La división de una fracción entre un número natural: análisis de una experiencia didáctica[1]

Néstor Raymundo González Tovar y David Block Sevilla

Resumen: En la escuela primaria las fracciones se introducen a partir de la división de unidades entre un número entero (se divide un pastel, una pizza, una naranja, una barra de chocolate, etc.). Conservando este contexto, en el presente estudio se explora el potencial didáctico para el aprendizaje de la noción de fracción a partir de un tipo de problema prácticamente ausente en la enseñanza escolar en este nivel: la división de una fracción de unidad entre un entero. El estudio constituye una experiencia de microingeniería didáctica: con base en un análisis preliminar, se diseñó una secuencia de ocho situaciones didácticas que se aplicó en un grupo de quinto grado de primaria. Una parte del grupo de alumnos logró desarrollar procedimientos diversos para resolver la división de una fracción unitaria entre un entero, incluyendo un algoritmo. La división de fracciones no unitarias, en cambio, resultó considerablemente más difícil; se documentan todos estos procesos. Las dificultades que surgieron, principalmente debidas a los cambios de unidad de referencia de las fracciones, sugieren que, efectivamente, el estudio del tipo de problema planteado podría favorecer una comprensión más profunda de la noción de fracción como partes de unidad en este nivel escolar.

Palabras clave: fracciones, división de una fracción entre un entero, fracciones unitarias y no unitarias, ingeniería didáctica.

Abstract: In primary school fractional numbers are introduced from the division of units by a whole number (it may divide a pie, a pizza, an orange, a bar of chocolate, etc.). Conserving this context, in the present study the didactic potential of the division of a fraction of unit by a whole number is explored. The study constitutes an experience of didactic engineering: on the basis of a preliminary analysis, a sequence of didactic situations that was applied in a group of fifth grade was designed. A significative part of the group of students managed to develop

Fecha de recepción: 2 de diciembre de 2004.

[1] Artículo derivado de la tesis de maestría de N. González (2003), *La división de números fraccionarios entre números naturales; una experiencia didáctica*, DIE, Cinvestav.

diverse procedures to solve the division of a unitary fraction by a whole number, including an algorithm. The division of non-unitary fractions, however, was considerably more difficult. This process is documented. The difficulties that emerged, mainly due to the changes of the unit of reference of fractions, suggest, indeed, that the study of the posed problem could favor a deeper understanding of the notion of fraction like parts of a unit in this level.

Keywords: fractional numbers, division of a fraction of unit by a whole number, unitary fractions, non-unitary fractions, didactic engineering.

INTRODUCCIÓN

La operación sobre la que trata el presente artículo es la división de una medida fraccionaria entre un número natural.[2] Se estudia un proceso didáctico cuyo propósito es favorecer el aprendizaje de divisiones como las siguientes:

1/4 de metro entre 5 es 1/20 de metro
2/3 de metro entre 2 es 1/3 de metro, o 2/6 de metro

La división de una fracción entre un número natural no ocupa un lugar explícito en los programas de matemáticas de la primaria en México, aunque es posible encontrar en los textos oficiales para el maestro y para los alumnos algunas situaciones aisladas que la implican (se mencionan, por ejemplo, mitades de mitades o de cuartos).[3] El contenido "división de fracciones" aparece hasta la secundaria (alumnos de 11-15 años) y refiere al tema amplio de la división de una fracción entre otra fracción. El interés de realizar un estudio didáctico sobre un aspecto muy específico de este tema en quinto grado de primaria radicó en su posible potencial para favorecer una mejor comprensión de la noción de fracción, al propiciar reflexiones sobre aspectos como los siguientes:

[2] Las distintas definiciones, usos y significados de las fracciones, así como la manera de nombrarlos, varían de un investigador a otro (Ohlsson, 1988; Kieren, 1978; Mancera, 1992). Al hablar aquí de fracciones que funcionan como medidas, nos referimos a la interpretación de una fracción *a/b* como suma de *a* fracciones unitarias 1/*b*, y a su utilización para expresar medidas concretas, por ejemplo 3/4 de kg.

[3] Por ejemplo, Ficha 42 "Representa números en la recta numérica", del *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado,* México, SEP, 1994.

- La relación entre la parte y el todo: determinar la fracción que resulta de dividir una fracción de unidad entre un número natural implica establecer la relación que la parte resultante guarda con el todo.[4]
- Los efectos de las variaciones del numerador y del denominador sobre el tamaño de la fracción: a un numerador *n* veces mayor corresponde una fracción *n* veces mayor, a un denominador *n* veces mayor corresponde una fracción *n* veces menor.
- La noción de equivalencia: la fracción *a/bn* es *n* veces más pequeña que la fracción *a/b* (pues resulta de dividir esta última entre *n*), entonces, al tomar *n* partes de *a/bn*, se vuelve a tener una cantidad igual a la que se tenía originalmente, es decir, $a/b = na/nb$.

Aspectos de la metodología de la investigación

El estudio constituye una experiencia de ingeniería didáctica (Artigue, 1995; Solares, 1999; Ramírez, 2003). La principal característica metodológica de este tipo de experiencia es la manera de llevar a cabo el análisis de los resultados: se busca ponderar en qué medida los procedimientos de los alumnos observados a lo largo de la secuencia se relacionan con las condiciones intencionalmente creadas a través de las situaciones, y si en dichos procedimientos es posible identificar elementos que den cuenta de ciertos aprendizajes. La forma de validación de los resultados de la investigación es, por tanto, interna: se confrontan los datos del *análisis a priori* con los del *análisis a posteriori*. En el apartado siguiente se presentan algunos elementos del análisis previo realizado.

La secuencia didáctica fue de corta duración (ocho sesiones de clase y una de entrevistas a lo largo de dos meses) y abordó solamente un aspecto puntual del tema de división de fracciones, por lo que puede decirse que constituye una experiencia de *microingeniería*. Coincidimos con Ramírez (2003), quien advierte que, en este tipo de experiencias, ciertos aprendizajes pueden no manifestarse durante la experiencia didáctica, sino después, por lo que "en los estudios de microingeniería sólo es posible dar cuenta de aprendizajes que se manifiestan en el corto plazo, y conjeturar, valorando las condiciones particulares, la posibilidad de que otros aprendizajes se manifiesten más adelante". No obstante, la pertinencia de una experiencia didáctica, afirma también la investigadora, no se valora

[4] Behr *et al*. (1990) han estudiado los procesos de redefinición de la unidad en el trabajo con fracciones y han destacado su importancia en la construcción de esta noción.

únicamente a través de los aciertos visibles de los alumnos al realizar determinada tarea, sino también, por la calidad de las confrontaciones entre sus conocimientos previos y el medio con el que interactúan y por las maneras en las que los niños logran construir en la interacción formulaciones explícitas de determinadas ideas, aunque éstas sean todavía precarias o formalmente incorrectas.

