtener su equivalencia. También notamos en este niño la facilidad que demostró en el uso de la equivalencia de fracciones en cada una de sus respuestas.

Por otra parte, este alumno logró darle sentido a los algoritmos a través de las situaciones de reparto, lo cual exhibió al utilizar expresiones fraccionarias correctas para resolver las tareas.

De igual manera, Brandon Z. efectuó la reducción de una figura a la mitad de su tamaño original, al utilizar como factor $\frac{1}{2}$. Dividió entre dos el número de cuadritos que representan cada uno de los lados de la figura en la cuadrícula de la actividad.

Comparación de los tres casos

Los tres casos manifiestan aspectos comunes y al mismo tiempo cada uno presenta cierta particularidad.

Uno de los aspectos comunes que observamos en los alumnos entrevistados (Mayra, Karla A. y Brandon Z.) fue el avance que se dio en sus conocimientos referentes a las nociones de fracción. Lo notamos en los contenidos semánticos que dedujeron al elaborar sus estrategias para resolver las actividades propuestas.

Otro aspecto en común que resalta en las entrevistas es el uso de pictogramas en las estrategias utilizadas para solucionar las tareas. Pues los pictogramas les ayudaron a argumentar y verificar sus respuestas.

Al comparar los tres casos, pudimos apreciar algunos rasgos característicos de las estrategias utilizadas en cada uno de ellos.

Mayra mostró habilidad para manipular mentalmente las partes fraccionarias de un todo al dar solución a las tareas. En cambio, Karla A. presentó mayor facilidad en el manejo de pictogramas al resolver las actividades. Y Brandon Z. manifestó una preferencia algorítmica al solucionar los problemas. Sin embargo, el uso de cualquiera de las estrategias indicadas converge en que los tres alumnos llegaron a construir la noción de fracción.

Además, Mayra y Brandon Z. se caracterizaron por ser unos alumnos participativos en las sesiones de trabajo, es decir, tenían habilidad para exponer sus ideas. En cambio, Karla A. presentaba dificultad para expresarlas. Posteriormente, Karla A. superó ese obstáculo y logró exponer sus ideas, esto se reflejó en las argumentaciones que dio en la entrevista.

CONCLUSIONES

El cuestionario inicial fue un instrumento que nos aportó información de la situación en la que se encontraba el grupo antes de iniciar el programa de enseñanza; con él comprobamos que los niños contaban con escasos conocimientos intuitivos (Kieren, 1983) respecto a las nociones de fracción. También propició que se hiciera una exploración de los procesos cognitivos de los alumnos a través de las estrategias de resolución y de los modos de representación que utilizaban para abordar las fracciones. Esto nos permitió identificar la tendencia que manifestaron algunos niños a usar tanto números naturales como operaciones aritméticas seleccionadas arbitrariamente, lo cual no fue lo apropiado para dar respuesta a las tareas planteadas. Además, notamos que la mayoría de los escolares no reconocieron el todo como divisible para efectuar la distribución de él en los problemas de reparto o en las situaciones donde se requería su partición.

En este cuestionario, observamos que los alumnos tuvieron dificultades para nombrar la parte fraccionaria que se generó al partir un todo en dos partes iguales. Además, no pudieron determinar qué parte de un todo representan las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$. La mayoría de los alumnos tuvieron problemas para representar las fracciones en un todo: un medio, un cuarto y un octavo, y para distribuir un todo entre un determinado número de personas. Muchos niños no lograron ampliar al doble los lados de una figura dada o disminuirlos a la mitad. Los resultados mostrados en el cuestionario inicial son deficientes, suponemos que el grupo de estudio, cuando cursó el tercer grado de primaria, trabajó muy poco los contenidos vinculados a las nociones de fracción.

En el programa de enseñanza se promovió el desarrollo intelectual de los niños, habilitándolos para que ellos mismos construyeran sus propios conocimientos sobre la base de sus experiencias cotidianas (Streefland, 1991, 1993; Goffree, 2000). Durante el proceso de enseñanza, los alumnos efectuaron diversas actividades que les permitieron realizar exitosamente repartos equitativos y exhaustivos de un todo. Además, los alumnos manifestaron expresiones simbólicas de la fracción para nombrar las partes de un todo.

