Inducción y formalización en la enseñanza de las transformaciones rígidas en entorno Cabri

Liliana Siñeriz y Raquel Santinelli

Resumen: En este artículo se presenta una propuesta metodológica para la enseñanza de las transformaciones rígidas (isometrías) del plano, dirigida a docentes de enseñanza media y alumnos del profesorado de matemáticas, mediante la utilización didáctica del programa Cabri Géomètre II. Las actividades y sugerencias apuntan a la adquisición de un sólido conocimiento disciplinar y a la puesta en juego de procesos matemáticos, a través de situaciones que propician la retroalimentación entre las instancias inductivas y la formalización matemática.

Palabras clave: isometrías, enseñanza, Cabri Géomètre, procesos matemáticos.

Abstract: This article presents a methodological proposal for teaching plane isometries by making didactical use of Cabri Géomètre II. It is oriented to secondary teachers and universitary students of mathematics teaching. The activities and suggestions focus on the acquisition of solid disciplinary knowledge and emphasize mathematical processes, through situations which establish feedback between inductive exploration and mathematical formalization.

Keywords: isometries, teaching, Cabri Géomètre, mathematical processes.

INTRODUCCIÓN

Las transformaciones rígidas poseen una enorme variedad de aplicaciones, tanto dentro de la matemática como fuera de ella. Por ejemplo, es muy conocida su utilización en el diseño de embaldosados y frisos, en el arte de los mosaicos árabes y en la obra del artista holandés M. C. Escher. Por su importancia cultural y formativa, estas transformaciones están incluidas en los contenidos curriculares de la escuela media y parece adecuado estimular su estudio con la introducción de nuevos recursos tecnológicos.

Fecha de recepción: 24 de agosto de 2004.

En este sentido, el programa interactivo Cabri Géomètre II permite, mediante una adecuada utilización de instancias inductivas de exploración, enunciar los axiomas de la teoría de las transformaciones rígidas y realizar formalizaciones propias de la matemática.

En este artículo, presentaremos una secuencia de actividades organizadas dentro de un marco metodológico y procedimental adecuado al quehacer matemático, el cual incluye la presentación de las transformaciones rígidas, exploración de sus propiedades y caracterizaciones, estudio de composiciones de dos o más transformaciones rígidas, identificación de una transformación rígida a partir del análisis de pares segmento orientado-semiplano y sus homólogos, sistematización y síntesis de resultados a partir del examen exhaustivo de casos y, finalmente, clasificación de las transformaciones rígidas.

La metodología para desarrollar las actividades que componen la secuencia requiere inicialmente sólo conocimientos intuitivos acerca de la simetría, la rotación y la traslación. A partir de estos conocimientos y a través de la exploración, la conjetura y la verificación en el entorno informático provisto, se irán introduciendo paulatinamente las correspondientes formalizaciones matemáticas de los conceptos involucrados. El enfoque que proponemos pretende, además, la explicitación progresiva de la axiomática subyacente y apunta a desarrollar un trabajo de formación disciplinar dirigida a profesores de secundaria y a estudiantes del profesorado en matemáticas.

PROPUESTA METODOLÓGICA

En un primer acercamiento a Cabri Géomètre, se hace necesario prever un espacio inicial para la presentación de los comandos que se utilizan con más frecuencia. Luego, y en vías de focalizar la temática que es objeto de estudio, parece adecuado explorar el funcionamiento de las transformaciones rígidas provistas por el software, facilitando el examen de los efectos globales de éstas. El programa permite modificar figuras, mover vectores, cambiar su dirección, módulo y sentido, mover rectas, cambiar amplitud de ángulos, redefinir la relación de dependencia entre un punto y una figura, etc. Por consiguiente, se pueden visualizar muchas situaciones a partir de una misma configuración creada en la pantalla, lo que favorece los procesos de conjetura y verificación.

