Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales de matemáticas

Julio César Arteaga Palomares y José Guzmán Hernández

Resumen: Ha sido tradicional que alumnos de los distintos niveles escolares tengan que resolver problemas *verbales*[1] de matemáticas; aunque no siempre desarrollan habilidades para enfrentarlos con éxito. Sin embargo, cuando a los alumnos de primaria se les proponen problemas, ya sean *aritméticos* o *algebraicos* (de acuerdo con la clasificación de Bednarz y Janvier, 1996), utilizan diversas estrategias aritméticas para resolverlos; desarrollan ideas y notaciones que son la base para el posterior desarrollo de su pensamiento algebraico. Así, durante el transcurso de la investigación (llevada a cabo en México) que aquí se informa, se identificaron las estrategias que utilizaron alumnos de quinto grado de primaria cuando resolvieron problemas *algebraicos*. Los resultados obtenidos en esta investigación muestran que mediante estos tipos de problemas y condiciones didácticas adecuadas (véase p. 40) los alumnos generan estrategias que, a la larga, les pueden ser de utilidad en su transición al pensamiento algebraico.

Palabras clave: habilidades, estrategías, problemas verbales, problemas algebraicos, problemas aritméticos, problemas de tasa, reparto desigual, esquema, pensamiento algebraico.

Abstract: It has become traditional for students at different levels of education to have to solve mathematics word problems; but they do not always develop skills to confront these problems successfully. Yet, when students of primary are posed either *arithmetic* or *algebraic* problems (according to a proposal by Bednarz and Janvier, 1996), they use various arithmetic strategies to solve them; at the same time they develop ideas and notations which are the basis for the subsequent development of their algebraic thought. Thus, in the development of the research (carried out in Mexico) reported in this paper, strategies used by fifth grade stu-

Fecha de recepción: 12 de septiembre de 2004.

[1] Entendemos como problemas *verbales* aquellos que se plantean de manera oral o escrita, en forma de enunciados. De aquí en adelante llamaremos a los problemas verbales simplemente problemas.

dents when solving *algebraic* problems were identified. The results obtained in this research show that by means of these types of problems and adequate didactic conditions, students generate strategies which, at a certain moment, may become useful in their transition to the algebraic thinking.

Keywords: skills, strategies, word problems, algebraic problems, arithmetic problems, unequal sharing, diagram, rate problems, algebraic thinking.

INTRODUCCIÓN

En el plan y los programas de estudio para la educación primaria (1993) se propone un enfoque metodológico para la enseñanza de las matemáticas basado en la resolución de problemas. Ahí se plantea que el diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista ayudan al aprendizaje y a la construcción de conocimientos. Se argumenta que con estas actividades las matemáticas son para los alumnos herramientas funcionales y flexibles que les permiten resolver las situaciones problemáticas que se les planteen (SEP, 1993, pp. 49-70). En el diseño de la presente investigación se incorporó el enfoque propuesto por la SEP (*ibid.*) basado en la resolución de problemas; especialmente, en la fase de experimentación.

Cuando los profesores de primaria no llevan a la práctica las sugerencias propuestas en el plan y los programas, los alumnos perciben las matemáticas como algo complicado, que se rige por reglas, según las cuales su aprendizaje depende, en gran parte, de la memorización.

Esta situación se repite con los alumnos de educación secundaria (de 12 a 14 años de edad), que perciben las matemáticas de manera similar. Así, por ejemplo, cuando resuelven problemas de álgebra, utilizan reglas y procedimientos, por lo general, sin reflexionar y creen que este tipo de actividades representa la esencia del álgebra. Brown *et al.* (1988, citado en Kieran, 1988) informaron que con frecuencia los alumnos de secundaria son incapaces de aplicar sus conocimientos de álgebra básica cuando resuelven problemas.

El estudio de la transición de los alumnos de un modo de pensamiento aritmético a uno algebraico condujo a la detección de ciertas características propias de estos tipos de pensamientos. De otros estudios (por ejemplo, Bednarz *et al.*, 1992) se sabe que el pensamiento aritmético se basa en las relaciones entre los datos; es decir, parten de lo conocido para encontrar lo desconocido; utilizan los símbolos para operar y no para designar cantidades; utilizan el signo de igual de manera unidireccional y tienen dificultad para operar con cantidades desconocidas.

Mientras que el pensamiento algebraico se caracteriza porque los alumnos operan con la incógnita como si fuera un dato conocido; ponen en juego las relaciones y las transformaciones implícitas y explícitas de los datos; pueden simbolizar las relaciones entre cantidades homogéneas y no homogéneas; los objetos con los que trabajan son expresiones algebraicas, y representan (globalmente) el problema mediante símbolos algebraicos.

Conocer las características generales de ambos pensamientos permitió anticipar las posibles estrategias que los alumnos utilizarían, así como las dificultades que encontrarían al resolver problemas aritméticos o algebraicos.

El propósito de esta investigación, con énfasis en resolución de problemas, fue identificar las estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado cuando resuelven problemas *algebraicos* verbales.