El análisis previo de la secuencia didáctica estuvo precedido por una revisión curricular que permitió identificar las escasas situaciones en las que el conocimiento en juego estaba presente y, además, permitió comprobar que, ateniéndonos a los programas, los alumnos dispondrían de los antecedentes necesarios para abordar problemas que se plantearían. Las primeras situaciones aplicadas permitieron conformar lo anterior.[5]

El trabajo de campo se realizó en un grupo de quinto grado conformado por 30 alumnos, perteneciente a una escuela primaria urbana.[6] La aplicación de las situaciones didácticas estuvo a cargo de la maestra que imparte la materia de matemáticas en la escuela,[7] con la asesoría de uno de los investigadores que suscriben el presente texto.[8] La recuperación de los datos corrió a cargo de dicho observador. Se optó por obtener información del desempeño de la mayor parte posible del grupo, turnando los equipos que fueron observados, lo cual permitió tener una visión general del desempeño del grupo completo, pero no un seguimiento por alumno. Por lo anterior, este trabajo presenta únicamente tendencias de respuestas dentro del grupo, o resoluciones de uno o dos alumnos de cada equipo, pero no de todos los integrantes. El corpus de datos que fue analizado estuvo constituido por el registro tomado por el observador, las hojas de trabajo de los alumnos y los análisis previos.

[5] Los aspectos que se abordan en los análisis previos de las ingenierías didácticas varían de una investigación a otra. Suelen abordarse cuestiones sobre la naturaleza del conocimiento que es objeto de enseñanza (estudio epistemológico), sobre las formas en que se ha enseñado, sobre las concepciones de los estudiantes, incluidas las dificultades u obstáculos en relación con dicho conocimiento y, finalmente, sobre las condiciones de distinto orden a las que deberá sujetarse la experiencia didáctica (Artigue, 1995).

[6] La escuela pertenece a un sindicato universitario. La población es de nivel socioeconómico medio.

[7] En esta escuela, a diferencia de la mayoría de las escuelas primarias públicas, en quinto y sexto grados de primaria hay un profesor especial para la clase de matemáticas.

[8] La asesoría a la maestra consistió en una plática inicial sobre la secuencia y su propósito y, al término de cada clase, un intercambio de comentarios sobre la sesión, así como la revisión de la ficha de la clase siguiente.

VARIABLES DIDÁCTICAS DE LA SITUACIÓN DE DIVISIÓN

El diseño de la secuencia de situaciones se hizo a partir de la identificación de algunos problemas para los cuales el conocimiento en juego podía constituir una herramienta de solución; se identificaron algunas variables didácticas[9] de dichos problemas, anticipando sus efectos sobre los procedimientos de los alumnos. La situación central de la secuencia se diseñó procurando crear una situación "adidáctica" en el sentido de Brousseau (1998).

A continuación, se destacan algunas variables de una situación de división de una fracción entre un número natural. En la experiencia que se relata más adelante, algunas de las variables se mantuvieron fijas en determinado valor, mientras que otras se hicieron variar en aras de favorecer determinados aprendizajes. La presentación del conjunto de variables permite apreciar una parte de la extensión del campo de problemas relativo a la operación que nos interesa y su vinculación con las técnicas para efectuar la división. También permite ver el recorte que hicimos en el presente trabajo.

ELECCIÓN DE UN TIPO DE PROBLEMA: DIVISIÓN REPARTO

Los dos significados principales que se suelen asignar a la división en el conjunto de números naturales, "repartir" y "agrupar" (o determinar cuántas veces una cantidad es igual a otra),[10] se mantienen cuando intervienen fracciones en el problema, siempre y cuando el dato que desempeña el papel de "número de veces" sea entero. Por ejemplo, un problema de división tipo "agrupamiento" o "comparación", como determinar el número de tramos de 3/4 de metro que se necesitan alinear de extremo a extremo para obtener un tramo de 3 3/4 de metro, no presenta dificultades importantes, pues el cociente (número de veces) es entero. El problema puede resolverse mediante la suma repetida o mediante aproximaciones sucesivas multiplicando por números naturales. Asimismo, un problema como "repartir 1/3 de pastel entre 5 niños", conserva el sentido del reparto conocido por los alumnos, en este caso, obtener 5 partes del mismo tamaño sin que sobre, o bien, obtener una cantidad que repetida cinco veces sea igual a 1/3 de pastel.

[9] Las variables cuya manipulación puede tener efectos en los procedimientos de resolución se llaman "variables didácticas" en la teoría de las situaciones didácticas.

[10] Sobre estos significados pueden consultarse Schwartz (1988), Martínez (1997) y Martínez y Moreno (1996).

Aunque en este caso la técnica para resolver no es la misma que se utiliza en los naturales (reparto cíclico, por ejemplo), los alumnos disponen de recursos para aproximarse a una solución, como la partición física por ensayo y error.

En cambio, cuando el número de veces no es entero, cualquiera de los dos tipos de problemas mencionados implica una reconceptualización de la noción de multiplicar (y de dividir), por ejemplo, el problema "si un automóvil consume 12.4 kilómetros por litro, ¿cuánto consume en 3 kilómetros?" implica determinar cuántas veces 12.4 es igual a 3 (o qué parte de 12.4 es 3).[11]

En el presente estudio se trabajó con los problemas presumiblemente más sencillos, los de partición con divisor entero (el divisor cumple el papel de número de veces). Este mismo tipo de problema subyace en la construcción de las fracciones que prevalece en la primaria, donde una medida fraccionaria surge de una partición de la unidad. El problema de dividir una medida fraccionaria implicará, por tanto, una composición de dos particiones sucesivas, por ejemplo, 1 unidad entre 3 igual a 1/3 de unidad y 1/3 de unidad entre 5 igual a 1/15 de unidad.

Elección de un tipo de magnitud, la longitud, y de la variable fracción unitaria-no unitaria

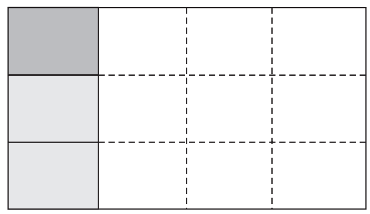
Para elegir la magnitud con la que se trabajaría en la experiencia redujimos de entrada las posibilidades a dos: la superficie y la longitud, debido a que estas dos magnitudes permiten una manipulación sencilla de los objetos portadores, facilitan las representaciones gráficas y son además con las que los alumnos han tenido más experiencia escolar, según los programas. A continuación, analizamos algunas características de la división con estas dos magnitudes, así como los procesos de resolución que permiten, considerando otra variable, el carácter unitario o no unitario de la fracción que se divide.

División de fracciones unitarias de superficie

El caso particular de una superficie rectangular facilita un procedimiento gráfico para realizar la doble partición y la determinación de la fracción resultante, gracias a la doble dimensión, largo y ancho. Por ejemplo, para dividir 1/4 de unidad

[11] Un análisis amplio sobre los sentidos de la división de números racionales puede consultarse en Brousseau (1988).

entre 3, puede dividirse la superficie en cuatro a lo ancho y en tres a lo largo, lo que permite determinar que las partes resultantes estarán en términos de doceavos.



Cabe observar que el hecho de que este modelo facilite ilustrar el proceso de dividir una fracción entre un entero no significa necesariamente que sea sencillo de poner en juego por iniciativa de un aprendiz, pues contiene decisiones difíciles de anticipar: la de partir usando las dos dimensiones; la de partir todo el rectángulo cada vez y no sólo la parte que interesa. Supone, además, poder "leer" el resultado, esto es, interpretar el gráfico para determinar el numerador y el denominador.