Según la versión de Cabri II[1] que utilizamos, las transformaciones rígidas vie-

[1] *Cabri Géomètre II. El cuaderno de Geometría interactiva,* de Jean-Marie Laborde y Franck

nen acompañadas por comentarios de ayuda que explicitan los elementos iniciales necesarios para obtener la imagen de un objeto. Estos elementos son los que caracterizan a cada una de estas transformaciones (respectivamente un eje, un centro y un ángulo, un centro, un vector o un eje y un vector paralelo a éste). Según con estas consideraciones, la primera actividad puede ser del siguiente tenor:

Actividad 1. *a)* Seleccionar una transformación del menú. Mediante F1 abrir la ventana del comentario de ayuda correspondiente y crear en pantalla los elementos requeridos (objeto y elementos característicos). Aplicar esta transformación rígida y explorar sus efectos modificando alternativamente el objeto y los elementos característicos. Proceder análogamente con las restantes transformaciones.

b) Aplicar a un mismo objeto las transformaciones vistas, a fin de comparar los efectos globales de cada una y observar las diferencias.

La reflexión deslizante, transformación que construye la imagen especular y trasladada de un objeto respecto de un eje y un vector paralelo a éste, no figura en el menú, y se incluye en este trabajo para aprovechar la estructura de grupo de las transformaciones rígidas. La incorporación al menú a través de una macro se hace al iniciar el estudio de las transformaciones siguiendo este procedimiento:

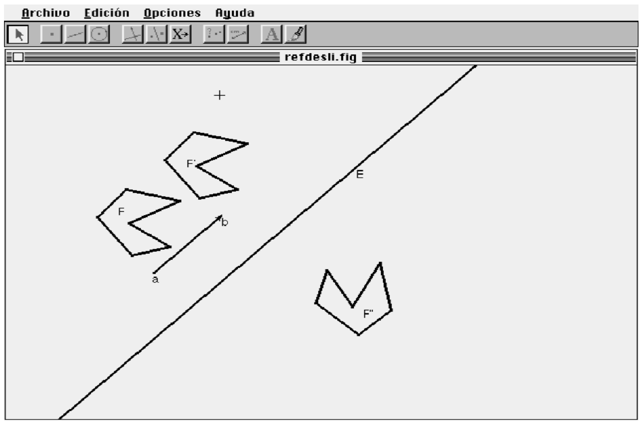
1. Crear un polígono F, un vector $\overrightarrow{ab}$ y un eje E paralelo a dicho vector. Hallar la imagen F" del polígono, que resulta de efectuar la composición S_E o T_{ab} (figura 1).
2. Ir al menú correspondiente a las macros, definir los objetos iniciales (polígono, vector y eje) y el objeto final (polígono resultante). Por último, definir la macro (llamarla REFDESLI).

Luego, con el propósito de estudiar propiedades, se sugiere la siguiente actividad:

Actividad 2. Crear un polígono, aplicar una transformación rígida y estudiar sus propiedades (investigar preservación de orientación, si posee o no puntos fijos, posiciones relativas de rectas homólogas, transformación inversa). Proceder análogamente con las restantes transformaciones.

Bellemain, Versión 1.0 MS-DOS© 1988-1996 IMAG-CNRS-UJF. Cabri Géomètre II es una marca registrada de Université Joseph Fourier.

Figura 1



A partir de la discusión grupal de resultados, se pueden establecer propiedades que poseen en común las transformaciones y propiedades particulares, lo cual permite enunciar algunos axiomas y definir constructivamente las transformaciones.

Con respecto a las propiedades comunes, el software permite observar fácilmente que las transformaciones rígidas llevan rectas en rectas y semirrectas en semirrectas, un determinado semiplano limitado por una semirrecta en un determinado semiplano limitado por su homóloga, y que se preserva la forma y el tamaño entre figuras homólogas. Con estas observaciones, de alguna manera quedarían sugeridos los axiomas de alineación, ordenamiento y rigidez, comunes a todas las transformaciones rígidas.