MARCO TEÓRICO

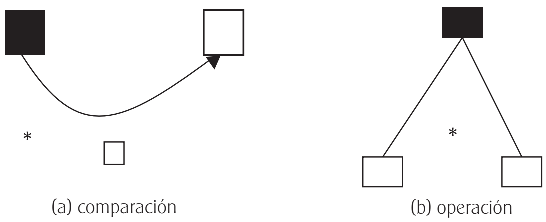
Bednarz y Janvier (1994, 1996) analizaron diversos problemas para establecer una clasificación de ellos e identificar la naturaleza de las relaciones implicadas entre los datos, las incógnitas y los encadenamientos de éstos. Así, lograron mostrar la complejidad de los problemas algebraicos que usualmente se presentan a los alumnos en los cursos regulares de secundaria y señalaron la importancia de identificar la estructura general de un problema a partir de las cantidades involucradas (conocidas y desconocidas), la relación entre ellas (conexión entre cantidades) y el tipo de relación implicada (comparación aditiva o multiplicativa).

En la elaboración de esquemas de los problemas utilizaron los siguientes símbolos: las cantidades conocidas que aparecen en el problema se simbolizan con cuadrados negros; las cantidades desconocidas con cuadrados blancos; a dichas cantidades se les asignó el nombre de estados. Clasificaron las relaciones entre las cantidades en dos tipos: comparación y operación (figura 1).

Estas investigadoras clasificaron los problemas en tres grandes tipos: *reparto desigual, transformación* y *tasa* de acuerdo con la identificación de la naturaleza de los datos, las incógnitas y la estructura de las relaciones involucradas. De igual manera, elaboraron los esquemas para estos problemas (figura 2).

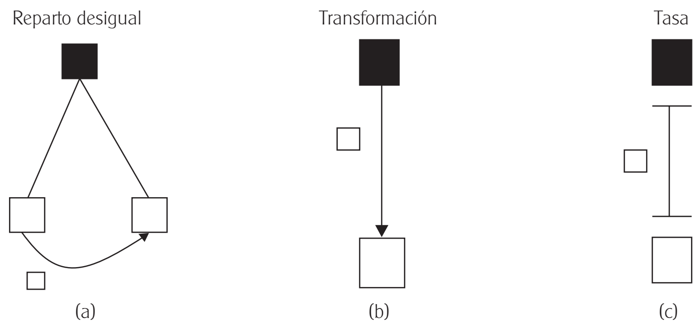
En los problemas de *reparto desigual* se ponen en juego relaciones aditivas, multiplicativas o ambas entre los datos y las incógnitas. Se caracterizan por la existencia de una cantidad total relacionada con sus partes (*estados* que pueden ser conocidos o desconocidos). En el esquema (a) de la figura 2, el cuadrado su-

Figura 1 Simbolismo de las relaciones: comparación y operación



El asterisco indica la operación que se llevará a cabo: adición, sustracción, multiplicación o división

Figura 2 Esquemas de los tres grandes tipos de problemas

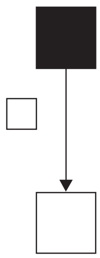


perior representa la cantidad total en el enunciado del problema (*estado* superior, puede ser conocida o no), y los cuadrados inferiores son las cantidades en las que ésta se reparte (*estados* inferiores, cantidades que se desconocen si el problema es algebraico). La estructura matemática relacional de estos problemas está representada de manera *clásica* mediante *esquemas de árbol simple* (las líneas que van del estado superior a los estados inferiores se denominan *ramas*).

Los problemas de *transformación* se caracterizan porque en ellos existe una relación dinámica (de transformación o movimiento) entre dos cantidades homogéneas. Por ejemplo, una persona llevaba cinco cazuelas y en el camino a su casa se le rompieron dos, ¿cuántas cazuelas le quedan? (adaptado de Vargas, 2001, p. 18) (figura 3).

Los problemas de *tasa* se caracterizan porque en ellos existen comparaciones entre cantidades no homogéneas. Por ejemplo, kilómetros por hora; salario por día, patas por animal, etc. Un signo de interrogación se sitúa en los cuadrados blancos que representan las magnitudes sobre las cuales se tiene la pregunta del problema. Podemos observar estas comparaciones en el siguiente problema:

Figura 3 Esquematización del problema de transformación



La relación que existe entre los dos estados se manifiesta a través de una flecha y un cuadrado pequeño que representa la operación (aditiva, multiplicativa, etc.)

Problema 1. Julia y Carolina pretenden salir de vacaciones. Las dos amigas deciden ahorrar con el propósito de realizar ese viaje. Julia tiene actualmente \$4 500 en una cuenta bancaria y prevé depositar \$180 cada semana. Carolina tiene sólo \$1 800 ahorrados, pero pretende depositar en su cuenta \$360 cada semana. ¿En cuánto tiempo, las dos amigas tendrán la misma cantidad de dinero?

La figura 4 muestra el esquema de este problema de tasa.

Las investigadoras clasificaron los problemas de reparto desigual, transformación y tasa como *aritméticos* o *conectados* (con ellos se puede construir *puentes* entre la información conocida, y los alumnos trabajan de lo conocido a lo desconocido) y como *algebraicos* o *desconectados* (con éstos no puede establecerse una relación directa entre la información conocida). A continuación, se presenta un ejemplo de cada uno de estos problemas (ambos son de *tasa*).