Conforme a lo planteado por Kieren (1992, 1993), observamos que, en el desarrollo del programa de enseñanza, la actividad rudimentaria que los niños produjeron para resolver las tareas planteadas fue la partición; asimismo, las situaciones de reparto propiciaron en los alumnos la anticipación de tener una imagen mental de las acciones de la partición del todo. Además, ejemplificaron con diferentes fracciones la percepción de patrones que los estudiantes construyeron en las situaciones de reparto para mostrar la misma cantidad.

A su vez, apoyados en lo mencionado por Streefland (1993), podemos afirmar que los conocimientos previos que tienen los niños favorecieron la construcción de la noción de fracción en las sesiones de enseñanza. Del mismo modo, las confrontaciones grupales propiciaron en los estudiantes la creación de un ambiente de confianza y respeto mutuos, en donde cada uno tuvo la oportunidad de expresar sus estrategias de resolución con libertad y aceptar sus equivocaciones.

Los escenarios propiciaron la interacción entre los niños, donde ellos reconstruyeron mentalmente sus experiencias cotidianas, intercambiaron ideas, argumentaron sus puntos de vista, reconocieron sus errores; en general, observamos que esta dinámica los condujo a la construcción de los significados elementales de la fracción. También los escenarios favorecieron la conexión de varios significados de la fracción en la resolución de las tareas.

Además, durante las sesiones de trabajo surgieron avances espontáneos por parte de los alumnos, los cuales se manifestaron en la manera en la que resolvieron las tareas planteadas, como la anticipación de la proporcionalidad entre dos figuras y la equivalencia entre fracciones.

El cuestionario final tuvo como objetivo evaluar la enseñanza experimental recibida por los escolares de este estudio. En él, se observó que la mayoría de los niños del grupo no tuvieron dificultades para dividir un todo en dos, tres, cuatro y seis partes iguales. También utilizaron expresiones simbólicas de la fracción para nombrar las partes fraccionarias que obtuvieron como resultado de las estrategias desarrolladas. Casi todos los alumnos resolvieron correctamente las tareas vinculadas con situaciones de reparto. De igual modo, establecieron la relación de orden y equivalencia entre las partes fraccionarias obtenidas en dos repartos diferentes. Además, nos percatamos de que la generalidad del grupo no presentó dificultad para disminuir a la mitad los lados de una figura dada.

El cuestionario final también reveló el alcance que tuvo la enseñanza experimental y, para profundizar en ella, fue necesario complementar con entrevistas efectuadas a tres alumnos.

Las entrevistas nos permitieron indagar sobre los aspectos que no fue posible apreciar con profundidad en el cuestionario final. Al respecto, destacamos las diferentes maneras como los alumnos abordaron las actividades vinculadas con las fracciones. Cada uno de los entrevistados mostró diferentes situaciones de pensamiento. Como ejemplos, citamos que Mayra incrementó su habilidad para manipular mentalmente las fracciones. En cambio, Karla A. presentó mayor facilidad en el manejo de pictogramas. Por su parte, Brandon Z. mostró una preferencia algorítmica en sus estrategias de resolución.

Esta investigación muestra que, coincidiendo con lo planteado por Freudenthal (1983), Streefland (1991, 1993) y Goffree (2000), se favoreció la consolidación de la noción de fracción y de algunos de sus significados (relación parte-todo, medida, cociente intuitivo y rudimentos de operador multiplicativo) en cuarto grado de educación primaria, a través de la resolución de situaciones problemáticas de la vida real, planteadas en el programa de enseñanza, en las que el niño reconstruyó mentalmente sus experiencias cotidianas en un ambiente de interacción donde prevalecieron actitudes lúdicas durante el desarrollo de la enseñanza experimental de las fracciones.