División de fracciones unitarias de longitud

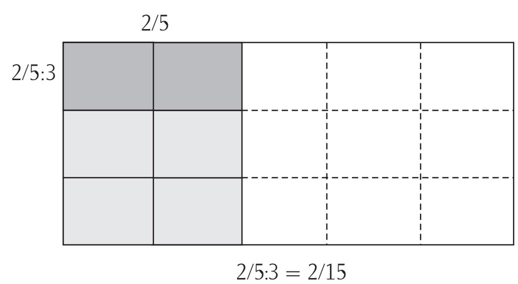
Por ejemplo, para 1/4 entre 3:

Para saber qué fracción de la unidad original representa la parte resultante (q), es posible, al igual que en el caso de superficie rectangular, subdividir los demás cuartos en tres partes cada uno y contar el total de partes en que quedó dividida la unidad. Es probable que esta representación propicie, en mayor medida que la del rectángulo, la idea de determinar cuántas veces cabe q en toda la unidad mediante una multiplicación: q cabe 3 veces en 1/4 de unidad y 1/4 de unidad cabe 4 veces en la unidad, por lo tanto, q cabe 4×3 veces en la unidad, es decir, q es 1/12 de la unidad.

En el caso de fracciones no unitarias, la diferencia entre los procedimientos que permiten los dos modelos (superficie y longitud) es mucho mayor, como se verá enseguida.

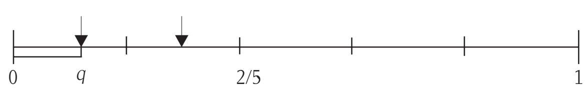
División de fracciones no unitarias de superficie

Con el modelo del rectángulo, el mismo procedimiento que se vio para fracciones unitarias permite encontrar el resultado de dividir una fracción no unitaria. Por ejemplo, para 2/5 de unidad entre 3, se puede hacer una primera partición a lo ancho en quintos, de los cuales "se toman dos", y después, a lo largo, una segunda partición en tercios (sobre los 2/5), de los cuales "se toma uno". El denominador de la fracción resultante, considerando a la unidad original, es el número de cuadritos en que quedó dividido el rectángulo completo.



División de fracciones no unitarias de longitud

Cuando la medida fraccionaria que se divide es una fracción no unitaria, el problema, utilizando longitudes, deviene significativamente más complejo. Veamos un ejemplo: 2/5 entre 3.



En este caso, no es posible determinar cuántas veces cabe la parte resultante q en la unidad mediante la sola representación gráfica o mediante manipulaciones del material, pues dicho número de veces no es entero, es decir, la fracción resultante no es unitaria, como lo fue en el caso anterior. El recurso gráfico tampoco sugiere un procedimiento de cálculo. La resolución deberá ocurrir, por tanto, en el registro de las relaciones numéricas.

En el registro numérico, la diferencia entre la división de una fracción unitaria y la de una fracción no unitaria es similar a la que existe entre una división de enteros como 1:3 y una como 2:3. En la primera, la determinación de la fracción es inmediata (1/3) mientras que en la segunda no, excepto si se dispone ya de un algoritmo o de la definición de fracción como cociente de enteros.[12] Este último problema fue estudiado por Solares (1999), quien, para que los alumnos establecieran que el cociente de *a* unidades entre *n* es *a/n* de unidad, exploró el siguiente camino:

$$a \text{ entre } n = a \text{ veces } (1 \text{ entre } n) = a \text{ veces } 1/n = a/n$$

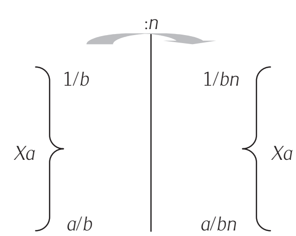
Por ejemplo, el resultado de 2 unidades entre 3 es el doble que el de 1 unidad entre 3, por tanto, es 2 veces 1/3, es decir, 2/3 de unidad.

La división de una fracción no unitaria de longitud podría resolverse de manera similar, cuando los alumnos ya saben dividir fracciones unitarias:

$$a/b{:}n = a \text{ veces } (1/b \text{ entre } n) = a \text{ veces } (1/nb) = a/nb$$

Por ejemplo, el resultado de 2/5 de unidad entre 3 es el doble que el de 1/5 de unidad entre 3, por tanto, es el doble de 1/15, es decir, 2/15.

Este procedimiento pone en juego la relación proporcional entre el dividendo y el cociente, cuando el divisor es constante:



[12] En México, como en muchos otros países, las fracciones no unitarias se enseñan en la escuela primaria a partir de las fracciones unitarias (o "partes de unidad"), por lo que una fracción como 3/4 significa 1/4 + 1/4 + 1/4 y no 3:4. Por lo tanto, para los alumnos no es evidente que el cociente de una división como 3:4 sea la fracción 3/4 (Block y Solares, 2001).

Opción por la longitud

En el presente estudio decidimos utilizar el referente de la longitud en la experiencia de ingeniería didáctica por los siguientes motivos:

- El modelo de la superficie del rectángulo podría ser mucho menos accesible de lo que parece a primera vista debido a las decisiones que deben tomarse para hacerlo funcional (efectuar cada una de las particiones en cada lado del rectángulo y partir todo el rectángulo en la segunda partición).
- El procedimiento gráfico para dividir fracciones no unitarias que se desprende del modelo del rectángulo (dividir a lo largo y a lo ancho) no es transferible a otras magnitudes.
- Para comprender una operación aritmética, no suele ser suficiente que los estudiantes tengan experiencias de construcción de la operación con un único modelo.
- El modelo de la longitud presenta una mayor exigencia en el nivel de las relaciones numéricas.
- El modelo de la longitud ha sido menos explorado que el de la superficie.

Cabe añadir que la dimensión longitud presenta otra ventaja con respecto a la superficie en cuanto al diseño de la situación didáctica: cuando se hacen particiones, no aparecen, como en el caso de las superficies, formas distintas con misma medida, lo cual facilita la comparación de las partes que los alumnos generan al dividir y, por tanto, la verificación empírica.

Una consecuencia de esta elección es que, en la experiencia que realizamos, fue importante la variable "fracción unitaria o fracción no unitaria". Se buscó que los alumnos establecieran, primero, un algoritmo para dividir fracciones unitarias y, después, se exploró la posibilidad de que lo utilizaran como estrategia de base para construir el algoritmo más general para fracciones no unitarias. Así, un objetivo específico en este trabajo fue el siguiente:

> Analizar la factibilidad de que los alumnos utilicen la división de una fracción unitaria como estrategia de base para construir otra estrategia más general, que permita dividir fracciones no unitarias (González, 2003).

Finalmente, aclararemos que, aunque en este estudio nos interesamos por la magnitud longitud, en una propuesta didáctica el estudio de las superficies rectangulares no debe excluirse; al contrario, es quizá el más adecuado para iniciar.

OTRAS VARIABLES NUMÉRICAS

Cuando el numerador de la fracción es múltiplo del divisor, la división puede hacerse mediante la división del numerador, por ejemplo, 6/7 de U entre $2 = (6{:}2)/7$ de $U = 3/7$ de U. Probablemente este caso particular presenta menos dificultades, pues la manera de dividir se asemeja a la de los naturales (se divide la cantidad de "partes" indicada por el numerador, concebidas como subunidades, dejando de lado el denominador). Debido a las limitaciones de tiempo, sólo estudiamos el caso más complejo y general en el que el numerador no es múltiplo del denominador y en el que, por consiguiente, es necesario operar sobre el denominador.

