Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Barragués, José Ignacio; Guisasola, Jenaro; Morais, Adolfo
Concepciones de los estudiantes de primer ciclo de universidad sobre estimación de la probabilidad
Educación Matemática, vol. 17, núm. 1, abril, 2005, pp. 55-85
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Concepciones de los estudiantes de primer ciclo de universidad sobre estimación de la probabilidad

José Ignacio Barragués, Jenaro Guisasola y Adolfo Morais

Resumen: Paralelamente al interés que despierta la incorporación de la estadística y la probabilidad a los desarrollos curriculares, surge la evidencia de que existen obstáculos importantes para el aprendizaje significativo de los conceptos involucrados. Estas dificultades están siendo investigadas sobre todo en alumnos de secundaria, pero no así en alumnos universitarios. Este trabajo tiene como objetivo estudiar qué criterios siguen los estudiantes universitarios para tomar una decisión acerca de la verosimilitud de un suceso, tras recibir un curso de introducción a la teoría de la probabilidad. El análisis de las formas de razonamiento de los alumnos se ha realizado desde la óptica del paradigma de heurísticos y sesgos. En concreto, se ha investigado el uso por parte de los alumnos de las heurísticas de accesibilidad y de representatividad, y la existencia del sesgo de equiprobabilidad. El estudio nos ha proporcionado indicios de importantes carencias en el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: azar y probabilidad, concepciones alternativas, aprendizaje significativo, paradigma de heurísticos y sesgos.

Abstract: Along with the high interest raised by the incorporation of Statistics and Probability into curricular projects, it arises the evidence of important obstacles in the meaningful learning of the different related concepts. These difficulties and the various misconceptions are the subject for many studies, which mostly consider secondary students. Therefore, there is a lack of such researches for university undergraduate students. The following analysis aims at studying the criteria followed by university students when making decisions about the likeliness of an event, after receiving an introductory course of Probability Theory. The analysis of students' reasoning was carried out from the view of the Paradigm of Heuristics and Bias. More precisely, the use on the part of the students of the heuristics of accessibility and representativeness was researched, as well as the existence of equi-

Fecha de recepción: 30 de marzo de 2004.

probability bias. This research evidenced important lacks in the learning of the students.

Keywords: chance and probability, misconceptions, significant learning, paradigm of heuristics and bias.

INTRODUCCIÓN

En el contexto de los profundos cambios sociales, profesionales y de la vida cotidiana que se están experimentando en los recientes años, cabía esperar también importantes cambios en los estilos de enseñanza y en los objetivos que se asignan a la formación matemática de los alumnos. En particular, asistimos a un renovado interés hacia la formación en probabilidad y estadística. Las razones de este interés son de diversa naturaleza. A nuestro entender, dos de estas razones son especialmente relevantes. De una parte, se considera un área esencial en la formación de ciudadanos adultos capaces de orientarse en un entorno de fuertes interdependencias sociales, políticas y económicas, donde se precisa interpretar gráficos de datos y donde con frecuencia las decisiones se toman sobre la base de estudios estadísticos. Adicionalmente, la probabilidad y la estadística contribuyen a aportar una imagen mucho más equilibrada de la ciencia, que tradicionalmente ha presentado ante el alumno un carácter marcadamente determinista, donde todo era explicable en términos de causas y efectos.

Razones como éstas parecen impulsar la investigación en desarrollo curricular en el campo específico de la estadística y la probabilidad (Grupo Azarquiel, 1996; Díaz *et al.*, 1996; Gómez y Perry, 1996; Ahlgren y Garfield, 1991), investigación que viene señalando de manera repetida que los estudiantes tienen dificultades para lograr un aprendizaje significativo. El aprendizaje de los conceptos de fenómeno aleatorio, frecuencia relativa, variabilidad de las pequeñas muestras, equiprobabilidad, independencia, etc., ha sido investigado detenidamente en el nivel de enseñanza secundaria (Batanero, 2000), y se han detectado dificultades de los estudiantes para interpretar el valor de la probabilidad de un suceso (Sáenz, 1998; Scholz, 1991; Serrano *et al.*, 1996; Borovcnik *et al.*, 1991; Borovnick y Peard, 1996) y para calcularla (Lecoutre, 1985 y 1992; Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre y Cordier, 1990; Batanero *et al.*, 1997; Konold, 1991). Estos estudios evidencian la utilización de diversos mecanismos y estrategias no probabilísticas, de inspiración cotidiana, por parte de las personas cuando deben emitir algún juicio en situaciones de incertidumbre provocada por el azar (Borovcnik *et al.*, 1991;

Scholz, 1991; Muñoz, 1998; Sáenz, 1998; Serrano *et al.*, 1996, 1998). El problema es que estas estrategias "de sentido común" pueden entrar en conflicto con las estrategias probabilísticas formales y dificultar su aprendizaje.

Así pues, resulta de gran importancia conocer con el mayor detalle bajo qué aspectos se presentan estas conceptualizaciones alternativas del azar y la probabilidad. Y es en este punto donde creemos que tales mecanismos y estrategias han sido escasamente investigados en estudiantes universitarios. En efecto, pocos estudios didácticos se han realizado sobre las ideas de los estudiantes respecto al modo de entender el azar y la probabilidad en el primer ciclo de universidad. Es necesario investigar si también en este nivel educativo las creencias previas o adquiridas en la enseñanza por los estudiantes desempeñan un papel importante a la hora de abordar con éxito la enseñanza/aprendizaje de la probabilidad, tal y como indica la investigación didáctica para la enseñanza secundaria (Díaz *et al.*, 1996; Batanero, 2000; Kapadia, 1984). En este sentido, el primer objetivo de este trabajo es estudiar qué criterios siguen los estudiantes universitarios cuando deben decidir acerca de la verosimilitud de un suceso, una vez que han recibido un curso introductorio de teoría de la probabilidad. En segundo lugar, hemos tratado de agrupar estos criterios en categorías explicativas que den una idea del nivel de aprendizaje de los estudiantes.

MARCO TEÓRICO

La investigación acerca de las intuiciones de los individuos sobre del azar y la probabilidad cuenta con una larga tradición en psicología y en didáctica de la probabilidad (Borovcnik y Bentz, 1991; Scholz, 1991). Desde Piaget, en la década de 1950, los psicólogos vienen describiendo diversos tipos de pensamiento probabilístico y diseñando teorías con las que estudiar su desarrollo en el curso de maduración del individuo. El interés que estas investigaciones poseen para la enseñanza de la probabilidad es insistentemente remarcado en la bibliografía (Kapadia, 1984).

Las intuiciones de las personas acerca del azar y el modo de estimar la verosimilitud de un suceso son a menudo vagas y confusas: "probablemente lloverá mañana", "la serie 1, 2, 3, 4, 5, 6 no puede resultar ganadora en la lotería", etc. Es difícil operar con esas intuiciones poco firmes, tan diferentes por ejemplo a las relativas a los números naturales. Ciertamente, podemos presentar al alumno el fundamento axiomático de la teoría de la probabilidad, que proporciona una justificación para la existencia matemática de los conceptos y muestra cómo combinar las probabilidades de algunos sucesos para obtener las probabilidades de otros. Sin embargo, los axiomas no dan pista alguna acerca de cómo pueden asignarse probabilidades a los sucesos. Además, desde la óptica constructivista, los estudiantes construyen el conocimiento conectando la nueva información con la que habían asumido previamente como correcta, de modo que se espera un diálogo entre esas vagas intuiciones "de sentido común" y las intuiciones que surgen al presentar las concepciones probabilísticas formales. Uno de los aspectos de mayor interés, por la problemática que genera, es que ambos tipos de intuición pueden entrar en conflicto. Las intuiciones probabilísticas "de sentido común" forman una representación mental consistente (Pozo, 1999) que puede impedir o sesgar la aplicación de los conceptos matemáticos acerca del azar.