Figura 4 Esquema de problema de tasa

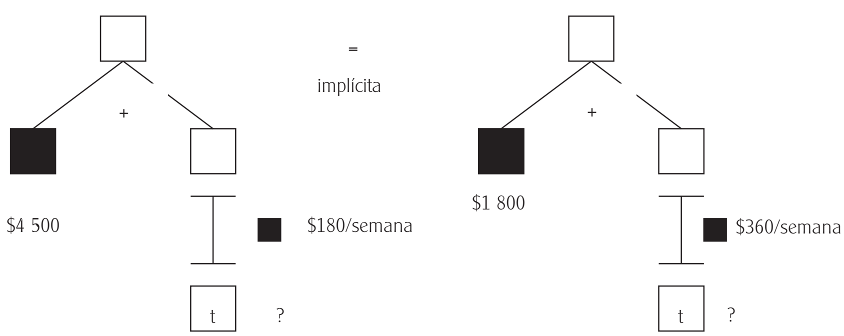
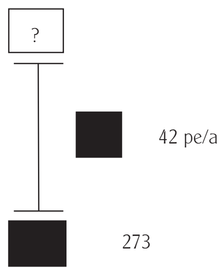


Figura 5 Esquematización del problema aritmético
(pe/a significa *personas por autobús*)

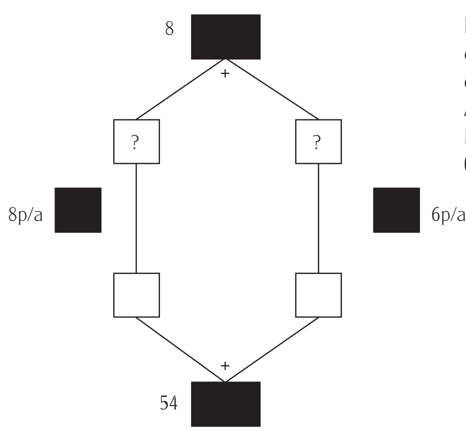


En este problema los alumnos *conectan* la información que se les proporciona. Así, pueden dividir el número total de alumnos entre los asientos por autobús. Es decir, ? ¥ 42 = 273. Trabajan de lo conocido a lo desconocido, para resolver este problema.

Problema 2 (aritmético). En un autobús pueden viajar cómodamente sentadas 42 personas. Se necesita transportar 273 alumnos de la ciudad de México a Cuernavaca. ¿Cuántos autobuses se requieren para transportar a estas personas, si deseamos que todas vayan sentadas? (adaptado de Preciado y Toral, 1971, p. 179) (figura 5).

Problema 3 (algebraico). En una caja hay arañas y escarabajos; hay 8 animales en total. Arturo cuenta el número total de patas y resulta que son 54. Si sabemos que un escarabajo tiene 6 patas y una araña tiene 8, ¿cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja? (adaptado de Santos, 1993, p. 53) (figura 6).

Figura 6 Esquematización del problema algebraico (p/a significa *patas por animal*)



En este problema la *tasa* es: patas/animal. El esquema del problema es típico de los abordados en sistemas de ecuaciones lineales. Aquí, además de la tasa, existe una relación binaria entre dos cantidades homogéneas (animales).

Es decir, ? *a* + ? *e* = 8 *y*

? *a* ¥ 8 + ? *e* ¥ 6 = 54.

Mediante la clasificación de los problemas propuesta por las investigadoras, se pudo establecer *a priori* la dificultad relativa de los problemas que se propusieron a los alumnos. Esta dificultad se comprobó al analizar las soluciones utilizadas por los alumnos. De igual manera, los procesos de solución mostrados por los alumnos ayudaron a entender ciertas características propias del pensamiento algebraico.

METODOLOGÍA

En esta investigación se reportan las experiencias aritméticas con que cuentan los alumnos de primaria y la manera como las utilizan en la resolución de problemas algebraicos de *reparto desigual* y de *tasa,* para detectar el surgimiento y posible desarrollo del pensamiento algebraico.

La primera fase de la investigación consistió en la búsqueda y el diseño de problemas para elaborar un cuestionario diagnóstico (CD). Como parte de esa búsqueda, se revisaron los libros de texto de matemáticas (SEP, 1994) del último ciclo de educación primaria y algunos de primer grado de secundaria (por ejemplo, Cárdenas *et al.,* 1976, y Preciado y Toral, 1971).

Los problemas contenidos en el CD (nueve aritméticos y uno algebraico) están orientados hacia:

i) La detección de los conocimientos básicos de aritmética que poseen los alumnos.
ii) La identificación de estrategias que utilizan en la resolución de problemas aritméticos.
ii) La identificación de estrategias que pudieran utilizar en la resolución de un problema algebraico.

PARTICIPANTES EN LA INVESTIGACIÓN

La investigación se llevó a cabo en una escuela oficial de medio urbano; se inició con 35 alumnos de quinto grado de primaria, de 11 a 12 años. Los alumnos de este grupo tenían un rendimiento aceptable en matemáticas, aunque poca experiencia en la resolución de problemas.

Puesto que trabajar con los 35 alumnos del grupo dificultaría la observación de los procesos y de sus interacciones, se decidió seleccionar a 15 para la fase experimental. Esta selección se hizo a partir de los resultados numéricos obtenidos por los alumnos del grupo en el CD. Así, se seleccionaron cinco alumnos de *rendimiento alto* (A1, A4, A7, A10, A13), cinco de *rendimiento medio* (A2, A5, A8, A11, A14) y cinco de *rendimiento bajo* (A3, A6, A9, A12, A15), y se formaron equipos de trabajo en los que había un alumno de cada nivel; esto es, equipos de tres alumnos.