En la selección de valores numéricos, se optó por números pequeños que facilitaran las manipulaciones del material y la elaboración de representaciones gráficas. Los divisores fueron, al principio, potencias de 2, pues permiten la división física por mitades sucesivas,[13] posteriormente se usaron otros divisores.

Más adelante se presentan otras características de las situaciones que tienen que ver con el acondicionamiento del medio concreto en el que se plantea el problema, en particular, con el papel que se le hizo desempeñar al material concreto en la búsqueda del resultado.

ESTRUCTURA DE LA SECUENCIA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS DISEÑADAS

La secuencia está compuesta por tres partes. En la parte I, "Usos de la hoja rayada" de tres sesiones, se buscó que los alumnos aprendieran a utilizar un entramado de líneas paralelas equidistantes para realizar particiones de segmentos, con la idea de que utilizaran este recurso en el trabajo posterior. Se planteó también una primera situación que propiciaba la realización de una doble partición, por ejemplo, dividir un segmento en 14 partes, disponiendo de una hoja con solamente 10 rayas paralelas, lo cual podía hacerse, por ejemplo, dividiendo el segmento primero en dos y luego, cada mitad en siete. Puesto que el recurso de la hoja ra-

[13] Esta manera de dividir es la primera que logran dominar los alumnos en sus primeras experiencias de partición (Piaget, 1960).

yada prácticamente no fue retomado por los alumnos en las situaciones sucesivas y que en la situación de doble partición participaron muy pocos niños, no comentaremos aquí los resultados correspondientes a esta parte.

La parte II constó de cuatro sesiones. Se dedicó al desarrollo de procedimientos para dividir fracciones unitarias entre un número natural. Como se verá más adelante, la situación "Forma tus banderas", que se aplicó en la primera sesión, no funcionó adecuadamente, por lo que en la segunda y en la tercera sesión se optó por plantear otras situaciones más simples pero con el mismo propósito. En la cuarta sesión, se aplicó la situación "¿Cómo lo anotamos?", con la cual se buscó que los alumnos hicieran explícitas las operaciones en juego y se apropiaran de la notación correspondiente.

Por último, en la parte III se exploró una situación de división de fracciones no unitarias a lo largo de dos sesiones, la primera en clase y la segunda fuera de clase, con grupos pequeños de alumnos.

Parte I			Parte II				Parte III	
"La hoja rayada"			(Fracción unitaria entre naturales)				(Fracción no unitaria entre naturales)	
(a)	(b)	(c)	(a) Situación "Forma tus banderas"	(b) Situación simplificada	(c) Afirmación evaluación	Situación "¿Cómo lo anotamos?"	(a) 2/5:3	(b) 3/5:3; 4/5:3 4/5:5

En lo que sigue se presentan algunos resultados de las partes II y III.

RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA

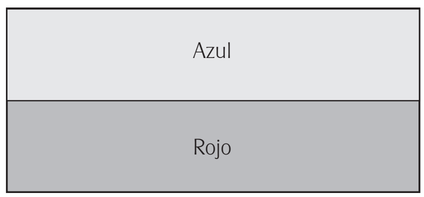
Una de las situaciones centrales revela deficiencias de diseño

Para propiciar el aprendizaje de la división de fracciones unitarias, en la parte II de la secuencia se intentó diseñar una situación que cumpliera con las características de una situación adidáctica,[14] a saber:

[14] Una situación relativa a un conocimiento es "adidáctica" cuando por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permite o provoca un cambio de estrategia en el jugador (Y. Chevallard *et al.*, 1998, p. 215).

- Que diera lugar a la división de una medida fraccionaria entre un entero.
- Que exigiera la determinación de la medida fraccionaria resultante con referencia la unidad original (si la división es por ejemplo 1/3:4, no debe ser suficiente contestar “1/4”, sino “1/4 de 1/3”, o “1/12”).
- Que permitiera acercamientos al resultado a quienes no dispusieran del conocimiento en juego.
- Que permitiera una validación empírica de las medidas obtenidas.

Para tal fin se diseñó la situación “Forma tus banderas”: cada equipo debe formar una bandera con dos pequeños tramos rectangulares de cartoncillo de colores distintos, por ejemplo uno rojo y otro azul, como se muestra en la ilustración.



El tramo azul lo obtenían de una doble partición: primero el maestro daba al equipo la cuarta parte de una tira larga de cartoncillo azul (la cortaba en cuatro a la vista de todos) y después, dentro de cada equipo se repartían aquel cuarto entre los integrantes. El tramo rojo debían solicitarlo por escrito a otro equipo, el cual solamente disponía de tiras rojas largas, del mismo tamaño que las tiras largas azules de las que se obtuvieron los primeros tramos. Los equipos debían lograr que sus dos tramos fueran del mismo tamaño. El uso de la regla graduada estaba prohibido. Esperábamos que los alumnos tuviesen que proporcionar la medida del tramo solicitado tomando la tira larga como unidad y, por lo tanto, que expresaran con fracciones el producto de la doble partición, por ejemplo: si el tramo azul se hubiese obtenido partiendo un cuarto de tira entre 5 integrantes del equipo, la medida del tramo rojo que debían solicitar hubiese sido “1/4 entre 5” o bien “1/5 de 1/4” o, por último, “1/20”. Al recibir el tramo solicitado, los alumnos tendrían la posibilidad de verificar si el mensaje enviado había funcionado bien o no.

La situación anterior no funcionó adecuadamente por varios motivos, entre los que cabe destacar los siguientes:

- El hecho de que la fracción de tira que los equipos reciben para repartírsela entre sus integrantes sea la misma para todos, por ejemplo, un cuarto de tira, favoreció que tanto emisores como receptores consideraran tácitamente a esa fracción como nueva unidad, dejando totalmente de lado la unidad inicial, la tira larga. Con ello, los emisores se limitaron a comunicar en sus mensajes la fracción derivada del reparto que hicieron entre los integrantes de su equipo, evitando la división de una fracción (por ejemplo, si el tramo que se les entregó fue de 1/4 de tira completa y si el reparto fue entre cinco, escribieron únicamente "1/5" y no "1/5 de 1/4" o "1/20"). Sus mensajes fueron bien interpretados por los receptores, pues éstos asumieron también que la fracción que se les comunicaba refería al tramo de 1/4 de tira que la maestra entregó a todos los equipos y no a la tira completa. Para corregir esta deficiencia, es necesario entregar a cada equipo una fracción de tira distinta, sin que los receptores la conozcan.
- La maestra no explicó el propósito de los mensajes (debían servir para que los receptores supieran de qué tamaño debían ser los tramos azules de las banderas) y, en vez de ello, solicitó directamente que escribieran la medida de sus tramos rojos. Esta modificación parece manifestar el hecho de que, en las situaciones que comúnmente se plantean en clase, se suele solicitar de manera explícita a los alumnos el conocimiento que se espera que utilicen.

La situación se reveló, además, difícil de llevar a cabo. Como se verá enseguida, mediante una situación más sencilla, aunque sin todas las características de una situación "adidáctica", fue posible propiciar el estudio del tema en cuestión. En los comentarios finales volveremos sobre este hecho.