Son numerosas las investigaciones que han buscado conocer más datos acerca del modo en que los individuos emiten juicios probabilísticos. Se ha probado que muchos de estos juicios están dirigidos por el uso sistemático de unos pocos patrones de inferencia bien conocidos (Kahneman *et al.*, 1982). Nosotros nos hemos interesado en este trabajo por algunos de los patrones que más frecuentemente aparecen en los estudiantes a la hora de medir la verosimilitud de un suceso. He aquí una breve revisión de los mismos (Scholz, 1991; Muñoz, 1998; Sáenz, 1998; Serrano *et al.*, 1996, 1998).

Heurística de accesibilidad

Descrita en primera instancia por los psicólogos Amos Tversky y Daniel Kahneman, *la heurística de accesibilidad* consiste en estimar la probabilidad de un suceso según la facilidad con que se recuerdan ejemplos en los que dicho suceso ocurrió o por la facilidad con que pueden generarse ejemplos en los que tal suceso ocurre (Scholz, 1991; Hirsch y O' Donnell, 2001; Sáenz, 1998). Paulos (1995) señala que la literatura psicológica contiene una gran cantidad de trabajos sobre el error de accesibilidad o disponibilidad y que se trata de un fenómeno ampliamente difundido en los medios de información.

Heurística de representatividad

Con esta concepción, se estima la probabilidad de un suceso según lo representativo que para cierta población parece ser dicho suceso (Hirsch y O' Donnell, 2001; Sáenz, 1998; Serrano *et al.*, 1998). Kahneman y Tversky (1972) exploraron lo que ellos llamaron "heurística de representatividad", esto es, la asignación de probabilidades altas a los sucesos que parecen ser prototípicos de una población y bajas probabilidades a los que parecen no serlo. En palabras de Kahneman y Tversky, "una persona que sigue este patrón evalúa la probabilidad de un suceso o de una muestra según el grado en que cuenta con propiedades similares a las de la población de donde proviene, y refleja las características del proceso mediante el cual ha sido generado".

También la heurística de representatividad explica la creencia común de que las secuencias de resultados que aparecen relativamente ordenadas o simétricas no pueden considerarse aleatorias "por no tener aspecto aleatorio" (Serrano *et al.*, 1998). Estas ideas conducen, por ejemplo, a que se considere poco probable un número de la lotería como el 12345 frente a cualquier otro determinado número cuyos dígitos aparezcan "desordenados", porque se piensa que el resultado 12345 no es *representativo* del conjunto de los resultados que se obtienen al azar.

Sesgo de equiprobabilidad

Se refiere a la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquellos en los que no es aplicable el principio de la indiferencia. Lecoutre (1985 y 1992), Lecoutre y Durand (1988) y Lecoutre y Cordier (1990), al estudiar el problema, preguntaron a los sujetos qué es más probable al lanzar dos dados: "obtener un cinco y un seis" u "obtener dos seises". A pesar de variar el contexto de la pregunta, el formato, la edad y la formación de los sujetos, existe una coincidencia que muestra la gran estabilidad en la creencia de que ambos sucesos son equiprobables.

Esta revisión bibliográfica pone de manifiesto las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la teoría de la probabilidad en el nivel introductorio. Sin embargo, los estudios realizados se centran en estudiantes de niveles de enseñanza elemental y media, y existen pocos trabajos para el nivel universitario. Así pues, en este trabajo vamos a analizar las dificultades de un grupo de estudiantes universitarios españoles, después de recibir un curso introductorio de probabilidad y estadística en segundo curso de ingeniería industrial. A partir de un análisis de los contenidos y habilidades cognitivas que son necesarios para comprender de manera significativa la teoría de la probabilidad en un nivel introductorio, así como de la revisión de la bibliografía citada. Parece plausible plantear como hipótesis que, en la mayoría de los estudiantes, se detectarán los sesgos estadísticos descritos. Contrastar esta hipótesis ha sido el primer objetivo de este trabajo. El segundo objetivo consiste en estudiar las estrategias de resolución adoptadas por los alumnos al enfrentarse a las tareas propuestas (Borovcnik y Bentz, 1991).

DISEÑO EXPERIMENTAL

Para contestar las interrogantes planteadas, se ha ideado un diseño múltiple y convergente que incluye métodos cualitativos (entrevistas) y cuantitativos (cuestionario escrito). El cuestionario consta de seis enunciados de tipo abierto relacionados con situaciones en las que interviene el azar. El alumno debe responder eligiendo una de las respuestas que se proponen y, además, debe justificar su elección. Nuestro interés se ha centrado precisamente en las razones del alumno para elegir una u otra respuesta. El anexo 1 recoge el cuestionario escrito. En un trabajo previo (Guisasola y Barragués, 1999) se analizaron las explicaciones que daban los estudiantes de primer curso de ingeniería técnica industrial sobre el modo en que estimaban la verosimilitud de diferentes sucesos en fenómenos aleatorios estudiados en un tema de introducción a la teoría de la probabilidad. Allí se constató en una muestra pequeña (30 alumnos) que las interpretaciones de los estudiantes sobre estos fenómenos presentaban una baja coherencia global, pero mayoritariamente se expresaban ideas que se encontraban fuera del marco teórico formal, tendían a razonar en términos causales y recurrían a su experiencia personal para estimar la probabilidad de un suceso, todo ello en consonancia con lo que recoge la bibliografía especializada.

Las cuestiones que hemos utilizado provienen en parte de las que empleamos en el estudio previo y hemos añadido otras nuevas. Para aumentar la efectividad del cuestionario, hemos utilizado preguntas cualitativas y de formato abierto. El cuadro 1 muestra los objetivos de cada ítem, esto es, relaciona cada uno de los ítems con el tipo de sesgo o de heurística involucrado que se intenta detectar. Como puede observarse, la indagación sobre cada uno de los aspectos ha sido realizada recurriendo a más de un ítem, ya que contrastar el mismo pro-

Cuadro 1 Objetivos de los ítems del cuestionario escrito

Sesgo o heurística por detectar	Ítems
Heurística de accesibilidad	5, 6
Heurística de representatividad	3, 4
Sesgo de equiprobabilidad	1, 2, 5

blema en diferentes situaciones mejora nuestra confianza en el análisis de las características del conocimiento de los estudiantes.

El cuestionario fue aplicado por el mismo investigador a todos los grupos de estudiantes una vez que el profesor de la asignatura había desarrollado completamente el tema y se habían realizado en el aula de clase los ejercicios programados. Los estudiantes respondieron al cuestionario escrito bajo condiciones de examen (sin comunicarse con otros estudiantes) durante una clase de 55 minutos. Hemos de señalar que, de manera general, los estudiantes no mostraron dificultades para entender los enunciados de las cuestiones.

Una vez elegidas las cuestiones, un miembro del equipo de investigación propuso para cada una de ellas un conjunto de categorías que previsiblemente recogerían las respuestas de los alumnos. Tras discutir dichas categorías con los otros dos componentes del equipo, pasamos a realizar una sesión de entrenamiento en la que examinamos 10% de la muestra. Al final, procedimos a analizar independientemente todos los cuestionarios. El nivel de acuerdo entre los correctores a la hora de clasificar las respuestas fue muy alto para cada cuestión. En los casos de desacuerdo, la categorización definitiva se realizó mediante discusión y consenso entre los tres correctores.

Tras analizar los resultados del cuestionario escrito, la segunda prueba consistió en entrevistar de modo individual a un total de 15 estudiantes de segundo curso de ingeniería técnica industrial elegidos de manera aleatoria. El anexo 2 recoge las tres cuestiones de la entrevista estructurada. Las entrevistas tienen como objetivo ver de un modo más directo y detallado cómo interpretan y explican los estudiantes las tres situaciones problemáticas sobre fenómenos aleatorios, contrastar si estas explicaciones se aproximan o no al marco de la teoría de la probabilidad estudiado en clase y, finalmente, estudiar si se obtienen resultados coherentes con los obtenidos mediante los cuestionarios escritos.