La identificación de los conocimientos aritméticos previos de los alumnos permitió diseñar hojas de trabajo (para algunos ejemplos, véase el anexo 1) y, a la vez, se proporcionó orientación para planificar la manera como debíamos proponer los problemas a los alumnos. Todos los problemas propuestos fueron abordados en un ambiente de colaboración en el cual los alumnos proponían la forma de abordar el problema y revisaban las soluciones encontradas. Estas condiciones didácticas (ambiente de colaboración, trabajo en equipo, intervención del profesor para estimular la discusión y la búsqueda de nuevas estrategias, revisión colectiva de las estrategias de solución, etc.) permitieron detectar con mayor facilidad las estrategias utilizadas por los alumnos al resolver los problemas propuestos en las hojas de trabajo.

Trabajo experimental y toma de datos

En la segunda fase de la investigación, durante tres semanas, se llevaron a cabo 15 sesiones de trabajo de unos 50 minutos cada una. Los alumnos resolvieron en equipo (de tres alumnos cada uno) los problemas contenidos en hojas de trabajo. Todas las sesiones fueron videograbadas y, además, el investigador tomó notas de lo más sobresaliente en cada una de ellas. Se diseñaron 22 hojas de trabajo con un problema algebraico cada una.

Al iniciar cada sesión, se pedía a los alumnos que leyeran el problema para comprender lo que se requería (cuidando de no inducir su resolución). Se discutía con ellos la importancia de comprender el problema, la elección y desarrollo de una estrategia, y la verificación de la solución.

Además, se les sugería que utilizaran bolígrafo (con el propósito de que dejaran constancia de las estrategias utilizadas) para hacer todas sus anotaciones durante el proceso de solución. El investigador intervenía planteando preguntas y proporcionando a los alumnos sugerencias que alentaban el proceso de solución de los problemas; además, los apoyaba cuando se les presentaban dificultades en alguna parte del proceso de solución. Así, el papel que desempeñó el investigador en esta etapa consistió en facilitar y orientar el trabajo de los alumnos.

Cuando los alumnos terminaban de resolver un problema, se hacía una revisión colectiva de las estrategias y soluciones encontradas. Esta confrontación servía para analizar los procesos de solución y las estrategias utilizadas. Se procuraba que no quedaran dudas respecto a la solución y verificación de los resultados.

La tercera fase de la investigación consistió en diseñar un cuestionario final (CF) para los alumnos, que lo resolvieron individualmente. Los problemas contenidos en el CF (nueve problemas algebraicos y uno aritmético) están orientados hacia:

i) La exploración de los avances individuales que los alumnos lograron en la fase experimental.
ii) La identificación de las estrategias que utilizaron al resolver problemas algebraicos (se incluyó un problema aritmético que resultó difícil para los alumnos en el CD).

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El trabajo de los alumnos en equipo permitió que discutieran sus interpretaciones de un mismo problema y que llegaran a un acuerdo sobre la manera más conveniente de enfrentarlo. Durante la discusión colectiva se revisaron diferentes estrategias de solución que surgieron en el trabajo en equipos. Se observó que, al final de la etapa experimental, los alumnos incorporaron algunas estrategias analizadas en las revisiones colectivas. Conforme se avanzaba en las sesiones, la resolución de los problemas contenidos en las hojas de trabajo les tomaba menos tiempo.

Finalmente, los alumnos resolvieron el CF en alrededor de una hora (nuevamente se les indicó que escribieran sus soluciones con bolígrafo). Se analizó el desempeño individual de los alumnos ante problemas algebraicos (que en la fase experimental resolvieron en equipo). Las estrategias utilizadas de manera sistemática por los alumnos durante la fase experimental fueron las siguientes:

E1. *Propuesta de un número y su comprobación para encontrar la solución.* Este proceso se lleva a cabo de manera reiterada (figura 8, anexo 1).
E2. *Separación de una de las cantidades en partes que se deben repartir.* Este proceso es seguido por la búsqueda de números terminados en 0 o 5

y, después, el acercamiento a la cantidad deseada de uno en uno (figura 9, anexo 1).

E3. *Apoyo en el diseño de un dibujo para encontrar la solución* (figura 11, anexo 1).

E4. *Elaboración de un cuadro para comparar los datos y aproximarse a la solución* (figura 10, anexo 1).

E5. *Trazo de una recta numérica para comparar recorridos mediante saltos* (figura 12, anexo 1).

E6. *Utilización de las operaciones aritméticas elementales* (adición, sustracción, multiplicación y división) mecánicamente; es decir, sin reflexionar en las condiciones iniciales del problema (figura 14, anexo 1).

E7. *Uso de la regla de tres* (figura 13, anexo 1).

E8. *Preferencia por el uso de cálculo mental sin tener que escribir las operaciones usadas* (respuesta numérica).

Al principio de la experimentación, cuando los alumnos se enfrentaron a problemas algebraicos, argumentaban que faltaban *datos*; esto se debía a que los alumnos no pueden *conectar* directamente la información que se les proporciona.