A partir de la segunda sesión (de la parte II), se planteó a los alumnos el problema de la división de una fracción de una manera más simple y directa, aunque sin un contexto que diera cierta funcionalidad al recurso al que apuntamos y sin la posibilidad de validar empíricamente los resultados. No obstante, casi todos los alumnos comprendieron el problema planteado, desarrollaron algunos procedimientos para abordarlo y algunos avanzaron hacia un procedimiento sistemático de resolución. Esto es lo que se presenta a continuación.

La situación modificada para la división de fracciones unitarias

En la sesión 2 de la fase II, la maestra retomó dos de los mensajes escritos por los niños en la sesión anterior, cuando se aplicó la situación original:

A cada uno de los integrantes le tocó 1/1 y en total fue: 6/6 R = 6 partes Equipo Celaya	La tira la dividimos en 5 partes porque nuestro (equipo) es de 5 niños y a cada niño le tocó 1/5 Equipo Koalas

En ambos mensajes los alumnos comunicaban la medida del tramo de tira indicando únicamente la división entre el número de integrantes de su equipo y, por tanto, dejando de lado que la tira que se repartieron era, a su vez, 1/4 de otra tira. La maestra leyó en voz alta el mensaje del equipo Celaya y dio la siguiente consigna:

> **M**: Recordando que sólo les di un cuarto de tira, acuérdense que se lo repartieron (el 1/4 de tira amarillo) en partes iguales... lo que van a discutir por equipos es si en verdad les toca un sexto o cuánto le tocó a cada niño.

Enseguida, entregó a cada equipo[15] varios ejemplares de las tiras largas de cartoncillo (las cuales hacen las veces de "enteros") de color amarillo para que hicieran las verificaciones que necesitaran. A partir de este momento, el contexto de las banderas funcionó únicamente como contexto evocado, como telón de fondo de la actividad.

Procedimientos de los alumnos para la división de fracciones unitarias (parte II de la secuencia)

En la primera aplicación de la situación modificada (sesión 2 de la segunda parte), pocos alumnos lograron determinar la medida de 1/4 de tira entre 6. A continuación se presentan las principales dificultades y la manera en que finalmente la lograron resolver.

[15] Los 30 alumnos estaban distribuidos en ocho equipos de entre tres y cuatro alumnos.

Omiten la unidad de referencia

En tres de los ocho equipos (12 alumnos aproximadamente) volvieron a contestar tomando al cuarto de tira que se les entregó inicialmente como unidad (para 1/4 de tira entre 6, dan como respuesta, nuevamente, 1/6 de tira). Por la falta de validación empírica, los alumnos no identificaron el error, pero éste fue destacado en el momento de la puesta en común.

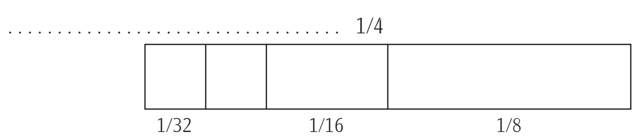
Sólo usan fracciones derivadas de las particiones en 2^n

En dos equipos, una primera dificultad fue no poder superar la partición sistemática en mitades para lograr una partición entre un número distinto a 2^n. En un equipo la dificultad se manifestó en el nivel de la partición física: intentaron partir su tira doblando en mitades. Para 1/4 de tira entre 6:

> Alumno del equipo 7: *[dobla una vez su tira a la mitad, desdobla y ve que le salen dos partes iguales; la dobla dos veces consecutivas a la mitad, la desdobla y ve que le salieron cuatro partes; dobla tres veces consecutivas a la mitad su tira, desdobla y ve que le salieron ocho partes]* ¡Ay, es que no salen!

Los alumnos se las arreglaron para obtener finalmente un número de partes (desiguales) distinto a 2^n, mediante la partición en mitades: después de un primer doblez a la mitad, hacen el segundo doblez a la mitad únicamente sobre una de las mitades anteriores y así sucesivamente. Asignaron fracciones a cada parte sin perder de vista que la tira que dividieron era 1/4 de otra tira, pero con una partición en partes desiguales, por ejemplo:

> Diego: (para "1/4 de tira entre 6", dibuja)

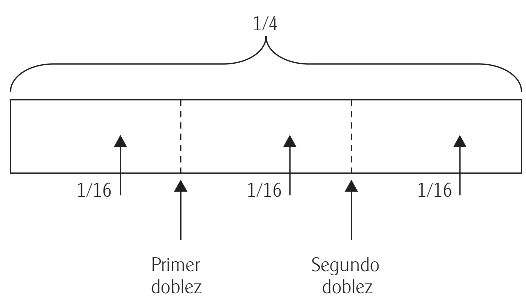


> [*toma un cuarto de tira, hace un doblez a la mitad y después, una de las mitades otra vez a la mitad*] Si el equipo fuera de uno le tocaría 1/4 [*desdobla el 1/4 de tira y lo muestra al grupo*] Si... dos personas [*dobla el cuarto*

> *de tira a la mitad y luego lo desdobla*] 1/8, tres personas [*dobla 1/8 a la mitad y señala una de las partes obtenidas*] 1/16 [*duda*] Si fuera 1/4... a una persona le toca 1/4. Si fuera dos personas, a cada uno... 1/8. Si fueran 3... 1/16. Si fueran 4... 1/32, pero si fueran 6, un...

En otro equipo la dificultad se manifestó en el nivel numérico: un alumno logró dividir físicamente su cuarto de tira en tres partes aproximadamente iguales, pero, para asignar la fracción que correspondería a una de las tres partes, estableció una relación entre el número de dobleces y las fracciones que se obtienen, como si los dobleces fueran en mitades sucesivas.

> **Alumno:** "con un doblez se obtienen dos partes de 1/8, si son dos dobleces entonces resultan tres partes de 1/16".



Estas dificultades parecen constituir manifestaciones distintas del proceso primigenio de partición en mitades sucesivas (Dávila, 1992). Dejan ver también que, posiblemente, los casos más accesibles de obtención de una fracción de fracción son aquellos que se desprenden de la partición sucesiva en mitades.

Establecimiento de un procedimiento sistemático

En el primer problema (1/4 entre 6) únicamente dos alumnos lograron determinar la medida buscada (1/24). La encontraron mediante el procedimiento previsto: para determinar cuál parte de la unidad completa representa el pedazo obtenido, consideraron que cada cuarto de la unidad debe dividirse entre 6 y que, por tanto, el número de subdivisiones que se obtiene es 4 por 6:

Ireri: Sería tan fácil como decir "cada cuarto en 6 partes... 6×4, 24" a cada uno le toca 1/24... Si este 1/4 está en 6, y cada uno está en 6 partes, entonces 24 veinticuatroavos es un entero.

Este procedimiento, presentado en la puesta en común, fue rápidamente adoptado por otros alumnos.

En la puesta común se presentó también otra manera de dar cuenta de la medida en juego, mediante una fracción de fracción: 1/6 de 1/4. Los alumnos que participaron en la discusión rápidamente determinaron que esa manera de expresar el resultado era equivalente a la anterior (1/24), pero la rechazaron porque no cumplía con la condición de usar una sola fracción.

Cuando se planteó el segundo problema ($1/4 \div 5$) en la misma sesión 2 de la segunda parte, en seis de los ocho equipos pudieron replicar el procedimiento explicado por Ireri y encontrar 1/20.