Las entrevistas han tenido una duración media de 30 minutos y han sido grabadas en cinta magnetofónica para su posterior transcripción y análisis. La es-

Cuadro 2 Objetivos de las situaciones problemáticas para entrevista

Sesgo o heurística en el cual profundizar	Situación problemática
Heurística de representatividad	2, 3
Sesgo de equiprobabilidad	1

tructura de la entrevista consiste en que el estudiante se plantee el fenómeno y piense sobre lo que sucede, estimulándolo a que emita conjeturas lo más fundamentadas posible (White y Gunstone, 1992). El cuadro 2 relaciona cada situación problemática con el tipo de sesgo o de heurística en el que se ha intentado profundizar mediante la entrevista.

La muestra de estudiantes

El cuestionario escrito se aplicó a un total de 110 estudiantes distribuidos en tres grupos de segundo curso de ingeniería técnica industrial de la Universidad del País Vasco, que fueron elegidos de manera aleatoria. Los grupos corresponden a las titulaciones universitarias de ingeniería técnica en electricidad, mecánica y química. En los programas del segundo curso de estas titulaciones se incluye la asignatura cuatrimestral métodos estadísticos, en la que se desarrollan los conceptos estadísticos y probabilísticos elementales: estadística descriptiva, probabilidad, variables aleatorias, análisis de la regresión y test de hipótesis. Debe indicarse que uno de los principales objetivos de la asignatura es la comprensión de la interpretación frecuencial del concepto de probabilidad. Además, los alumnos ya contaban con un primer acercamiento preuniversitario a los conceptos elementales de azar y probabilidad (suceso, frecuencia, etcétera) incluido en el currículo español de Enseñanza Secundaria (MECD, 2001).

Tipo de enseñanza recibida por los alumnos de la muestra

En el momento de responder al cuestionario, todos los grupos de alumnos habían recibido enseñanza sobre el tema de probabilidad en sus respectivos cursos, impartida por profesores competentes y experimentados. Los profesores desarrollaron la asignatura según el esquema habitual, esto es, exposición del marco teórico formal (definiciones, teoremas), ejemplos y resolución de ejercicios estándar tomados de la amplia bibliografía existente. Nótese que nuestro objetivo no ha sido realizar una comparación entre los resultados obtenidos antes y después de recibir una formación, lo cual habría exigido un pre-test, sino estudiar el modo en que los estudiantes que han recibido ya un curso universitario estándar se enfrentan a situaciones probabilísticas de alta demanda cognitiva.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para facilitar la presentación y discusión de los resultados obtenidos, los indicaremos en diferentes secciones y los ilustraremos con resultados de los cuestionarios, así como con resultados cualitativos de las entrevistas.

¿Consideran los estudiantes que todos los sucesos son equiprobables?

Los ítems 1 y 2 se han construido para detectar un sesgo de equiprobabilidad. Debe aclararse que las situaciones planteadas no son exactamente equivalentes a las de los ítems propuestos por Tversky y Kahneman. Estos autores plantean problemas con sucesos que tienen probabilidades diferentes y que los alumnos aprecian como equiprobables, mientras que nuestros ítems 1 y 2 hacen referencia a sucesos con probabilidades desconocidas a los que los alumnos asignan arbitrariamente la misma probabilidad.

En el ítem 1 los sucesos, cuya probabilidad es desconocida, son los de subida/bajada de las acciones de cada una de las empresas. Se trata de calcular la probabilidad de cierto suceso, marcando una de las respuestas y explicando cuál ha sido su razonamiento. Son varias las respuestas que pueden darse dentro del marco teórico. Es posible formular de manera explícita alguna hipótesis sobre la probabilidad de que suban las acciones de cada una de las tres empresas y enseguida calcular la probabilidad. También puede no formularse hipótesis alguna y operar con cierto número de parámetros, ofreciendo una solución no numérica; finalmente, una respuesta de menor calidad de razonamiento sería la que explica que las probabilidades de que suban las acciones de cada empresa son desconocidas y, en consecuencia, no es posible calcular la probabilidad pedida.

Como se ha indicado, con este ítem tratamos de detectar el sesgo de equiprobabilidad. En las fases previas de la investigación, intentamos enunciados de tipo similar al ejemplo que hemos citado en la revisión teórica (apartado "Sesgo de equiprobabilidad"). Sin embargo, cuando nuestros alumnos *comprendían* el enunciado en los términos que deseábamos (esto es, el suceso "obtener un 5 y un 6" quiere decir "obtener *cualquiera* de los resultados 5 – 6 o 6 – 5"), no pudimos detectar en ellos un sesgo de equiprobabilidad. Los alumnos eran capaces de responder correctamente que p (6 – 6) < p (5 – 6 o 6 – 5). En consecuencia, fue necesario construir nuestros ítems 1 y 2 con los cuales no tratamos de observar en los alumnos la creencia en la equiprobabilidad de todos los *sucesos* (subconjuntos del espacio muestral), sino en la de todos los *resultados* del experimento (elementos del espacio muestral). La creencia en la equiprobabilidad puede conducir, en la situación planteada en el ítem 1, a asumir de manera implícita, sin intento de análisis, la equiprobabilidad de la subida y bajada del valor de las acciones de cada empresa y, por tanto, la equiprobabilidad de los ocho elementos del espacio muestral. Los resultados obtenidos para el ítem 1 se recogen en el cuadro 3.

Las explicaciones de los estudiantes recogidas en la categoría "respuesta correcta" consistieron en analizar el problema desde el marco teórico de la probabilidad explicado en clase y concluir que, al no conocer las probabilidades de los sucesos elementales, no pueden calcular la del suceso pedido. Sin embargo, ningún estudiante propuso una respuesta de mayor poder explicativo como las apuntadas al principio de la discusión. En la categoría "cálculo erróneo de la probabilidad" se agrupan aquellas respuestas que enfocan correctamente el problema al formular explícitamente la hipótesis de equiprobabilidad de los sucesos "subir" y "bajar" para cada empresa, pero luego cometen algún error en el cálculo de la probabilidad.

Cuadro 3 Porcentajes de respuesta en el ítem 1

Categoría de respuesta	% de respuestas (N = 75)
Respuesta correcta	16
Sesgo de equiprobabilidad	52
No es posible estudiar el fenómeno	20
Cálculo erróneo de la probabilidad	2.7
Respuesta incodificable	1.3
En blanco	8

Cuadro 4 Porcentajes de respuesta en el ítem 2

Categoría de respuesta	% de respuestas (*N* = 60)
Respuesta correcta de baja calidad explicativa	45.7
Respuesta correcta	14.3
Sesgo de equiprobabilidad	34.3
Respuesta incodificable	5.7

Resulta interesante el hallazgo de un porcentaje relativamente elevado (20%) de respuestas que coinciden en suponer que no es posible estudiar el fenómeno presentado, ya que "es demasiado complejo". Borovcnik y Bentz (1991) y Serrano *et al*. (1996) indican que este tipo de respuesta parece revelar una interpretación causal de los fenómenos aleatorios, lo que en la bibliografía se conoce como "sesgo determinista". Nosotros también creemos que es plausible esta interpretación, ya que el sujeto que trata de explicar sistemáticamente las situaciones en términos de causas y efectos puede apreciar la imposibilidad de aplicar este tipo análisis en fenómenos complejos y, por tanto, desconfiar de cualquier otro tipo de solución que se proponga. El problema es que este mismo sujeto no estaría comprendiendo que la solución probabilística busca un tipo de regularidad cualitativamente diferente a la determinista, independientemente de que ésta pueda o no obtenerse y sea o no apropiada.

En el ítem 2 se definen varios sucesos elementales cuya probabilidad es desconocida. Sin embargo, en el enunciado no se hace referencia a este detalle. El alumno debe calcular la probabilidad de cierto suceso, marcar una de las respuestas y explicar cuál ha sido su razonamiento. De acuerdo con el marco teórico, el razonamiento de este ítem implica que el alumno debe considerar el espacio muestral E = {R, V, AF, AI} (R = "rojo", V = "verde", AF = "ámbar fijo", AI = "ámbar intermitente") y calcular la probabilidad del suceso F = {R, V} expresándola en términos de los parámetros $p(R)$, $p(V)$ y quizá formulando alguna hipótesis acerca de estos valores. También es posible considerar que no puede darse una respuesta numérica, puesto que son desconocidos los valores de $p(R)$ y $p(V)$. Las respuestas han sido clasificadas según muestra el cuadro 4.