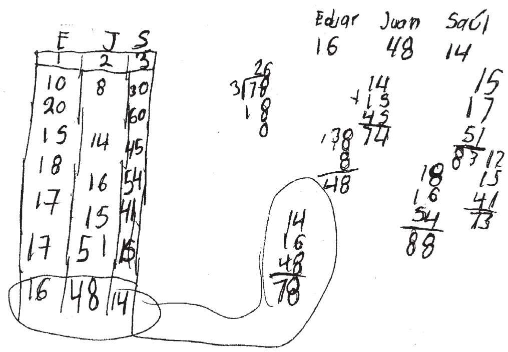
En esta etapa, la estrategia que con mayor frecuencia utilizaban los alumnos era E1. Sin embargo, pronto se dieron cuenta de las desventajas de esta estrategia, pues debían hacer muchas operaciones para encontrar la solución. Así, después prefirieron cambiar al uso de la estrategia E2. Tomemos como ejemplo de esto el siguiente problema.

Problema 4 (algebraico de tasa). El teatro Tepeyac tiene 100 asientos, repartidos en dos secciones (delantera y trasera). Para una función de teatro, el precio del boleto para un lugar en la sección delantera es de $8 mientras que el precio del boleto para un asiento de la sección trasera es de $6. Si se venden todos los boletos, el ingreso total es de $660. ¿Cuántos asientos delanteros y cuántos asientos traseros hay en el teatro Tepeyac? (adaptado de Alarcón *et al.*, 1994, p. 173).

Para resolver este problema, los alumnos ensayaron con varias cantidades e hicieron muchas operaciones, pero no lograron encontrar el resultado. Entonces, cambiaron al uso de ensayos sistematizados con cantidades terminadas en cero o en cinco, y así pudieron encontrar la solución. En el CF, pocos alumnos usaron la estrategia E1 (8.6 por ciento).

Al utilizar la estrategia E2, los alumnos primero hacían una aproximación a

Figura 7 Solución de un alumno utilizando E2



la cantidad deseada mediante divisiones, después se acercaban a ella con cantidades terminadas en cero o en cinco y, finalmente, ensayaban con números que variaban de uno en uno hasta que encontraban la solución. Los alumnos dieron preferencia a esta estrategia, tanto en la fase experimental como en el CF; en estos dos momentos del trabajo, 49.3% la usó. La resolución del siguiente problema ejemplifica lo que se acaba de describir (figura 7).

Problema 5 (reparto desigual). Se reparten 78 dulces entre Edgar, Juan y Saúl. Juan recibe tres veces el número de dulces que Edgar y Saúl recibe dos dulces menos que Edgar. ¿Cuántos dulces recibe cada niño? (adaptado de Alarcón *et al.*, 1994, p. 166).

El uso sistemático de E2 puede permitir a los alumnos la comprensión global de los datos involucrados y que algunos de ellos perciban la estructura del problema; esta percepción también se presentó en algunos alumnos que utilizaron E8, pero no dejaron evidencia escrita de sus procesos de solución.

La estrategia E3 resultó útil para algunos alumnos en la fase experimental; sobre todo, para comprender el problema propuesto. Sin embargo, los alumnos recurrieron poco a E3 en el CF (0.6%). La estrategia E4 fue utilizada por 4.6% de los alumnos para resolver problemas análogos al problema 2. Para comparar los *recorridos* en los problemas de *alcanzar,* los alumnos se apoyaron en la recta numérica (estrategia E5), en un porcentaje similar (8.6%) al de E1 y E8.

La estrategia E6 fue usada en 15.3% (véase el cuadro 1). En general, los alumnos hacían operaciones aritméticas con los datos del problema sin reflexionar sobre las condiciones dadas al inicio. Es patente, en el ambiente escolarizado, la costumbre que tienen los alumnos de proceder así. La estrategia E7 (el uso de la regla de tres) es fomentada en la escuela para resolver cierta clase de problemas. Al principio de la experimentación, E7 fue la estrategia que tuvo preferencia; sin embargo, los alumnos participantes en esta investigación pronto se percataron de que E7 no les servía para resolver los problemas propuestos y su utilización se redujo.

La estrategia de cálculo mental E8 también fue importante para los alumnos. Una vez comprendidas las condiciones del problema, efectuaban operaciones sin necesidad de escribirlas. Aunque es común que ellos hagan uso de esta estrategia en su trabajo diario, con frecuencia los profesores no la aceptan y les exigen que escriban las operaciones que realicen. Algunas de las estrategias que emergieron en la fase experimental fueron incorporadas por los alumnos en los procesos de solución de los problemas del CF.

En el cuadro 1 se muestran las preferencias en el uso de estrategias y su relación con los resultados obtenidos en el cuestionario final.

A pesar de que el CF tuvo mayor grado de dificultad que el CD (ya que contiene mayor número de problemas algebraicos), la mayoría de los alumnos obtuvo mejores resultados en el CF, como puede observarse en el cuadro 1. Por ejemplo, A1 que en el CD obtuvo 80% de aciertos, en el CF obtuvo 100%. Este alumno utilizó con frecuencia E2, la cual parece estar vinculada con el pensamiento aritmético. Sin embargo, su uso puede permitir que su pensamiento evolucione si se le continúan presentando problemas que lo obliguen a ir más allá de sus conocimientos aritméticos.

Uno de los *cambios* en el pensamiento de este alumno se refleja en el uso de E8, aunque escribió sólo la respuesta numérica al resolver un problema. Detectamos ciertas características de su pensamiento algebraico (trabajo de lo general a lo particular, poner atención en la incógnita, entre otras) y nos dimos cuenta de que percibió la estructura del problema. Sin embargo, algunos alumnos como A4 y A7 resintieron la mayor complejidad de CF y tuvieron menor éxito en ese cuestionario.