Afirmación y justificación del procedimiento

En la sesión 3 (de la parte II) se plantearon dos actividades más. En la primera se presentaron varias divisiones como las anteriores, variando un poco el dividendo y el divisor (1/4:6; 1/5:3 y 1/5:10). En todos los equipos pudieron aplicar el algoritmo recién establecido para dividir fracciones unitarias. Algunos alumnos intentaron evitar la dificultad relativa al cálculo, expresando el resultado como una fracción de fracción, por ejemplo, ante la división 1/5:3, contestaron "un tercio de un quinto" en vez de 1/15, por lo cual fue necesario añadir la condición de expresar el resultado con una sola fracción. No obstante, dicha forma de expresar el resultado permitió analizar la relación entre las dos expresiones y establecer la equivalencia.

En la segunda actividad los alumnos debían únicamente calificar como correctos o incorrectos resultados dados y justificar la calificación: se planteó el reparto de 1/3 de tira entre 7 y se preguntó si el resultado podía ser "tercios de tira" o si podía ser "séptimos de tira" (sin especificar el numerador). Los argumentos mediante los cuales los alumnos rechazaron ambas posibilidades mostraron, en la mayoría de los casos, un grado satisfactorio de comprensión de la operación en juego, por ejemplo:

Si se dividen tercios el resultado no puede ser otra vez tercios.
El resultado debe ser menor a tercios.
El resultado en tercios está mal porque deben ser veintiunavos.

Una respuesta interesante porque establece la relación entre el resultado correcto (1/21) y el incorrecto (1/7) fue la siguiente:

(No es séptimos porque) nos está dando un resultado 3 veces menor.

Considerando las resoluciones de los alumnos en las actividades anteriores, es posible afirmar que una parte del grupo, por lo menos un integrante de cada equipo, manifestó poder dividir una fracción unitaria entre un entero y poder explicar el procedimiento.

La representación de la operación

En la última sesión de esta parte II de la secuencia, se retomó una de las divisiones ya resueltas (1/5 de tira entre 3 niños) para plantear un problema distinto: ¿qué operación se hizo?, ¿cómo podría anotarse? Hasta este momento los alumnos habían tenido que representar por escrito solamente los resultados de la operación, en ningún momento se habló de división. Las propuestas de notación que dieron los equipos son, en síntesis, las siguientes:

- Pocos dan cuenta de la operación de división: "$1/5 \div 3 = 1/15$".
- Algunos dan cuenta tanto de la operación de división como del proceso para calcular el cociente "1/5 repartido entre 3 niños = $3 \times 5 = 15$... 1/15".
- Algunos confunden la operación en juego con la que usaron en el proceso de cálculo. Escriben por ejemplo: "$1/5 \times 3 = 1/15$".
- La mayoría da cuenta únicamente del proceso de cálculo: "$3 \times 5 = 15$".

Hacer explícita la operación que ha estado en juego en las tareas realizadas (la división de una fracción), distinguiendo dicha operación de la que se utiliza como parte de la técnica para encontrar el resultado (multiplicar el denominador), y poder expresar lo anterior en el lenguaje de la aritmética, constituyó retos adicionales a los que habían logrado, hasta este momento, los alumnos. La siguiente discusión ocurrió cuando la propuesta de cada equipo fue escrita en el pizarrón y la maestra invitó al grupo a escoger la que les pareciera mejor. Las intervenciones ilustran el esfuerzo de varios alumnos por dilucidar la confusión entre multiplicación y división, así como la riqueza de sus argumentos.

Alumno del equipo 5: [*refiriéndose al hecho de que ellos expresaron una multiplicación, no una división*] Nada más cambia el signo de multiplicación, pero es lo mismo.

Metzeri: [*No*] la multiplicación aumenta y un quinto por tres no es un quinceavo, entonces la 4 [respuesta del equipo 4] es la que está bien ("$1/5 \div 3 = 1/15$"). Ése es el equipo que dice más claro y el 2 está mal, un quinto por tres no es un quinceavo, no puede ser porque es menos y no más. O sea, el [equipo] 2 dice que es tres veces 1/5.

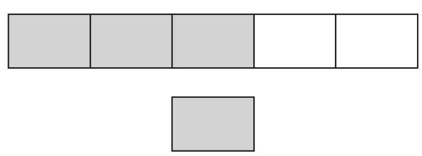
Marianela: es lo que iba a decir... es totalmente lo contrario en las operaciones [...] en la división disminuye y en la otra [multiplicación] aumenta.

Arturo: es que... en la división se busca un número que multiplicado...

Maestra: entonces... ¿yo puedo usar la multiplicación y la división indistintamente porque es lo mismo?

Arturo: es que si vas a dividir tienes que hacer a fuerza la multiplicación.

Marianela: es que si son 3 veces 1/5 son...1, 2, 3 veces 1/5 es... [*dibuja en el pizarrón un pedazo que representa 1/5 y los repite 5 veces*]:



Marianela: y 1/5... [*señala el quinto de abajo*] entre 3, es 1/15 de toda la tira.

Alumno de equipo 9: [*Pasa al pizarrón espontáneamente y corrige su propuesta de representación ($1/5 \times 3 = 1/15$) quedando así: $1/5 \times 3 = 3/5$*].

Varios: ¡Ahh... sí... sí!

Metzeri y Marianela consideraron que no podía tratarse de una multiplicación, pues la multiplicación aumenta, la división disminuye. En el caso que discuten ($1/5 \div 3$), la propiedad es válida puesto que el divisor es un número natural. Marianela no convenció a sus compañeros con su primer argumento y más tarde planteó otro más convincente: si se tratara de multiplicación el resultado sería tres veces 1/5 y no 1/15. Es hasta este momento que el equipo 9 retomó la idea y modificó su propuesta. Enseguida otros alumnos aceptaron el argumento de Marianela.

Arturo expresó un conocimiento correcto sobre la división cuando dice: "en la división se busca un número que multiplicado" y luego "es que si vas a dividir tienes que hacer a fuerza la multiplicación". Sin embargo, no es el vínculo entre división y multiplicación el que estaba en juego, se trataba de otro vínculo: para dividir una fracción entre un natural, basta con multiplicar su denominador por ese natural. Como ocurre a veces, en este caso la difusión de un conocimiento correcto en el grupo dificultó distinguir la operación en juego. No obstante, puede decirse que la discusión favoreció la extroversión de puntos de vista de los alumnos sobre las operaciones de multiplicar y dividir y los ayudó a identificar la operación en juego.

Procedimientos de los alumnos para la división de fracciones no unitarias (parte III de la secuencia)

¿Qué pasaría si en lugar de dividir 1/5 entre 3, dividimos 2/5? Como se vio en el análisis previo, este problema es considerablemente más complejo. Recordemos que el propósito específico de esta parte fue analizar la factibilidad de que los alumnos utilizaran el procedimiento para dividir una fracción unitaria como estrategia de base para construir otra que permitiera dividir fracciones no unitarias.

La situación inicial consistió en replantear la división 1/5 de tira entre 3 y, una vez resuelta, formular la pregunta: "¿Qué pasaría si en lugar de dividir 1/5 de tira entre 3, dividimos 2/5 de tira entre 3?" Los alumnos disponían de papel, lápiz y de las tiras de cartoncillo. Posteriormente, se plantearon otras divisiones, pero solamente a tres alumnos.