La categoría "sesgo de equiprobabilidad" recoge aquellas respuestas en las que se asume de forma implícita que la probabilidad de cada uno de los cuatro estados del semáforo es 0.25. Nótese lo poco razonable que, en general, resulta esta suposición en la situación planteada. Algunos ejemplos de este tipo de respuesta son los siguientes:

De 4 posibilidades (100%) 2 supones que está rojo o verde, luego sería la mitad de probabilidad.

Nos encontramos con cuatro estados diferentes. Para calcular la probabilidad de que el semáforo esté en dos estados hacemos lo siguiente: p(R,V) = 2/4 = 0.5 dos posibilidades entre cuatro.

Más de 45% de las respuestas explica correctamente que no es posible calcular la probabilidad pedida porque la probabilidad de cada uno de los estados del semáforo o bien la fracción de tiempo que el semáforo se mantiene en cada uno de los estados es desconocida. Sin embargo, estas respuestas no profundizan en el análisis de las demás opciones y no explican que aunque la probabilidad de cada uno de los estados del semáforo sea desconocida, se podría obtener una expresión general de la probabilidad pedida en términos de los parámetros p(R), p(V) y p(AF). Por ello, las respuestas de esta categoría han sido calificadas como correctas de baja calidad explicativa. En una minoría de respuestas (14%), se realiza el análisis detallado de las opciones que se establecen y se reconoce que las probabilidades de cada uno de los estados del semáforo son desconocidas, pero se decide añadir de manera explícita la hipótesis de equiprobabilidad, esto es, se establece explícitamente que $p(R) = p(V) = p(AF) = p(AI) = 0.25$ y, en consecuencia, se obtiene $p(\{R, V\}) = p(R) + p(V) = 0.5$.

La situación problemática 1 para entrevista se ha construido para profundizar en las explicaciones del alumno en torno a la creencia irreflexiva en la equiprobabilidad, en que "aleatorio" y "equiprobable" son sinónimos. Todos los alumnos entrevistados, además de mostrar este sesgo, parecen encontrarse más cómodos procediendo a los cálculos de modo informal. Obsérvese por ejemplo el siguiente fragmento de entrevista a una de las alumnas:

Fragmento de entrevista correspondiente a la situación problemática 1

Marta.- La probabilidad de que acabe en (1) y de que acabe en (3) para mí sería la misma.

Entrevistador.- ¿Por qué crees que sería la misma?

M.- Lo eliges sin más, es un proceso aleatorio, yo lo voy a elegir sobre la marcha.

E.- Vamos a tratar de hacerlo de un modo un poco más riguroso. ¿Cuál sería el espacio muestral?

M.- Sería E = {1, 2, 3}

E.- ¿Qué más?

M.- La probabilidad de cada elección es 0.5. En cada bifurcación, se da la misma probabilidad, 0.5. Yo, para llegar al (1) tendría que hacer (0.5) (0.5) = 0.25. La probabilidad de llegar a (2) sería *[se equivoca, duda, pero al final es capaz de hacerlo]* (0.5) (0.5) + (0.5) (0.5) = 0.5. Para el tercero, la misma probabilidad que para el (1).

E.- A la hora de pensar en la probabilidad en cada bifurcación, ¿por qué has pensado que es 0.5?

M.- Como son dos... para mí es algo aleatorio, entonces tiene la misma probabilidad que suceda algo que otra cosa.

E.- Y si tuvieras más caminos...

M.- Si tuviera tres, lo dividiría entre tres. Si fueran cuatro, entre cuatro y así.

Obsérvese que Marta asume de manera irreflexiva que ambas posibilidades en cada bifurcación cuentan con la misma probabilidad; "elección aleatoria" y "elección con equiprobabilidad" son sinónimos, no se establece una *diversidad explicativa* en los razonamientos para el cálculo de la probabilidad. Veamos un segundo ejemplo de entrevista:

Fragmento de entrevista correspondiente a la situación problemática 1

Ricardo.- Yo creo que el destino de mayor probabilidad sería el (2) *[explica en la figura que tiene dos posibles trayectorias para llegar a (2), frente a la única de los destinos (1) y (3)]*.

Entrevistador.- Vamos a tratar de resolverlo de forma algo más rigurosa. Vamos a especificar el espacio muestral, los sucesos y las probabilidades. Te pido que me calcules $p(1)$, $p(2)$ y $p(3)$.

R.- *[traza un árbol de posibilidades]* Creo que la probabilidad de que acabe en (2) es un 50%.

E.- ¿De dónde ha salido?

R.- Aquí *[primera bifurcación]* la probabilidad de la derecha y de la izquierda es 1/2. Cualquiera de las bifurcaciones tiene probabilidad 1/2 *[calcula correctamente el producto de las probabilidades y la suma en el caso del destino (2)]*.

E.- ¿Por qué has tomado como 1/2 la probabilidad de cada bifurcación?

Cierto que tienes dos caminos, pero ¿por qué les has dado 1/2 de probabilidad?

R.- Era uno o era otro.

E.- ¿Y si tuvieras un tercero?

R.- 1/3.

E.- ¿Y cuatro vías?

R.- 1/4.

E.- Intento ver qué proceso has seguido para tomar probabilidad 1/2 en cada bifurcación.

R.- Si tengo por ejemplo tres caminos, tengo las mismas posibilidades de elegir los tres. Entonces tendré que dividir la probabilidad, que es uno, entre tres.

E.- ¿Y no se te ocurre una forma de resolverlo más general?

R.- ¿Más general?

E.- Sí. Tú lo resuelves como si la elección entre uno u otro camino se realizara con una moneda perfecta. ¿Y si fuera otro procedimiento también aleatorio?

R.- *[No comprende]*

E.- Supón que el hombre saca en este punto un dado *[señala el lugar de la primera bifurcación]*. Si le sale 1 o 2, va a la derecha. En otro caso, a la izquierda.

R.- Tendrías valores diferentes a esos 1/2.

E.- ¿Por qué desde el principio lo enfocaste como 1/2 de probabilidad cada camino?

R.- Depende del criterio que siga. En el caso del dado, sería diferente...

E.- ¿Tendrían que especificarte cómo realiza el hombre la elección?

R.- Sí.

E.- ¿Y si no te lo especifican?

R.- Si no me lo especifican, tomo el número de casos.

Nótese que Ricardo emplea idéntico procedimiento para calcular la probabilidad: la regla de Laplace. El profesor decide preguntarle acerca de sus razones para suponer equiprobabilidad en cada bifurcación. Como puede verse, para Ricardo "aleatorio" y "misma probabilidad" son sinónimos. Luego, el alumno tiene dificultades no sólo para proponer una solución más general, sino también para entender la necesidad de hacerlo. Sólo cuando el profesor le indica un modo determinado de elegir una u otra bifurcación en el que evidentemente no existe equiprobabilidad, el alumno modifica el valor de 1/2. El alumno reconoce claramente que si no se especifica el criterio de elección, supone equiprobabilidad, pero no se trata de una decisión tomada tras una reflexión. Ningún intento existe de analizar cualitativamente la situación, de emitir hipótesis acerca de la probabilidad de cada elección ni de plantearse la búsqueda de una solución lo más general posible.

Debe hacerse notar, además, que de esta equivalencia errónea entre los significados de los términos "elección aleatoria" y "elección con equiprobabilidad", cabe esperar poco después un conflicto con el concepto de distribución de probabilidad. En efecto, se introduce el concepto general de distribución probabilística precisamente para analizar variables que, siendo aleatorias, en el caso discreto sus posibles valores cuentan con diferentes probabilidades de aparecer, y en el caso continuo existen intervalos de igual longitud pero con diferentes probabilidades.

¿Consideran los estudiantes que los sucesos más accesibles son los más probables?