En general, los alumnos clasificados como de nivel medio y nivel bajo mejoraron su rendimiento en la fase de experimentación y en el CF; incluso, algunos se convirtieron en líderes de sus equipos. En el caso de los alumnos A2 y A5, que tuvieron menor éxito en CF que el que habían mostrado en el CD, se tiene que considerar el mayor grado de dificultad en el segundo cuestionario y el nerviosismo de estos alumnos ante el CF.

Cuadro 1 Porcentaje de éxito en las estrategias utilizadas por los alumnos en el cuestionario final

Alumno	Éxito en los cuestionarios (%)		Estrategias utilizadas (%)								
	CD	CF	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	no contesta
Alumnos de rendimiento alto											
A1	80	100	–	60	–	–	10	–	10	20	–
A4	70	50	10	50	–	–	10	20	–	10	–
A7	90	60	–	60	–	–	10	10	–	20	–
A10	90	90	10	60	–	–	10	10	10	–	–
A13	70	70	10	50	–	–	–	20	–	20	–
Alumnos de rendimiento medio											
A2	70	30	20	60	–	–	10	–	–	10	–
A5	60	40	20	20	–	30	10	20	–	–	–
A8	50	60	–	40	–	30	10	20	–	–	–
A11	60	80	–	60	10	–	10	20	–	–	–
A14	50	70	10	50	–	–	10	20	–	10	–
Alumnos de rendimiento bajo											
A3	40	60	10	70	–	–	10	10	–	–	–
A6	30	20	10	40	–	–	–	20	10	10	–
A9	40	50	20	30	–	10	10	10	–	–	20
A12	30	60	10	30	–	–	10	30	–	20	–
A15	40	70	–	60	–	–	10	–	–	10	–
Promedio	60.0	60.66	8.66	49.33	0.66	4.66	8.66	15.33	2.0	8.66	–

COMENTARIOS ADICIONALES Y CONCLUSIONES

Un indicio claro de lo complejo que es para los alumnos transitar del pensamiento aritmético al algebraico lo constituyen las dificultades que tienen para resolver problemas verbales algebraicos. Sin embargo, pensamos que es posible contribuir al surgimiento y desarrollo del pensamiento algebraico del alumno durante su etapa de transición de la aritmética al álgebra. Una manera de hacerlo es presentando a los alumnos problemas de distinta naturaleza, estimulando los razonamientos y estrategias vinculados con su pensamiento aritmético y creando las condiciones didácticas *adecuadas* para ese fin.

Al inicio de la fase experimental, se observó que los alumnos tuvieron dificultades al intentar resolver problemas algebraicos; con frecuencia afirmaban que faltaba información y que, por tanto, no podían abordarlos. Cuando ello sucedía, el investigador intervenía con preguntas adecuadas que les permitían relacionar los datos e incógnitas del problema y así se daban cuenta de que sí era posible resolverlo con los datos y las condiciones presentes en ese problema.

Luego, cuando los alumnos intentaban resolver algún problema propuesto, ensayaban diferentes caminos; su principal estrategia fue E1, pero pronto descubrieron que no era necesario hacer tantas operaciones. Así, como primera aproximación, empezaban a sistematizar sus estrategias utilizando cantidades terminadas en cero (por la facilidad de operar con ellas, como se puede observar en la figura 7). Más adelante, siguieron con *cantidades controladas*; es decir, recurrieron a la estrategia E2. Esta estrategia se convirtió, finalmente, en la más utilizada. El uso de esta estrategia puede permitir que algunos alumnos perciban la estructura del problema en un contexto aritmético.

Ahora bien, respecto al propósito de la investigación en cuanto a la identificación de las estrategias utilizadas por los alumnos de quinto grado, cuando resuelven problemas algebraicos, se puede afirmar que los alumnos usaron estrategias aritméticas –en algunos casos se notó preferencia por el apoyo con dibujos (figura 11, anexo 1)– al resolverlos.

El uso de estrategias como E2 (y para algunos alumnos E8) puede constituir un apoyo importante para el surgimiento y desarrollo del pensamiento algebraico. Mediante el trabajo con este tipo de problemas, creando las condiciones adecuadas de enseñanzas y dándole la importancia debida a la experiencia aritmética del alumno, es posible acercarlo gradualmente al pensamiento algebraico.

ANEXO 1. ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR LOS ALUMNOS

El teatro Tepeyac tiene 100 asientos, repartidos en dos secciones (delantera y trasera). En una función de teatro, el precio del boleto para un lugar en la sección delantera es de \$8 mientras que el precio del boleto para un asiento de la sección trasera es de \$6. Si se venden todos los boletos, el ingreso total es de \$660. ¿Cuántos asientos delanteros y cuántos asientos traseros hay en el teatro Tepeyac? (véase la figura 8).