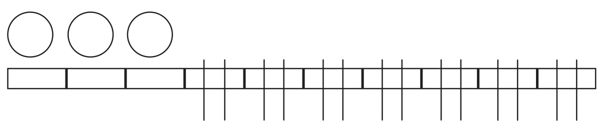
La división 2/5 *entre* 3

De los 33 alumnos del grupo, 13 lograron resolver la división. Algunos más (alrededor de 10) lograron esbozar un procedimiento correcto, pero no pudieron obtener el resultado. Los demás (otros 10) no lograron una aproximación adecuada al problema, por lo que el aumento en el grado de dificultad parece haber sido excesivo para ellos.

Los procedimientos incorrectos

Varios alumnos tendieron a aplicar el algoritmo recién establecido para la división de fracciones unitarias (multiplicar el denominador por el divisor), haciendo alguna modificación arbitraria, por ejemplo, 2/5 de tira entre 3 = 6/15 (multiplicando numerador y denominador de 2/5 por 3). Otros intentaron resolver con apoyo en una representación gráfica, pero perdieron de vista los datos de la operación que intentaban resolver, o la unidad de referencia, o bien, interpretaron el cambio en el numerador de la fracción (de uno a dos) de manera incorrecta. Un ejemplo es el siguiente:

René del equipo 7: 2/5... ¿entre tres? [*dibuja*]



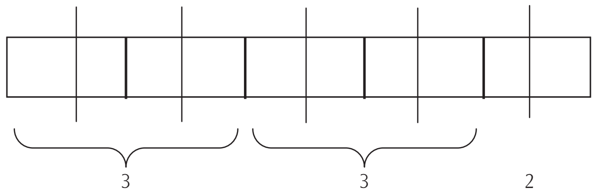
Sería... 1/3 con 7/21... hice una tira con 10 porque son 2/5. Tomé 3, uno para cada uno, los otros los partí en tres y los repartí.

René dividió un segmento en quintos y enseguida cada quinto en dos, con lo que obtuvo 10 pedacitos que reparte entre 3. Da uno a cada uno (los llama tercios, quizá porque es uno de tres), luego divide cada uno de los siete décimos restantes en tres, obtiene 21 por lo que los llama "veintiunavos".

Procedimientos correctos, pero que no permitieron obtener el resultado

Varios alumnos intentaron sin éxito encontrar el resultado con el apoyo de una representación gráfica. Por ejemplo, dos alumnos consideraron que era necesario tener dos enteros para tomar un quinto de cada uno. Con ello se vieron frente a 10 quintos, lo que los llevó a confusiones diversas. Otros representaron correctamente dos quintos y los dividieron entre tres, pero no lograron determinar la fracción resultante, por ejemplo:

Gaby: [*Dibuja*]



[*exclama*] ¡1/8!

Gaby dividió gráficamente 2/5 entre tres. Para saber qué fracción de la unidad representaba la porción resultante, intentó dividir el resto de la unidad de la misma manera, como lo había hecho en el caso de la división de fracciones unitarias. Naturalmente, sólo pudo dividir dos quintos más. Optó por dividir el último quinto entre 2, con lo que la unidad quedó partida en ocho partes. Como se vio en el análisis previo, en el caso de la fracción no unitaria la representación gráfica puede no ayudar.

Otros alumnos siguieron procedimientos numéricos guiados por una buena intuición, pero no lograron realizarlos correctamente. Seis intuyen que el paso de 1/3:5 (cuyo cociente se llegó a expresar como 1/3 de 1/5) a 2/3:5 supone una duplicación de algún tipo y proponen como cociente 2/3 de 2/5.

Mucho más cerca de lograr un procedimiento adecuado está Eréndira, quien sabe que el cociente se duplica:

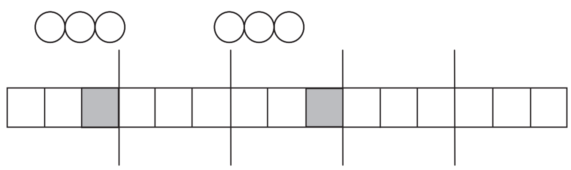
Eréndira: 1/30 porque... si 1/5 entre 3 es igual a 1/15, entonces 1/15 más 1/15 es igual a 1/30 [*duda y propone otra respuesta*]... en lugar de multiplicar se divide [*escribe: 1/7.5*]

¿Intuyó que el cociente de 2/5 entre 3 tenía que ser del doble del 1/15 y que al proponer 1/30 estaba haciendo lo contrario?

Procedimientos correctos

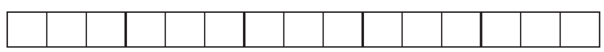
Entre los 13 alumnos que lograron encontrar el cociente de 2/5 entre 3, identificamos dos tipos de procedimiento: el que consiste en tomar como punto de partida la división de una fracción unitaria 1/5:3 = 1/15 y luego duplicar ese cociente, y un procedimiento no previsto que consistió en convertir los dos quintos en seis quinceavos y "repartirlos" entre 3. Veamos un ejemplo de cada tipo.

Tipo 1: Duplicación o suma
Marianela: Si 1/5 ÷ 3 es 1/15... la mitad sería... 7.5. Para 1/5, a un niño igual a 1/15... pero como son dos, ¡2/15! [*le explica a Jorge Luis*]. Si 1/5 entre 3 es igual a 1/15... [*dibuja*]:



La primera respuesta de Marianela (la mitad sería 7.5) es difícil de interpretar, ¿se confundió momentáneamente o sabe que al dividir a la mitad un denominador la fracción se duplica?

Tipo 2: Obtención de quinceavos y reparto
Metzeri: ¡2/15! [*contesta rápido*] [*dibuja una tira que divide en 5 partes y cada parte en tres*]



Como salen 6 partes... 6 entre 3 a 2, que son quinceavos.

Cabe observar que este procedimiento se facilita porque los alumnos han observado varias veces, en las divisiones anteriores, que cada subunidad se divide entre 3, o entre el divisor. Esto no significa que ellos prevean que al hacer esto se obtiene un numerador que es múltiplo del divisor, por lo que, con nuevos números, quizá no podrían repetir por sí mismos el procedimiento.

Otras divisiones

A tres de los alumnos que lograron un mejor desempeño en la división anterior, se les plantearon tres divisiones más: 3/5 entre 3, 4/5 entre 3 y 4/5 entre 5.

En las dos primeras divisiones cambia únicamente el numerador de la fracción (con respecto a la división de fracción unitaria 1/5 entre 3 que se planteó al principio). Los alumnos no tuvieron dificultad. Dos de ellos partieron del resultado 1/5 entre 3 y se limitaron a triplicarlo y cuatriplicarlo (primer tipo de procedimiento). Otro dividió cada quinto en tres, como lo había hecho en los ejercicios anteriores, y esto le permitió obtener un número de quinceavos múltiplo de 3 (segundo tipo de procedimiento). Ninguno observó que, para 3/5 entre 3, hay un camino corto y simple: dividir solamente el numerador. Estaban centrados en la técnica que habían venido utilizando.