En los ítems 3 a 5 se pregunta a los estudiantes acerca de la probabilidad de determinados sucesos. En el ítem 3 se describen dos poblaciones P (trabajadores de banca) y Q (miembros de alguna ONG), presumiblemente no disjuntas. El estudiante debe razonar qué es más probable, que el elemento sea sólo un trabajador de banca (pertenezca a P) o que, además de trabajar en banca, colabore con alguna ONG (pertenezca a $P \cap Q$). El objetivo del ítem es detectar una concepción de la probabilidad según la cual la probabilidad de que cierto elemento pertenezca a cierta población se estima atendiendo solamente a la experiencia personal acerca de ambos, esto es, atendiendo sólo al grado en el que el elemento se considere típico de la población, sin ningún intento de análisis formal (heurística de representatividad). Los resultados obtenidos se muestran en el cuadro 5.

Cuadro 5 Porcentajes de respuesta en el ítem 3

Categoría de respuesta	% de respuestas (N = 48)
Respuesta correcta	16.7
Heurística de representatividad	77.1
Respuesta incodificable	4.2
En blanco	2.1

En la categoría "respuesta correcta" se han agrupado aquellas respuestas que razonan de acuerdo con el marco teórico. Esto implica un análisis del modo en el que se han construido los sucesos (1) y (2). Así pues, se debe observar que (2) es más restrictivo que (1), es decir, $(2) \subset (1)$, con lo cual $p(2) \leq p(1)$. Sin embargo, el número de respuestas (16.7%) se puede considerar muy bajo.

Más de las tres cuartas partes del total de respuestas se encuentran en la categoría "heurística de representatividad". En esta categoría, las explicaciones estiman la mayor o menor probabilidad de que cierto elemento C pertenezca a cierta población S atendiendo solamente a la experiencia personal acerca de las características de C y de S, sin ningún intento de análisis formal y al margen del marco teórico explicado en clase. Así, se razona que es más probable el suceso (2), porque el perfil de "persona joven, soltera, abierta, brillante, universitaria y muy interesada en las cuestiones sociales" usualmente encaja en el de "persona miembro de una ONG". Un ejemplo de este tipo de respuesta es el siguiente:

> *[Óscar, indica que (2) es la más probable]* No es que sea más probable, sino que es la más lógica, porque si le interesan las cosas sociales una ONG sería interesante para él. Depende también si le importan esas cuestiones lo suficiente como para luchar y defenderlas.

Sin embargo, esto no significa que los estudiantes no conozcan la teoría, puesto que cuando se les plantea la cuestión en un contexto académico (ítem 4), la gran mayoría de los estudiantes (85%) contesta correctamente. Nótese que la situación planteada en el ítem 4 es, desde el punto de vista formal, similar a la del ítem 3, puesto que se trata de comparar las probabilidades de los sucesos A y $A \cap B$. Sin embargo, los contextos respectivos son bien distintos. Ahora debe razonarse de modo abstracto acerca de las probabilidades de A y de $A \cap B$. El objetivo de este ítem 4 era profundizar en el uso de la heurística de representatividad, mostrando precisamente que el alumno puede ser capaz de razonar en términos formales cuando se elimina del enunciado el componente que sugiere emplear la experiencia personal acerca de los perfiles de individuos y poblaciones. Esto implicaría que la dificultad de aprendizaje no se sitúa en este caso en la parte puramente operativa, sino en la interpretación de un enunciado desde el punto de vista probabilístico, y en los ejercicios de abstracción y análisis.

En el ítem 5 se identifican los sucesos objeto de estudio y el alumno debe indicar cuál de los dos sucesos es más probable, así como explicar su razonamiento. El primer objetivo de este ítem es detectar si el alumno concibe la probabilidad

Cuadro 6 Porcentajes de respuesta en el ítem 5

Categoría de respuesta	% de respuestas (N = 75)
Respuesta correcta	30.7
Heurística de accesibilidad	28
Sesgo de la equiprobabilidad	32
Respuesta incodificable	5.3
En blanco	4

de un suceso según lo fácil que resulte generar ejemplos en los que tal suceso se cumple. El segundo, detectar la creencia irreflexiva en la equiprobabilidad cuando se intenta aplicar el procedimiento normativo necesario para el cálculo de la probabilidad de un suceso. Los resultados obtenidos aparecen en el cuadro 6.

En la categoría "respuesta correcta" se han agrupado aquellas respuestas que marcan (d) y explican que no se conoce el número de palabras que existe de cada tipo. También se considera correcta si indica que podría estimarse la probabilidad extrayendo aleatoriamente un gran número de palabras. Sin embargo, casi un tercio de las respuestas (28%) estima la probabilidad de un suceso según lo fácil que resulte generar o alcanzar ejemplos en los que tal suceso se cumple o de recordar situaciones en las que se cumplió (heurística de accesibilidad). La forma de razonar que se encuentra en estas explicaciones está fuera del marco teórico y no se plantea el análisis formal del fenómeno aleatorio. Un ejemplo de este tipo de respuesta es:

> *[Juan marca la respuesta a]*: Es más que nada pura lógica, puesto que es más probable que esté en la primera letra porque se puede coger en el diccionario las palabras que empiezan por R, que seguramente son muchas más que las que tienen R en la tercera posición.

Existe otro tercio de respuestas que tratan de analizar el problema dentro del marco teórico explicado en clase, pero señalan que al ser dos las posibilidades que pueden ser obtenidas de manera aleatoria (la R en primera o en tercera posición), ambas deben contar con la misma probabilidad de ocurrencia. En consecuencia, la respuesta elegida típicamente será (c). He aquí algunos ejemplos de este tipo de respuesta:

[María marca la respuesta c]: Las variaciones que se pueden hacer en el resto de espacios libres es la misma.

[Jesús marca la respuesta c]: Buscando una palabra en el diccionario creo que la probabilidad de que salga la R en la primera o en la tercera es igual.

Los resultados obtenidos en el ítem 6 fueron coherentes con los de los ítems previos. En este caso no se trata de estimar una probabilidad, sino de evaluar el número de posibilidades (8^3 para el primero y 2^9 para el segundo, por tanto 512 para ambos esquemas), y en un contexto más próximo a un ejercicio académico. Probablemente por ello el número de respuestas correctas aumenta levemente hasta 38%. Sin embargo, nos encontramos con un 31% de respuestas que se encuentran en la categoría "heurística de accesibilidad", porque estiman el número de trayectorias atendiendo al aspecto de ambas figuras, y otro 30% se reparte entre errores procedimentales cometidos al tratar de calcular el número de trayectorias y respuestas inclasificables.

Los resultados obtenidos en los ítems 3 a 6 apoyan, en nuestra opinión, la hipótesis de que los estudiantes tienen dificultades cuando se consideran situaciones problemáticas reales y su modelización. Parece ser típico por parte de los estudiantes definir de un modo ingenuo grados subjetivos de probabilidad, en vez de construir un modelo formal y obtener conclusiones basadas en él. Esta tendencia se hace aún más patente en un contexto "personal" relativo a la experiencia cotidiana, a las cualidades personales, etc. En estos casos, toman decisiones confiando sólo en su subjetiva, natural y, a menudo evidentemente incorrecta, intuición probabilística.

Las situaciones problemáticas 2 y 3 para entrevista personal se han construido para profundizar en las explicaciones del alumno en torno a la creencia de que una secuencia aleatoria que muestre algún tipo de simetría fácilmente reconocible es menos probable que otra del mismo tamaño, pero en la que no se aprecie simetría alguna. Esta creencia, como se ha visto, puede explicarse en términos de la utilización de una heurística de accesibilidad. Para la situación 2, el alumno debe indicar, en primer lugar, cuál de los números propuestos cree que tiene la menor probabilidad de aparecer y cuál tiene la mayor probabilidad, explicando cuál criterio ha seguido para estimar la ordenación de las tres probabilidades. A continuación, el profesor pide al alumno que calcule la probabilidad de cada número y que explique la discrepancia entre ambos resultados, si existe. Finalmente, el profesor pide al alumno que explique si considera diferentes la situación planteada y la siguiente: se tiene un bombo con las 100 000 bolas numeradas y se trata de sacar una sola bola al azar.

Veamos algunos resultados:

Fragmento de entrevista correspondiente a la situación problemática 2

Itziar.- *[Ha elegido el número 83056 como más probable]* Me fío más del aspecto.