Figura 8 Ejemplo de un alumno que utilizó E1, sin encontrar la solución

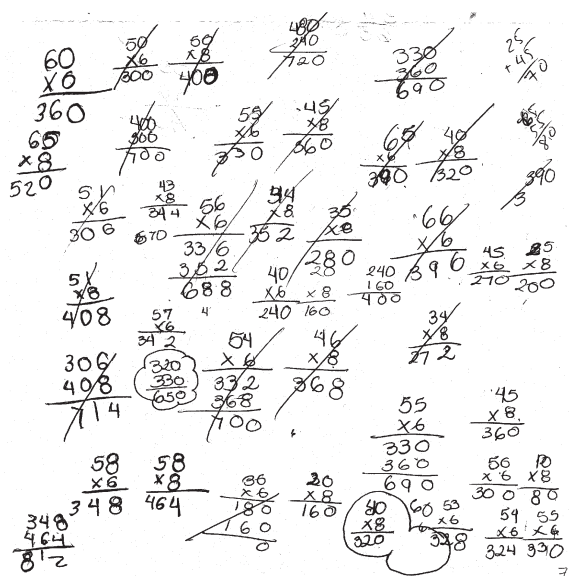
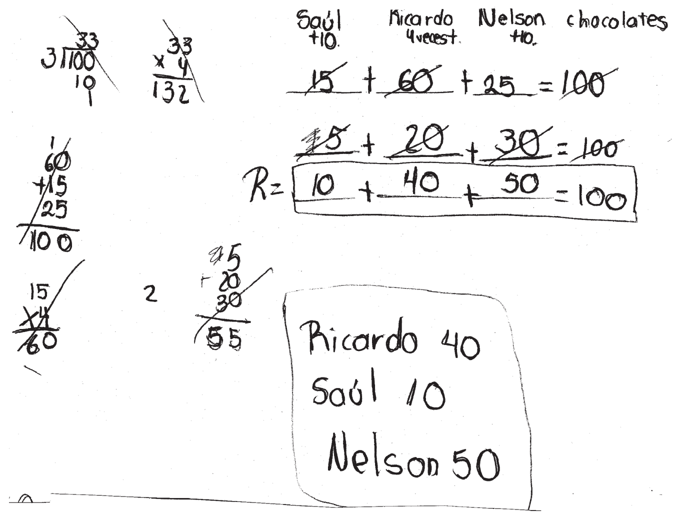
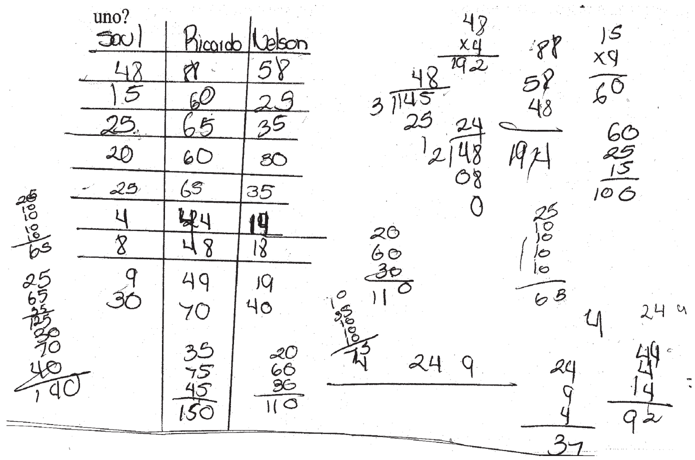


Figura 9 Ejemplo de un alumno que utilizó E2



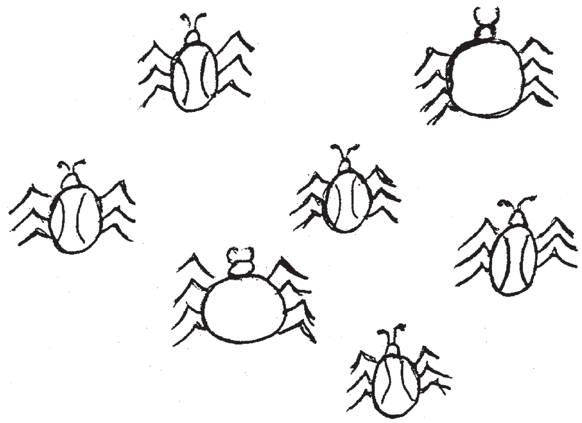
Queremos distribuir 100 chocolates entre Saúl, Ricardo y Nelson, de tal manera que Ricardo reciba 4 veces el número de chocolates que Saúl y Nelson lo mismo que Ricardo más otros 10 chocolates. ¿Cuántos chocolates le corresponden a cada uno? (véase la figura 9).

Figura 10 Ejemplo de un alumno que utilizó E4



Queremos distribuir 145 chocolates entre Saúl, Ricardo y Nelson, de tal manera que Ricardo reciba 4 veces el número de chocolates que Saúl y Nelson lo mismo que Ricardo más otros 10 chocolates. ¿Cuántos chocolates le corresponden a cada uno? (véase la figura 10).

Figura 11 Ejemplo de un alumno que utilizó E3, pero no consideró una de las condiciones del problema



En una caja hay arañas y escarabajos; hay 8 animales en total. Arturo cuenta el número total de patas y resulta que son 54. Si sabemos que un escarabajo tiene 6 patas y una araña tiene 8, ¿cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja? (véase la figura 11).