Otra propiedad común de estas transformaciones es que cada una de ellas tiene una inversa. La exploración llevará a conjeturar y verificar que en cada caso la inversa de una transformación rígida es una transformación rígida del mismo tipo, por ejemplo, la inversa de una simetría axial es una simetría axial, la inversa de una rotación es una rotación, etc. Aunque se pueden sacar conclusiones sólo de las transformaciones rígidas trabajadas, la intuición nos permite prever la posibilidad de que existan otras transformaciones rígidas diferentes y que sus inversas sean transformaciones rígidas. Esto sugiere la consideración del axioma relativo a una transformación rígida y su inversa.

Este trabajo sobre las propiedades comunes, realizado con una adecuada intervención docente, lleva a establecer formalmente los siguientes axiomas:

Axioma 1. Las transformaciones rígidas son transformaciones biyectivas del plano en sí mismo que satisfacen las propiedades siguientes:

a) si tres puntos a, b, c están en una recta y c está entre a y b, entonces los transformados a', b', c' de a, b y c, respectivamente, están alineados y c' está entre a' y b',

b) si el segmento $\overline{ab}$ se transforma en $\overline{a'b'}$ y $\overline{ab} \subset \overline{a'b'}$ o $\overline{a'b'} \subset \overline{ab}$, entonces $\overline{ab} = \overline{a'b'}$ (se trata del mismo segmento). Análogamente, si el sector angular $a\hat{o}b$ se transforma en el sector angular $a'\hat{o}b'$ y el primero está contenido en el segundo o el segundo en el primero, entonces $a\hat{o}b = a'\hat{o}b'$.

Axioma 2. La inversa de una transformación rígida es transformación rígida.

Otra propiedad importante, y que es útil para identificar una transformación rígida en particular, es la preservación o no de la orientación, para lo cual ha de acordarse la siguiente

Convención: Si la transformación rígida transforma un semiplano que está a la izquierda de una semirrecta en un semiplano que está a la izquierda (derecha) de la semirrecta transformada, decimos que la transformación preserva (o no preserva) la orientación.

Este acuerdo expresa que, para saber si una transformación rígida preserva o no la orientación, es necesario y suficiente conocer la imagen de un par semirrecta-semiplano, o bien, la imagen de un segmento orientado (en el que se especifica origen y extremo) y de uno de los semiplanos que éste determina.

En cuanto a propiedades particulares, se puede investigar, por ejemplo, si la transformación posee o no puntos fijos, posiciones relativas de rectas homólogas y examen de algunos casos particulares, etc. A continuación, se listan algunas de las propiedades de interés que pueden ser descubiertas a partir de la observación y del aprovechamiento de las características dinámicas del software.

Simetría axial

Caracterización: La simetría axial queda caracterizada por el eje.

Notación: S_E

- No preserva orientación

- El eje es mediatriz de puntos homólogos.
- El eje es una recta de puntos fijos. En particular, cualquier semirrecta contenida en el eje es de puntos fijos.
- Si una recta intersecta al eje, su simétrica lo intersecta en el mismo punto y el eje es bisectriz de dos de los ángulos que forman las semirrectas simétricas.
- Las rectas perpendiculares al eje son rectas dobles.
- La inversa de S_E es S_E.

Traslación

Caracterización: La traslación queda caracterizada por un vector.

Notación: $T_{aa¢}$

- Preserva orientación.
- No posee puntos fijos.
- Las rectas que contienen segmentos homólogos son paralelas (coincidentes o no).
- Las rectas paralelas al vector traslación son dobles.
- Los vectores determinados por dos puntos homólogos son equipolentes al vector traslación.
- Una semirrecta de origen a que contiene al vector traslación $\overset{Æ}{aa'}$, tiene como imagen la semirrecta de origen a' que no contiene a a.
- Las mediatrices de los segmentos que unen puntos homólogos son paralelas (coincidentes o no).
- La inversa de $T_{aa'}$ es $T_{a'a}$.