Entrevistador.- ¿Por qué eliges el 83056?

I.- Hay muchos más números que no van seguidos, que los números que van seguidos. O sea, tengo 12345, 23456, así, x números. Pero de los que no van seguidos hay muchísimos más.

Fragmento de entrevista correspondiente a la situación problemática 2

Fernando.- Elegiría el último.

Entrevistador.- Vamos a hablar de tus razones. ¿Por qué ese número?

F.- El primero lo descarto porque si la primera bola es un dos, para que luego te vuelva a salir el mismo número... En el 83056 no se repite ninguno.

E.- Pero devuelves la bola. Posible sí es el 22211.

F.- Sí, pero la probabilidad de volver a repetir el mismo número es mínima.

E.- ¿Y el número 12345?

F.- Lo mismo, de que salgan ordenados. La probabilidad de que te salgan los números continuados es bastante mínima. Igual que 54321, que salgan los cinco números ordenados sería bastante difícil.

E.- ¿Y si tuvieras que elegir el 22222 o el 35131?

F.- Yo escogería el 35131, pero hay la misma probabilidad de que salga uno que otro, porque tú los devuelves.

E.- ¿En qué quedamos entonces? ¿Por qué esa predilección sin dudar hacia el 35131? ¿Por qué dices que es menos probable el 22222 que ese otro que has elegido?

F.- Es que tienen la misma probabilidad, porque los devuelves.

E.- Entonces, ¿por qué has ido directamente al 83056, como una flecha? Dijiste que nada de repetidos ni ordenados.

F.- Porque una cosa es sacar algo y devolverlo, y otra sacar algo, devolverlo y que se repita u ordenado.

E.- Pero, ¿tienen o no la misma probabilidad?

F.- Teóricamente sí.

E.- Teóricamente. ¿Hay entonces una diferencia entre lo que dice la teoría de la probabilidad y después la frecuencia con que salen los números?

F.- No es eso. Los tres tienen la misma probabilidad de salir, pero aquí ya tendrías que tener en cuenta el orden *[señala 12345]* y aquí si se repite o no *[22211]*.

E.- Pero observa que te pido que apuestes justamente por el número 12345, no por todas las posibles formas de permutar sus dígitos. Por el número 83056, no por las posibles ordenaciones de esos dígitos. Ese número, ese orden.

F.- Una vez que ha salido el 123, la probabilidad sería menor porque ya tendría que ser el siguiente, el 4.

E.- ¿Hay o no hay una diferencia entre el 12345 y el 22211?

F.- Los dos tienen la misma probabilidad.

E.- ¿Por cuál apostarías?

F.- Por el último *[83056]*. Me parece más lógico, ya sería mucha casualidad que se repitieran los tres.

Ningún alumno entrevistado recurrió en un principio a un análisis formal, sino que directamente consideran todos ellos menos probable un número que muestra alguna pauta. Se detecta también la dificultad apuntada para distinguir entre un resultado específico y todo un conjunto de sucesos. Itziar, por ejemplo, argumenta con el suceso "dígitos no seguidos". Este resultado es convergente con los estudios de Shaughnessy (1981), Green (1982), Borovcnik y Bentz (1991) y Muñoz (1998), que muestran la dificultad de muchos individuos para diferenciar entre un resultado específico y todo un conjunto de resultados agrupados bajo cierta característica. Nótese también en la entrevista a Fernando, la tensión que mantienen los diferentes criterios de decisión. Por una parte el criterio formal, que el alumno es capaz de aplicar ("Los tres tienen la misma probabilidad de salir", "Teóricamente sí", "Los dos tienen la misma probabilidad"). Por otra, su intuición acerca de lo poco probable que es el obtener el número repetido. Sin embargo, la tensión se resuelve siempre en favor de criterios no probabilísticos, criterios intuitivos equivocados.

Finalmente, veamos un fragmento posterior de la entrevista a Fernando, en la que el profesor le pide considerar la extracción al azar de un número de cinco dígitos:

Fragmento de entrevista correspondiente a la situación problemática 2

Entrevistador.- Ahora piensa en un bombo con los 100 000 números. Sacas uno. ¿Ves alguna diferencia respecto a nuestro bombo con diez bolas?

Fernando- Sí, sí, sí. Sí, porque el número 22211 en ese bombo ya está construido. Sin embargo, construirlo ya no es lo mismo. Una vez que está construido es muchísimo más fácil que te salga.

E.- Y en cuanto a la probabilidad de cada número, ¿crees que hay diferencia?

F.- Sí, hay diferencia. Si ya están construidos, la probabilidad de que salga éste, éste o éste es la misma *[señala los tres números propuestos, 22211, 12345 y 83056]*.

E.- Vamos a analizarlo probabilísticamente. En el primer bombo, sobre diez números eliges cinco, pudiendo repetir. ¿De cuántas formas puedes hacer la elección?

F.- $VR10, 5 = 10^5 = 100\ 000$.

E.- Así pues, cada número ¿qué probabilidad tiene?

F.- 1/100 000.

E.- Bien. Vayamos ahora al bombo con los 100 000 números, del 0 al 99 999.

F.- Tienen la misma...

E.- ¿Es o no la misma situación?

F.- *[Desconcertado]* Sí... pero es más fácil cuando el número está ya formado...

Obsérvese que ahora, con los 100 000 números "ya construidos", Fernando acepta la equiprobabilidad de todos ellos. Sin embargo, cuando el análisis formal que él mismo es capaz de realizar concluye que ambas situaciones problemáticas son idénticas, prefiere confiar más en sus ideas informales.

En la situación 3 se ha previsto una estructuración similar para la entrevista. Se muestran al alumno los caracteres 🗁🗎🗏🗐🗄 que no cuentan con una ordenación convencional. Era de esperar que los alumnos no mostraran ahora preferencia por ninguna ordenación específica, y así ocurrió con todos ellos. Veamos un fragmento de entrevista, típico de todas ellas:

Fragmento de entrevista correspondiente a la situación problemática 3

Itziar.- Creo que la segunda ordenación es más probable que la primera.

Entrevistador.- ¿Por qué?

I.- Porque en la primera me está saliendo el mismo orden que el que tenía al principio.

E.- Vale. Ahora olvida el orden del principio. Te muestro las cinco tarjetas sin fijarnos en qué orden te las muestro. Luego las barajo. A continuación te pregunto, de entre estas dos posibles ordenaciones, ¿cuál es la más probable?.

I.- Tienen la misma probabilidad.

E.- Antes te parecía extraño que salieran los números seguidos 1, 2, 3, 4, 5. Ahora respondes enseguida que todas las ordenaciones tienen la misma probabilidad. Entonces, ¿qué diferencia hay entre la situación de antes y la de ahora?

I.- Aquí no hay nada numerado.

E.- Imagina que en vez de los símbolos tengo las cinco tarjetas numeradas. Piensa en la posibilidad de que salga justamente la ordenación 1-2-3-4-5. ¿Apostarías por este orden?

I.- No.

E.- ¿Crees que es poco probable frente a otra disposición “desordenada”?

I.- Sí.

E.- Y si coloco esos caracteres extraños, te da igual una ordenación que otra.

I.- Sí.

Como puede observarse, Itziar aprecia correctamente equiprobabilidad en todas las posibles ordenaciones de los caracteres. Ahora bien, al principio de la entrevista explica que la primera de las posibles ordenaciones es la menos probable “porque en la primera me está saliendo el mismo orden que el que tenía al principio”. Según esta alumna, la probabilidad de una ordenación específica estaría influida por un resultado previo, de modo que no estaría comprendiendo el concepto de independencia probabilística. Una vez reformulada la pregunta, como era de esperar, Itziar no muestra predilección por ninguna de las posibles ordenaciones. Sus explicaciones muestran claramente que la probabilidad de una ordenación específica depende sólo del número de elementos por ordenar. De hecho, en otro punto anterior de la entrevista fue capaz de calcular la probabilidad de cada una de ellas (1/5!). Ahora bien, si en vez de los caracteres no convencionales 🗁🗎🗏🗐🗄 las tarjetas llevaran impresos los caracteres 1, 2, 3, 4, 5, según Itziar la probabilidad de una secuencia específica cambiaría. La alumna había ya explicitado cuál es el argumento que emplea para decidir acerca de la verosimilitud de una u otra ordenación: la presencia de un orden convencional.