Anexo 1 Resultados que obtuvieron los niños en la aplicación del cuestionario inicial y final

Núm.	Nomb. / Cuestio.	Inicial Ac. por alum.	Final Ac. por alum.
1	Lisset	$\frac{4}{13}$	$\frac{13}{13}$
2	Lizbeth	$\frac{4}{13}$	$\frac{13}{13}$
3	Andrea	$\frac{6}{13}$	$\frac{13}{13}$
4	Arlette	$\frac{3}{13}$	$\frac{13}{13}$
5	Mayra	$\frac{8}{13}$	$\frac{12}{13}$
6	Carla D.	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{13}$
7	Alejandro	$\frac{7}{13}$	$\frac{12}{13}$
8	Karla A.	$\frac{4}{13}$	$\frac{12}{13}$
9	Abigail	$\frac{2}{13}$	$\frac{11}{13}$
10	Zitlally	$\frac{1}{13}$	$\frac{11}{13}$
11	Felipe	$\frac{1}{13}$	$\frac{11}{13}$
12	Daniela	$\frac{1}{13}$	$\frac{10}{13}$

Anexo 1 Resultados que obtuvieron los niños en la aplicación del cuestionario inicial y final (continuación)

Núm.	Nomb. / Cuestio.	Inicial Ac. por alum.	Final Ac. por alum.
13	Ana K.	$\frac{5}{13}$	$\frac{10}{13}$
14	Gabriela	$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$
15	Aidé	$\frac{1}{13}$	$\frac{10}{13}$
16	Brandon Z.	$\frac{1}{13}$	$\frac{10}{13}$
17	Ilse	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$
18	Jennifer	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$
19	Jorge	$\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$
20	Iván	$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$
21	Stephanie	$\frac{1}{13}$	$\frac{8}{13}$
22	Brandon S.	$\frac{1}{13}$	$\frac{8}{13}$
23	Evelyn	$\frac{1}{13}$	$\frac{7}{13}$
24	Juan	$\frac{3}{13}$	$\frac{7}{13}$

Anexo 1 Resultados que obtuvieron los niños en la aplicación del cuestionario inicial y final (continuación)

Núm.	Nomb. / Cuestio.	Inicial Ac. por alum.	Final Ac. por alum.
25	Luis	$\frac{1}{13}$	$\frac{7}{13}$
26	Nancy	$\frac{1}{13}$	$\frac{6}{13}$
27	Aldo	$\frac{1}{13}$	$\frac{6}{13}$
28	Diana	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{13}$
29	Yaremi	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{13}$
30	Ana I.	$\frac{1}{13}$	$\frac{4}{13}$

Nota: En la columna de los aciertos por alumno, la frecuencia está expresada en forma de razón, el numerador indica los aciertos obtenidos por cada niño y el denominador, el total de tareas que conforman los cuestionarios.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (2000), "Educación y didáctica de las matemáticas", *Educación Matemática*, México, Iberoamérica, vol. 12, núm. 1, pp. 5-38.

Bulgar, S. (2003), "Children's sense-making of division of fractions", *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 20, pp. 319-334.

Castorina, J., A. Lenzi y B. Aisenberg (1997), "El análisis de los conocimientos previos en una investigación sobre el cambio conceptual de nociones políticas", *Revista del Instituto de Investigación en Ciencia de la Educación*, vol. 11, pp. 21-30.

Christou, C. y G. Philippou (2002), "Mapping and development of intuitive proportional thinking", *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 20, pp. 321-336.

Cohen, L. y L. Manion (1990), *Métodos de investigación educativa,* Madrid, La Muralla, pp. 377-409.

Figueras, O. (1988), *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales,* tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

——— (1996), "Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto", en F. Hitt (ed.), *Didáctica. Investigaciones en Matemática Educativa,* México, Iberoamérica, pp. 173-196.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Holanda, D. Reidel, pp. 28-33 y 133-177.

Goffree, F. (2000), "Principios y paradigmas de una 'educación matemática realista'", *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional,* Barcelona, Graó, vol. 9, pp. 151-167.