Rotación

Caracterización: La rotación queda caracterizada por el centro y un ángulo orientado.

Notación: $R_{(o,a)}$

- Preserva orientación.
- Tiene un punto fijo (centro de rotación).
- El centro equidista de un punto y su homólogo (el centro pertenece a la mediatriz del segmento que une un punto y su homólogo).

- El centro equidista de una recta y su homóloga (el centro pertenece a la unión de las bisectrices de los ángulos formados por dichas rectas).
- El ángulo determinado por un punto p, el centro o, y el homólogo p', es congruente con el ángulo de rotación y de igual sentido. En particular, la semirrecta $\overrightarrow{op}$ tiene como imagen la semirrecta $\overrightarrow{op'}$.
- La inversa de $R(o, \alpha)$ es $R(o, -\alpha)$.

Simetría central

Caso particular de rotación.

Notación: S_o

- Las rectas que pasan por el centro son dobles. En particular, una semirrecta con origen en o tiene como imagen a la semirrecta opuesta.
- Las rectas que no pasan por el centro tienen como homólogas rectas paralelas a las mismas.
- La inversa de S_o es S_o.

Reflexión deslizante

Caracterización: La reflexión deslizante queda caracterizada por el eje y un vector paralelo a éste.

Notación: $D_{(E,\, T_{ab})}$ (con $E // \overrightarrow{ab}$)

- No preserva orientación.
- No tiene puntos fijos.
- El eje es una recta doble.
- El eje pasa por el punto medio del segmento que une puntos homólogos.
- Si una recta es paralela al eje, su homóloga es paralela al eje.
- Una semirrecta contenida en el eje tiene como imagen otra semirrecta contenida en el eje y el vector que une sus orígenes es equipolente al vector característico.
- La inversa de $D(E, T_{ab})$ es $D(E, T_{ba})$.

La consideración de las propiedades particulares permite orientar la elaboración de las definiciones constructivas de cada una de las transformaciones. Por ejemplo, para el caso de la rotación:

- Dados un punto $o \in \Pi$ y un ángulo orientado α, llamamos *rotación de centro o y ángulo* α a la transformación biyectiva del plano en sí mismo tal que $R_{(o,\alpha)}(p) = p'$ si y sólo si $d(o, p) = d(o, p')$ y $p\hat{o}p' \equiv \alpha$ y de igual signo, $\forall p \in \Pi$.

A continuación, se propone trabajar sobre la composición de dos o más transformaciones rígidas, para lo cual se consideran las cuatro transformaciones y todos los casos diferentes en que se relacionan entre sí sus elementos característicos y se estudia la conmutatividad en cada caso:

1. Composición de una transformación rígida consigo misma
2. Composición de dos traslaciones
3. Composición de dos simetrías axiales
4. Composición de simetría axial con traslación de vector secante al eje
5. Composición de dos rotaciones
6. Composición de traslación con rotación
7. Composición de simetría axial con rotación
8. Composición de dos reflexiones deslizantes
9. Composición de traslación con reflexión deslizante
10. Composición de axial con reflexión deslizante
11. Composición de rotación con reflexión deslizante
12. Composición de tres o más transformaciones rígidas

Para conjeturar la transformación resultante, se focaliza la preservación o no de la orientación y se recurre a la visualización de la posición relativa de los objetos inicial y final. La exploración de las propiedades particulares que se cumplen en cada caso llevará a identificar los elementos característicos; finalmente, se utilizará el programa para verificar la conjetura.

Las potencialidades del software llevan a tratar casos de ejes paralelos y secantes, vectores paralelos, opuestos, perpendiculares, centros de rotación pertenecientes y no pertenecientes a ejes, modificar y medir ángulos y distancias, etc., lo cual facilita el tratamiento de las configuraciones posibles en cada una de las composiciones listadas.