CONCLUSIONES

Este estudio ha tenido como objetivo principal analizar las formas de razonamiento utilizadas por un grupo de estudiantes universitarios, su clasificación en categorías explicatorias y la distinción de esquemas mentales a fin de obtener información acerca de cómo construyen su conocimiento probabilístico. Se observa una clara convergencia entre los resultados de este trabajo con estudiantes universitarios y los de otras investigaciones del área en enseñanza secundaria. Sin embargo, también existen algunas diferencias que ya hemos comentado en el apartado anterior.

De los resultados obtenidos podemos deducir que la mayoría de los estudiantes presenta tras su formación ideas alternativas a las formales acerca del modo de estimar la probabilidad. Por tanto, esta mayoría de estudiantes dispone de un conocimiento instrumental de la probabilidad, más que de una comprensión relacional en el sentido de Skemp (1976), necesario para aplicar el conocimiento probabilístico en la práctica. Es de resaltar que una gran parte de los alumnos contesta correctamente cuando se trata de aplicar un procedimiento memorístico a una cuestión similar a las realizadas en clase. Sin embargo, el objetivo de nuestros diseños ha sido analizar las respuestas de los alumnos cuando les son planteadas situaciones de alta demanda cognitiva y, en este sentido, se produce un alto fracaso que indica un aprendizaje sin comprensión de los conceptos y procedimientos. En estas situaciones probabilísticas reales, a menudo los alumnos son incapaces de construir un modelo teórico. La formación de competencia en la construcción de modelos probabilísticos está conectada con el estilo de enseñanza, pero un curso formal tradicional de probabilidad da al estudiante escasas oportunidades para construir de manera adecuada la mayoría de las competencias probabilísticas fundamentales. Esta opinión ya fue expresada por Freudenthal mucho tiempo atrás (Freudenthal, 1973), pero sigue estando vigente (véase, por ejemplo, Lakoma, 2000).

Cuando se trata de un contexto cotidiano no académico, a la hora de juzgar la verosimilitud de un suceso, una amplia mayoría de alumnos acude a una concepción subjetiva de lo que es representativo de una población, sin ningún intento de análisis formal (77% en el ítem 3 y situaciones problemáticas 2 y 3). Sin embargo, ante un enunciado de carácter teórico, alejado del contexto "personal" de experiencia cotidiana, los alumnos pueden ser capaces de razonar también en términos formales (85% en el ítem 4). Por otra parte, un porcentaje significativo de los alumnos (28% en el ítem 5 y 31% en el ítem 6) hace uso de una heurística de accesibilidad para tomar una decisión acerca de la verosimilitud de un suceso, sin que de nuevo se aprecie intento alguno de explicación dentro del marco de la teoría de la probabilidad explicado en clase. Finalmente, una parte importante de alumnos extiende el modelo de "mismas posibilidades" y busca simetrías en las situaciones aleatorias (52% en el ítem 1, 34% en el ítem 2 y 32% en el ítem 5 y situación problemática 1). Esta vía de pensamiento parece ser típica y está conectada con una carencia en competencias en modelización.

Se ha encontrado que sólo una minoría de estudiantes universitarios analiza los fenómenos aleatorios propuestos desde un punto de vista formal de la teoría de la probabilidad y utiliza correctamente los procedimientos necesarios para el cálculo de la probabilidad de un suceso. Se supone que en este grupo tendría que encontrarse la mayoría de los estudiantes universitarios después de seguir varios cursos de estadística en secundaria y el curso riguroso de introducción a la teoría de la probabilidad en la universidad. Sin embargo, los resultados obtenidos muestran otra realidad diferente. Parecen existir serias dificultades de aprendizaje en el campo de los procedimientos normativos necesarios para calcular la probabilidad de un suceso, hasta el punto de que tales procedimientos se ven de hecho desplazados por criterios de decisión intuitivos erróneos. Ciertamente, muchas de las situaciones planteadas a los estudiantes en esta investigación son muy próximas a las de la vida real e incluso personales. En consecuencia, podría no ser sorprendente que los estudiantes utilicen vías subjetivas de razonamiento para dar respuestas concretas, en vez de un análisis probabilístico formal. Sin embargo, debe recordarse que los estudiantes investigados han recibido un curso universitario sobre teoría de la probabilidad, y que aprender consiste también en distinguir contextos, en abstraer y en reconocer conceptos. En este sentido, los resultados obtenidos muestran la debilidad del aprendizaje logrado.

Los resultados coinciden con los de otros estudios que cuentan con los mismos objetivos y apuntan a que el desarrollo de los estudiantes depende del estilo y la puesta en escena de la enseñanza más que de la edad de éstos. Existe un profunda necesidad de mejorar el estilo de enseñanza de la probabilidad y la estadística, a fin de dar a los estudiantes una oportunidad para formar conceptos y competencias de un modo apropiado.

Los resultados obtenidos nos llevan a afirmar que los fenómenos aleatorios no presentan explicaciones "naturales" ni sencillas de dar y que no constituyen fenómenos elementales que se pueden impartir de manera rápida sin detenerse a analizarlos de acuerdo con una teoría que ocupó a los matemáticos durante tres siglos. Así pues, el conocimiento de las categorías explicativas nos puede ayudar a diseñar materiales y estrategias de enseñanza capaces de facilitar un cambio conceptual, ontológico y metodológico. Éste será el objetivo de nuestros próximos trabajos.

ANEXO 1. CUESTIONARIO ESCRITO

Ítem 1. Un agente de bolsa ha comprado acciones de tres empresas. ¿Cuál es la probabilidad de que en el transcurso de un mes suban las acciones de al menos dos de las tres empresas?

a) La probabilidad es 1/2 *b)* La probabilidad es 3/8
c) La probabilidad es: *d)* No puedo calcular la probabilidad

Por favor, razona tu respuesta.

Item 2. El semáforo que regula el tráfico en cierto cruce puede encontrarse en uno de los cuatro estados siguientes: ROJO, VERDE, ÁMBAR FIJO O ÁMBAR INTERMITENTE.

¿Cual es la probabilidad de que en un instante determinado el estado del semáforo sea ROJO O VERDE?

a) La probabilidad es 0.5 *b)* La probabilidad es 0.75 *c)* La probabilidad es:

Ítem 3. R. M. es una persona joven, soltera, abierta, brillante, universitaria y muy interesada en las cuestiones sociales. ¿Cuál de las situaciones (1) o (2) te parece más probable?

(1) R. M. trabaja en un banco.
(2) R. M. trabaja en un banco y es miembro de una ONG (organización no gubernamental).

a) La situación (1) es la más probable
b) La situación (2) es la más probable
c) Ambas situaciones tienen la misma probabilidad
d) Otra respuesta

Por favor, razona tu respuesta (tomado de referencias).

Ítem 4. Sean A y B dos sucesos. Razona si la siguiente relación es cierta:
$p(A \cap B) \leq p(A)$

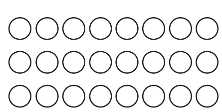
Ítem 5. Tomemos aleatoriamente del diccionario una palabra que contenga una vez la letra R ya sea en su primera o en su tercera posición. Elige una respuesta:

a) Es más probable que la R se encuentre en la primera posición.
b) Es más probable que la R se encuentre en la tercera posición.
c) Es tan probable que la R se encuentre en primera posición como que se encuentre en la tercera.
d) No puedo determinar cuál de las posiciones de la R, primera o tercera, es más probable.

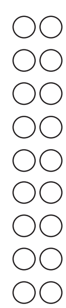
Por favor, razona tu respuesta (tomado de referencias).

Ítem 6. Observa los esquemas (1) y (2), formados por varias filas de círculos. En cada esquema se trata de pasar de un círculo cualquiera de la primera fila a un círculo cualquiera de la última fila, de tal modo que desde un círculo sólo puede saltarse a otro cualquiera pero que esté en la fila inmediatamente inferior.