Figura 12 Ejemplo de un alumno que utilizó E5

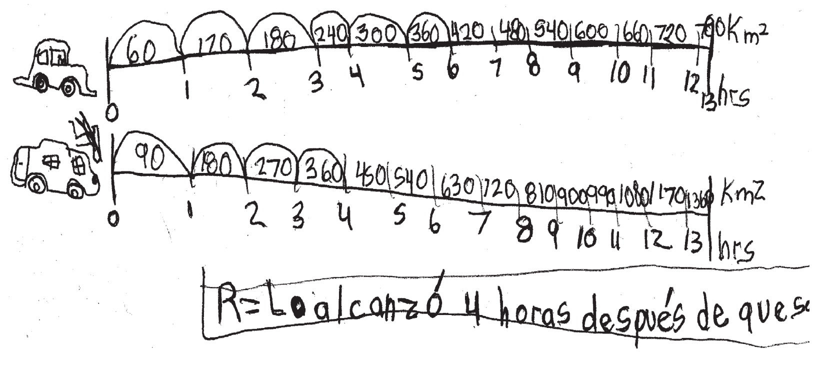
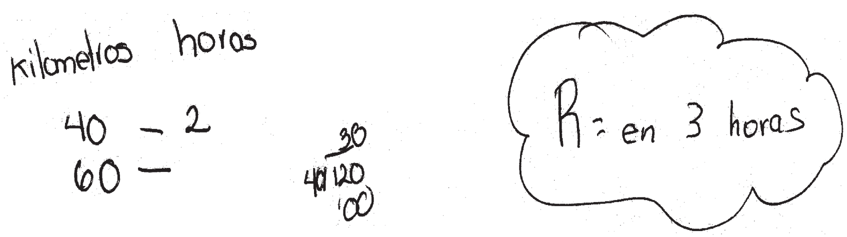
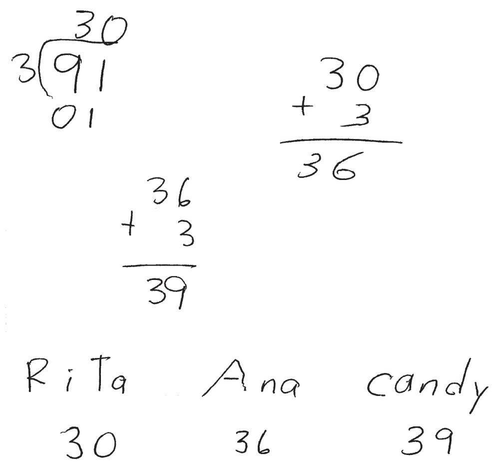


Figura 13 Ejemplo de un alumno que utilizó E7



Un automóvil sale de la Ciudad de México hacia Nayarit con una velocidad constante de 40 kilómetros por hora. Dos horas después sale, del mismo lugar, otro automóvil con la misma ruta a una velocidad constante de 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tomará al segundo automóvil alcanzar al primero? (véanse las figuras 12 y 13).

Figura 14 Ejemplo de un alumno que utilizó E6, sin considerar las condiciones del problema



Se desea repartir 91 pulseras entre Rita, Luisa y Candy, de tal manera que a Rita le corresponda una cantidad tres veces mayor que a Luisa, y a ésta le corresponda una cantidad tres veces mayor que a Candy. ¿Cuántas pulseras recibe cada una? (véase la figura 14).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alarcón, J., E. Bonilla, R. Nava, T. Rojano y R. Quintero (1994), *Libro para el maestro, Matemáticas, Secundaria,* México, SEP.

Bednarz, N., L. Radford, B. Janvier y A. Lepage (1992), "Arithmetical and Algebraic Thinking in Problem Solving", en W. Geeslin y K. Graham (eds.), *Proceedings of the 16 th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* University of New Hampshire, vol. I, pp. 65-72.

Bednarz, N. y B. Janvier (1994), "The Emergence and Development of Algebra in a Problem Solving Context: An Analysis of Problems", en J. P. da Ponte y J. F. Matos (eds.), *Proceedings of the 18 th International Conference for the Psy-*

chology of Mathematics Education, Lisboa, Portugal, PME Program Committee, vol. 2, pp. 64-71.

Bednarz, N. y B. Janvier (1996), "Emergence and Development of Algebra as a Problem-Solving Tool. Continuities and Discontinuities with Arithmetic", en Nadine Bednarz, Carolyn Kieran y Lesley Lee (eds.), *Approaches to Algebra*, Dordretch, Holanda, Kluwer Academic Publishers, pp. 115-136.

Cárdenas, H., M. Curiel, E. Lluis, F. Peralta, C. Tavera y E. Villar (1976), *Matemáticas, Segundo curso*, México, CECSA.

Kieran, C. (1988), "The Learning and Teaching of School Algebra", en *NAEP*, Montreal, Canadá, Université du Québec à Montréal, pp. 390-419.

Preciado, M. y C. Toral (1971), *Curso de matemáticas. Segundo grado*, México, Progreso.

Santos, M. (1993), *La resolución de problemas: elementos para una propuesta en el aprendizaje de las matemáticas*, Cuadernos de Investigación, núm. 25, año VII, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, 53, PNFAPM.

Secretaría de Educación Pública (1993), *Plan y programas de estudio. Educación básica. Primaria*, México, SEP.

—— (1994), *Matemáticas quinto grado*, México, SEP.

—— (1994), *Matemáticas sexto grado*, México, SEP.

Vargas, V. (2001), *Problemas de enunciado verbal en los libros de texto de educación primaria*, Tesis de Maestría, UAEM, Morelos, México.

DATOS DE LOS AUTORES

Julio César Arteaga Palomares
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
jarteaga@mail.cinvestav.mx

José Guzmán Hernández
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Superiores del Instituto Politécnico Nacional, México
jguzman@mail.cinvestav.mx

www.santillana.com.mx/educacionmatematica