Por ejemplo, al componer simetría axial con rotación, habrá que considerar si el centro pertenece o no pertenece al eje y el trabajo podría orientarse mediante la siguiente consigna:

Actividad 3. *a)* Dada una figura F, un eje E, un centro o perteneciente a dicho eje y un ángulo α, encontrar la transformación resultante de componer $R_{(o,\,\alpha)} \circ S_E$. Caracterizarla a partir de los elementos característicos de las transformaciones componentes. Estudiar la conmutatividad.

b) ¿Cuál es la transformación resultante si el centro o no pertenece al eje E? Caracterizarla.

En el caso (*a*) la visualización global del resultado lleva a conjeturar que se trata de una simetría axial. Su eje E' se puede determinar, utilizando las propiedades estudiadas, mediante los puntos medios de puntos homólogos. La transformación queda caracterizada por el eje E' que pasa por o y forma con E un ángulo igual a $\alpha/2$. Finalmente, se puede verificar este resultado aplicando la simetría $S_{E'}$ al objeto inicial.

Además, se comprueba que la conmutatividad no se cumple, porque el nuevo resultado es una simetría del eje E'' que pasa por o y forma con E un ángulo igual a $-\alpha/2$.

El programa permite economizar esfuerzos para trabajar el ítem (*b*) aprovechando la construcción realizada en (*a*). Para ello, lo indicado es desligar el punto o del eje E mediante la instrucción "redefinir objeto". (Primero se define un punto fuera del eje; luego con la opción "redefinir objeto" se marca el punto o sobre el eje y se arrastra el cursor para elegir en la ventana "transferir objeto" y por último se da un clic sobre el punto fuera del eje previamente definido.)

Intervenciones de esta naturaleza pueden guiar el trabajo en el resto de los casos.

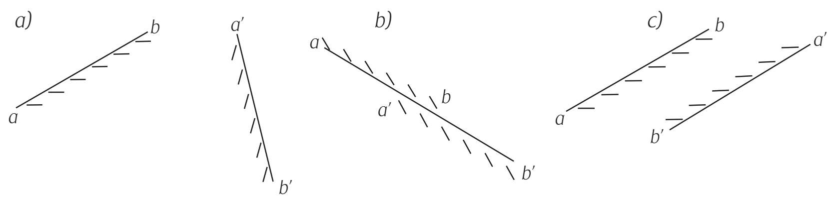
Aunque no se tiene la certeza de haber dejado fuera otras transformaciones rígidas que pudieran existir, el trabajo realizado hasta aquí parece abonar el argumento de que el resultado de la composición de dos transformaciones rígidas será siempre otra transformación rígida. Este supuesto puede quedar enunciado mediante el siguiente axioma:

Axioma 3. La composición de dos transformaciones rígidas es una transformación rígida.

Se completa el estudio de las composiciones considerando la intervención de tres o más transformaciones, aprovechando los resultados obtenidos al componer dos de ellas y, en particular, se puede orientar la indagación para establecer que cualquiera de las transformaciones vistas puede obtenerse como composición de dos o tres simetrías axiales.

A fin de propiciar la sistematización de resultados, se procede a modelizar mediante pares segmento orientado-semiplano las distintas posiciones relativas en que se ubican un objeto inicial y su imagen, planteando la siguiente actividad:

Actividad 4. Las siguientes figuras representan un segmento orientado y un semiplano, y sus respectivos homólogos. En cada caso, encontrar y caracterizar la transformación rígida que lleva unos en otros. Explorar la gama de situaciones posibles considerando las posiciones relativas de los segmentos homólogos y de los correspondientes semiplanos.



Sugerencias:

- Para conjeturar la transformación rígida implicada y caracterizarla, analizar si se preserva o no la orientación con base en la información que proporciona cada figura y examinar la posición relativa entre segmentos homólogos.
- Para verificar mediante el uso del programa la conclusión obtenida, copiar en pantalla la posición relativa de los segmentos dados en cada figura, asegurando la congruencia de segmentos mediante el uso de "compás" y ocultando la circunferencia, y utilizando "etiqueta" para especificar la orientación de los segmentos.