Esquema 1

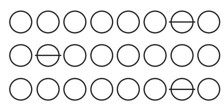


Esquema 2

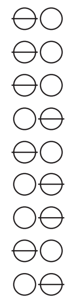


Éstos son ejemplos de posibles trayectorias:

Ejemplo de posible trayectoria en el esquema (1)



Ejemplo de posible trayectoria en el esquema (2)



La cuestión es, ¿en cuál de los dos esquemas (1) o (2) hay más formas posibles de efectuar el trayecto?

a) En el esquema (1).

b) En el esquema (2).

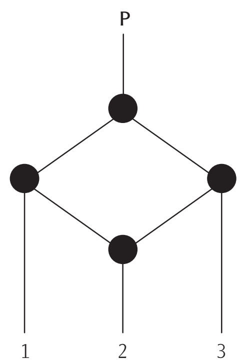
c) Existe igual número de formas en ambos esquemas.

Por favor, razona tu respuesta (tomado de referencias).

ANEXO 2. SITUACIONES PROBLEMÁTICAS PARA ENTREVISTAS

Situación 1. Observa la figura de abajo. Supongamos que un paseante parte del punto P y piensa llegar hasta alguno de los puntos (1), (2) o (3), pero no tiene decidido cuál será su destino. Lo decidirá sobre la marcha, según llegue a cada cruce. El paseante siempre camina hacia adelante, nunca retrocede.

Se trata de que calcules la probabilidad de que el paseante termine su paseo en cada uno de esos tres puntos.



Situación 2. Supongamos que tenemos un bombo con diez bolas numeradas, del 0 al 9. Agitamos el bombo, sacamos una bola, anotamos su número y luego la devolvemos al bombo. Hacemos la misma operación cinco veces. Piensa en estos tres resultados posibles: 22211, 12345 y 83056. ¿Cuál de ellos te parece más probable? ¿Cuál el menos probable?

Supongamos ahora que tenemos un bombo con 100 000 bolas numeradas y que se trata de sacar una sola bola al azar. ¿Se trata de la misma situación?

Situación 3. Supongamos que tenemos las cinco tarjetas siguientes

Las ordenamos aleatoriamente. ¿Qué ordenación te parece más probable, la 🗁🗎🗏🗐🗄 o la 🗎🗏🗄🗐🗁?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahlgren, A. y J. Garfield (1991), "Analysis of the Probability Curriculum", en R. Kapadia y M. Borovcnik (eds.), *Chance Encounters: Probability in Education*, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, pp. 107-134.

Batanero, C. (2000), "¿Hacia dónde va la educación estadística?", *Blaix*, núm. 15, pp. 2-13.

Batanero, C., V. Navarro-Pelayo y J. Godino (1997), "Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 32, núm. 2, pp. 181-199.

Borovcnik, M., H. J. Bentz y R. Kapadia (1991), "A Probabilistic Perspective", en R. Kapadia y M. Borovcnik (eds.), *Chance Encounters: Probability in Education*, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, pp. 27-70.

Borovcnik, M. y H. J. Bentz (1991), "Empirical Research in Understanding Probability", en R. Kapadia y M. Borovcnik (eds.), *Chance Encounters: Probability in Education*, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, pp. 73-105.

Borovcnik, M. y R. Peard (1996), "Probability", en A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, pp. 239-287.

Díaz, J., C. Batanero y Ma. J. Cañizares (1996), *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis.

Fischbein, F. (1975), *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*, Dordrech, Reidel.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht, Reidel.

Gómez, P. y P. I. Perry (1996) (eds), *La problemática de las matemáticas escolares*, Mexico, Iberoamericana.

Green, D. R. (1982), *Probability Concepts in 11-16 Year Old Pupils*, Report, Loughborough University of Technology.

Grupo Azarquiel (1996), *Proyecto Azarquiel Matemáticas*, Madrid, Ediciones de la Torre.

Guisasola, J. y J. I. Barragués (1999), "Dificultades de aprendizaje de conceptos relativos al azar y la probabilidad en estudiantes de Ingeniería Técnica Industrial", en *Seminario Interfacultades sobre Enseñanza-Aprendizaje de la Estadística*, San Sebastián, Servicio de Publicaciones de la EUITI.

Hirsch, L. S. y A. M. O'Donnell (2001), "Representativeness in Statistical Reasoning: Identifying and Assessing Misconceptions", *Journal of Statistics Education*, vol. 9, núm. 2.

Kahneman, D. y A. Tversky (1972), "Subjective Probability: A Judgment of Representativeness", *Cognitive Psychology*, pp. 430-454.

Kahneman, D., P. Slovic y A. Tversky (1982), *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Nueva York, Cambridge University Press.

Kapadia, R. (1984), *Children's Intuitions and Conceptions of Probability*, Londres, Polytechnic of the South Bank.

Kapadia, R. y M. Borovcnik (1991), *Chance Encounters: Probability in Education*, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers.

Konold, C. (1991), "Understanding Student's Beliefs About Probability", en E. V. Glasersfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer, pp. 139-156.

Lakoma, E. (2000), "Integrating History: Research Perspectives, Stochastics Teaching and Cognitive Development", en J. Fauvel y J. Van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education, The ICMI Study*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Lecoutre, M. P. (1985), "Effect d'informations de nature combinatoire et de nature frécuentielle sur le judgements probabilistes", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 6, pp. 193-213.

—— (1992), "Cognitive Models and Problem Spaces in Purely Random Situations", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 23, pp. 557-568.

Lecoutre, M. P. y J. L. Durand (1988), "Jugéments probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 19, pp. 357-368.

Lecoutre, M. P. y J. Cordier (1990), "Effect du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves", *Bulletin de l'APMEP*, núm. 372, pp. 9-22.

Muñoz, A. (1998), "Algunas ideas preconcebidas sobre probabilidad", *Suma*, núm. 29, pp. 29-34.

Paulos, J. A. (1995), "Bosnia: ¿Vietnam o la segunda Guerra Mundial? Disponibilidad psicológica y efecto ancla", en *Un matemático lee el periódico*, Barcelona, Tusquets, pp. 31-36.

Pozo, J. I. (1999), "Más allá del cambio conceptual: el aprendizaje de la ciencia como cambio representacional", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 17, núm. 3, pp. 513-520.

Sáenz, C. (1998), "Teaching Probability for Conceptual Change", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 35, núm. 3, pp. 233-254.

Scholz, R. W. (1991), "Psychological Research in Probabilistic Understanding", en R. Kapadia y M. Borovcnik (eds.), *Chance Encounters: Probability in Education*, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, pp. 213-253.

Serrano, L., C. Batanero y J. J. Ortíz (1996), "Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato" *Suma*, núm. 22, pp. 43-49.

Serrano, L., C. Batanero, J. J. Ortíz y M. J. Cañizares (1998), "Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria", *Educación Matemática*, núm. 22, pp. 7-25.

Shaughnessy, J. M. (1981), "Misconceptions of Probability: From Systematic Errors to Systematic Experiments and Decisions", en A. P. Shulte y J. R. Smart (eds.), *Teaching Statistics and Probability*, Reston, NCTM.

Skemp, R. (1976), "Relational and Instrumental Understanding in the Learning of Mathematics", *Mathematics Teaching*, núm. 77.

Stewart, I. (1998), "Una ramera llamada fortuna", en Stewart, *De aquí al infinito*, Barcelona, Drakontos, pp. 181-195.

White, R. y R. Gunstone (1992), *Probing Understanding*, Londres, The Palmer Press.

DATOS DE LOS AUTORES

José Ignacio Barragués

Departamento de Matemática Aplicada, Escuela Universitaria Politécnica de San Sebastián, España

mapbafuj@sp.ehu.es

Jenaro Gisasola

Departamento de Física Aplicada I, Universidad del País Vasco, España

wupguarj@sp.ehu.es

Adolfo Morais

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad del País Vasco, España

mapmoeza@sp.ehu.es

www.santillana.com.mx/educacionmatematica