Kamii, C. (1994), *Reinventando la aritmética III,* Madrid, Visor Aprendizaje, 1995.

Kieren, T. (1980), "The rational number constructs. Its elements and mechanisms", en T. Kieren (ed.), *Recent Research on Number Learning,* Columbus, OH, ERIC/SMEAC, pp. 125-149.

——— (1983), "Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas", *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education,* pp. 506-508.

——— (1988), "Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Reston, National Council of Teachers of Mathematics, vol. 2, pp. 162-181.

——— (1992), "Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction", en G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hattrup (eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching,* New Jersey, Lawrence Erlbaun, vol. 6, pp. 323-369.

——— (1993), "Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding", en T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research,* New Jersey, Lawrence Erlbaun, vol. 3, pp. 49-84.

Lenzi, A. (1998), "Psicología y didáctica: ¿relaciones "peligrosas" o interacción productiva? (Una investigación en sala de clases sobre el cambio conceptual de la noción de 'gobierno')", en M. Carretero, J. Castorina y R. Baquero (comps.), *Debates constructivistas,* Argentina, Aique, pp. 69-111.

Miras, M. (1999), "Un punto de partida para el aprendizaje de nuevos contenidos: los conocimientos previos", *El constructivismo en el aula,* Barcelona, Graó, pp. 47-63.

Misailidou, C. y J. Williams (2003), "Diagnostic assessment of children's proportional reasoning", *The Journal of Mathematical Behavior,* vol. 22, pp. 335-368.

Nabors, W. (2003), "From fractions to proportional reasoning: A cognitive schemes of operation approach", *The Journal of Mathematical Behavior,* vol. 22, pp. 133-179.

Perera, P. y M. Valdemoros (2002), "Manipulative help in verbal sharing out continuous and discrete wholes problems solving", *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 4, pp. 49-56.

Pitkethly, A. y R. Hunting (1996), "A review of recent research in the area of initial fraction concepts", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 30, núm. 1, pp. 5-38.

Sáenz-Ludlow, A. (2003), "A collective chain of signification in conceptualizing fractions: A case of a fourth-grade class", *The Journal of Mathematical Behavior,* vol. 22, pp. 181-211.

Secretaría de Educación Pública (1993), *Plan y programas de estudio. Educación Básica. Primaria,* México, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal, SEP.

Solé, I. y C. Coll (1999), "Los profesores y la concepción constructivista", *El constructivismo en el aula,* Barcelona, Graó, pp. 7-23.

Steencken, E. y C. Maher (2003), "Tracing fourth graders' learning of fractions: Early episodes from a year-long teaching experiment", *The Journal of Mathematical Behavior,* vol. 22, pp. 113-132.

Steffe, L. (2002), "A new hypothesis concerning children's fractional knowledge", *The Journal of Mathematical Behavior,* vol. 20, pp. 267-307.

——— (2003), "Fractional commensurate, composition, and adding schemes. Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5", *The Journal of Mathematical Behavior,* vol. 22, pp. 217-235.

Streefland, L. (1991), *Fractions in realistic mathematics education,* tesis de doctorado, Kluwer Academic Publishers, pp. 46-134.

——— (1993), "The design of a mathematics course a theoretical reflection", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 25, pp. 109-135.

Tzur, R. (2004), "Teacher and students' joint production of a reversible fraction conception", *The Journal of Mathematical Behavior,* vol. 23, pp. 93-114.

Valdemoros, M. (1993), *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él,* tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

——— (1997), "Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones: estudio de caso", *Educación Matemática,* México, Iberoamérica, vol. 9, núm. 3, pp. 5-17.

——— (2001), "Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de la unidad. Estudio de casos", *Educación Matemática,* México, Iberoamérica, vol. 13, núm. 1, pp. 51-67.

DATOS DE LAS AUTORAS

Paula B. Perera Dzul
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional, México
paulisperera@hotmail.com

Marta E. Valdemoros Álvarez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional, México
mvaldemo@cinvestav.mx