Esta actividad, entonces, conlleva el examen exhaustivo de las posiciones relativas posibles, y la conjetura de la transformación implicada en cada caso, aplicando las propiedades vistas y utilizando el programa para verificar el resultado. Sobre esta base, se puede acordar que siempre existe una transformación rígida que lleva un objeto inicial al final y, al parecer, esta transformación es la única que produce dicho efecto. Estas consideraciones se traducen en el siguiente axioma.

Axioma 4. Existe una transformación rígida y sólo una que transforma una semirrecta en otra y un determinado semiplano limitado por la primera en un determinado semiplano limitado por la segunda.

Con todos estos elementos se puede realizar una sistematización de resultados con base en tres niveles de análisis:

- La transformación rígida preserva o no la orientación.
- Los segmentos homólogos ($\overline{ab}$ y $\overline{a'b'}$) están contenidos en rectas secantes, paralelas o en la misma recta.
- Las mediatrices de dos segmentos ($\overline{aa'}$ y $\overline{bb'}$) que unen puntos homólogos son secantes, coincidentes o paralelas no coincidentes.

Por ejemplo, tomemos el caso en el que la transformación rígida preserva la orientación y, en particular, cuando los segmentos homólogos están contenidos en rectas secantes. Como se observa en las figuras 2 y 3 que provienen de la actividad de análisis, las mediatrices de los segmentos que unen puntos homólogos pueden ser secantes o coincidentes, y la exploración permite observar que no pueden ser paralelas.

Figura 2

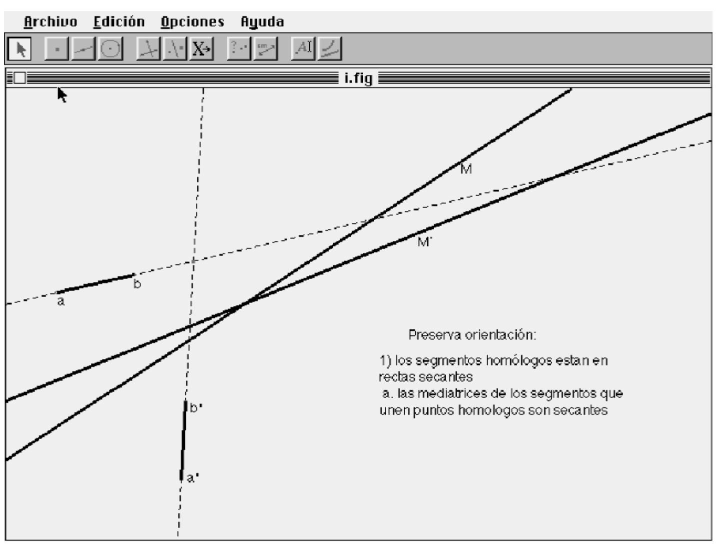
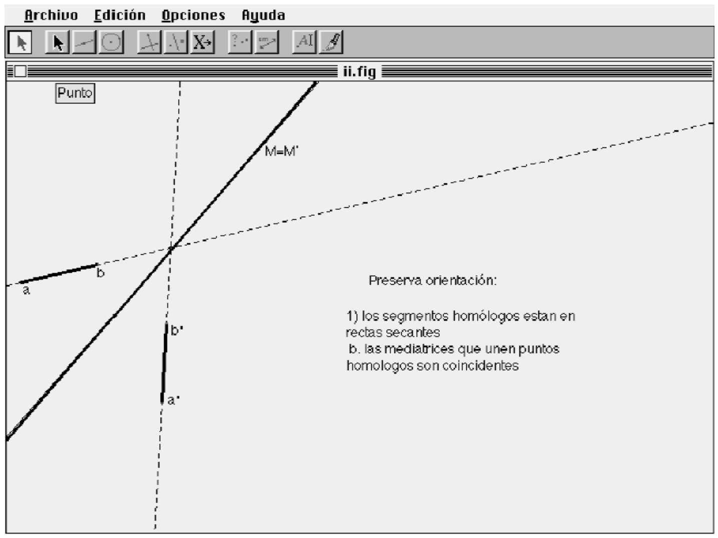


Figura 3



En ambos casos, siguiendo las sugerencias de la actividad 4, el análisis lleva a conjeturar que la transformación resultante podría ser una rotación $R(o, a\hat{o}a')$, lo cual es comprobable mediante el programa. Si las mediatrices entre puntos homólogos son secantes, el centro de rotación quedaría determinado por su intersección y, si son coincidentes, el centro de rotación sería la intersección de las rectas homólogas.

Análogamente, los casos en los que los segmentos homólogos están contenidos en la misma recta o en rectas paralelas pueden estudiarse modificando en pantalla la posición relativa de dichos segmentos, considerando las mediatrices implicadas.

Un análisis similar para el caso de no preservación de la orientación lleva a completar la sistematización, cubriendo todos los casos posibles. Por tanto, se puede concluir que las transformaciones rígidas son sólo las cuatro consideradas.

Finalmente, y como cierre del trabajo en la temática, se procede a clasificar las transformaciones rígidas del plano según preserven o no la orientación y según posean o no puntos fijos:

	Preserva orientación	No preserva orientación
Posee punto fijo	Rotación	Simetría axial
No posee punto fijo	Traslación	Reflexión deslizante

COMENTARIOS FINALES

En líneas generales, pensamos que el enfoque propuesto pone de manifiesto los procesos propios de la geometría al fomentar la retroalimentación entre las instancias inductivas y la formalización matemática, y lleva a comprender y trabajar la axiomática geométrica de una manera dinámica. La secuencia de trabajo intenta ir más allá de la exploración indiscriminada de los recursos del software, ya que éstos se utilizan para favorecer la adquisición de un sólido conocimiento disciplinar y la construcción de estrategias docentes propias.

Cabe señalar que la viabilidad de esta propuesta fue comprobada a través de la realización de talleres dirigidos a docentes de enseñanza media y a estudiantes del profesorado en matemáticas en San Carlos de Bariloche, Patagonia, Argentina. Su propósito fue promover en los participantes la adquisición de una metodología de trabajo seria y transferible a diferentes contenidos y situaciones de enseñanza, que experimentaran por sí mismos las ventajas del uso didáctico del recurso tecnológico y que pudieran anticipar las posibles dificultades de su aplicación en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Coxeter, H. S. M. (1971), *Fundamentos de Geometría,* México, Limusa-Wiley.

Laborde, C. (1998), "Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría", en L. Puig (ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática,* Colombia, Universidad de los Andes, pp. 33-48.

Puig Adam, P. (1980), *Curso de geometría métrica,* tomo 1, Madrid, Gómez Puig.

Santinelli, R. y L. Siñeriz (1999), "El uso didáctico del Cabri-Géomètre: implicaciones", *SUMA 30,* España, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática, pp. 97-102.

—— (2003), *Transformaciones rígidas con Cabri Géomètre II: Una aproximación a la teoría axiomática,* Cuaderno Universitario núm. 48, Argentina, Secretaría de Investigación y Extensión del Centro Regional Universitario Bariloche, Universidad Nacional del Comahue.

Siñeriz, L. y R. Santinelli (1998), "Estrategias espontáneas con uso de Cabri-Géomètre", *Educación Matemática,* México, vol. 10, núm. 3, pp. 25-36.

Tirao, J. (1979), *El plano,* Buenos Aires, Docencia.

DATOS DE LAS AUTORAS

Liliana Siñeriz
Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche,
Universidad Nacional de Comahue, Argentina
lsineriz@bariloche.com.ar

Raquel Santinelli
Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche,
Universidad Nacional de Comahue, Argentina
rsantine@crub.uncoma.edu.ar