En la división 4/5 entre 5, los tres alumnos recurrieron nuevamente a representaciones gráficas sin lograr reconstruir ninguno de los dos tipos de procedimiento que habían venido utilizando, lo cual pone de manifiesto la fragilidad de los procedimientos recién establecidos para dividir fracciones no unitarias hasta este momento.

COMENTARIOS FINALES

INTERÉS DE ESTUDIAR LA DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN ENTRE UN NÚMERO NATURAL EN LA ESCUELA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE FRACCIÓN

Debido a las dificultades en el diseño de una de las situaciones didácticas y al hecho de que no fue posible identificar los avances individuales de todos los alumnos que participaron en la experiencia, no podemos ser suficientemente concluyentes respecto a nuestra hipótesis de partida, a saber, que el estudio de la operación de división de una medida fraccionaria entre un número natural puede favorecer una comprensión más profunda de la noción de fracción. Sin embargo, los resultados sugieren fuertemente que la hipótesis podría verificarse. A continuación precisaremos esta consideración.

En el caso de las divisiones de fracciones unitarias, una parte importante del grupo pudo establecer que el cociente de $1/a$ entre n es $1/na$ y argumentarlo. Este logro supuso:

- Recuperar la unidad de referencia original para identificar la fracción resultante. Por ejemplo, para la división 1/4 de *U* entre 6, dar como cociente 1/24 de unidad en vez de 1/4 de 1/6 de unidad.
- Hacer explícito que al multiplicar el denominador la fracción disminuye de tamaño.

- Identificar que, aunque el resultado se obtiene multiplicando el denominador, la operación en juego es una división.

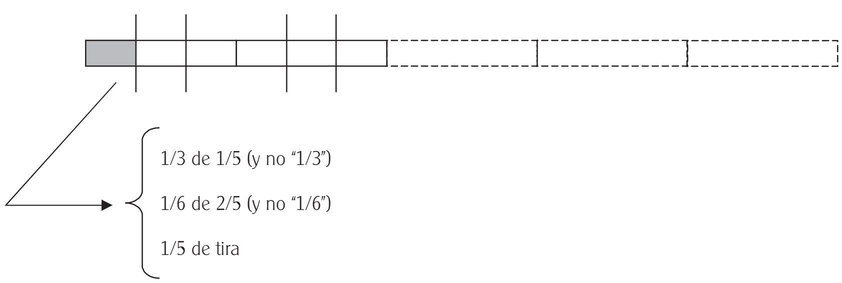
La división de fracciones no unitarias (de longitud) entre un entero resultó más difícil: sólo 13 de 33 alumnos lograron resolver el primer problema, y aproximadamente 10 más pudieron abordarlo mediante un procedimiento correcto, aunque no pudieran llevarlo a buen término. El procedimiento exitoso más utilizado fue, como se previó, el que descompone el problema de la división de fracciones no unitarias en divisiones de fracciones unitarias,

$$a/b{:}n = a \text{ veces } (1/b{:}n).$$

Se identificó además un esbozo de otro procedimiento que consiste en sustituir la fracción que se divide por otra equivalente cuyo numerador sea múltiplo del divisor y luego "repartir", por ejemplo,

$$2/5{:}3 = 6/15{:}3 = 2/15$$

Una gran parte de las dificultades que los alumnos tuvieron al intentar resolver las divisiones de fracciones no unitarias se originaron en el hecho de que tendieron a perder de vista la unidad de referencia de las fracciones. La doble partición, en el caso de fracciones no unitarias, da lugar a una diversidad de subunidades que dificultó considerablemente la identificación de la unidad. Por ejemplo, en el caso de la división 2/5 entre 3, cuando se procede partiendo cada quinto por separado, se tiene que cada uno de los dos "pedacitos" resultantes puede ser:



Se observó, además, que los riesgos de error aumentaron considerablemente cuando, en sus representaciones gráficas, los alumnos omitieron la parte de entero que no es objeto de reparto (la que aparece en el esquema anterior con líneas punteadas). La superación de estos errores pasa por explicitar la unidad de referencia y por comprender que, al variar la unidad, varía la medida. Estos aspectos forman parte esencial de una buena comprensión de las nociones de fracción y de medida.

Así, hay elementos que justifican la continuación de la indagación. Algunos de los puntos que convendría considerar en un segundo estudio son los siguientes: abarcar una gama más amplia de variantes, en particular, anteponer o intercalar el caso de las superficies rectangulares; intercalar casos en los que el numerador es múltiplo del divisor; rediseñar la situación para la división de medidas fraccionarias unitarias, y prolongar un poco más tiempo el trabajo.

La sustitución de una situación por otra con menos atributos didácticos

Una de las diferencias entre la situación originalmente planeada, "Escribe un mensaje para que tus compañeros manden un pedazo del mismo tamaño que el tuyo..." y la situación que finalmente se planteó "¿Qué fracción de tira resulta si dividimos un cuarto de tira entre seis?", radica en que en la segunda se pregunta directamente por un cociente, mientras que en la primera la meta es obtener dos porciones iguales de tira, meta para la cual el cociente debía ser "el recurso", es decir, debía aparecer como respuesta a una necesidad. Además, la situación original ofrecía el recurso de la validación empírica: se comparan las tiras. Sin embargo,

- No se logró diseñar una situación ágil y eficaz que tuviera los atributos anteriores.
- En quinto grado, los alumnos ya disponen de formas de verificar un cociente de una división con divisor entero que no son empíricas: la iteración del cociente en la recta numérica o la suma repetida del cociente, o incluso su multiplicación por el divisor.
- Como pudo comprobarse, plantear directamente la pregunta: "¿Qué fracción resulta de dividir tal fracción entre tal número?", permitió plantear, en quinto grado, un problema adecuado sin necesidad de que la operación en juego apareciera como herramienta de otra tarea.

Lo anterior sugiere que debemos discernir mejor de lo que lo hicimos en esta experiencia en cuáles casos el estudio de un conocimiento requiere una situación que apele a dicho conocimiento como "herramienta" para resolver determinada tarea, en cuáles casos es necesario que la situación permita validar de manera empírica, y en cuáles en cambio una simple pregunta (que no es sencilla de contestar) planteada directamente en el nivel del modelo, es decir, sin apelar a contexto extramatemático, tiene buenas posibilidades de convertirse en una situación de aprendizaje.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Patricia Martínez, Margarita Ramírez y Diana Solares sus comentarios a las versiones preliminares del presente artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, Michèle (1995), "Ingeniería didáctica", en M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica, cap. 4, pp. 33-60.

Behr, M., G. Harel, T. Post y R. Lesh (1990), "On the Operator Construct of Rational Numbers: Towards a Semantic Analysis", Ponencia presentada en la reunion anual de la American Educational Research Association, Boston.

Block, D. y D. Solares (2001), "Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo", *Educación Matemática*, vol. 13, núm. 2, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1988), "Représentations et didactique du sens de la division", en G. Vergnaud, G. Brousseau y M. Hulin (eds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (Actas del Coloquio de Sevres realizado en el CIEP, mayo de 1987), Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 47-64.

—— (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1998), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje*, México, SEP/ICE Universitat de Barcelona.

Dávila, M. (1992), "El reparto y las fracciones", *Educación Matemática*, vol. 4, núm. 1, México, Grupo Editorial Iberoamérica.
González, N. (2003), *La división de números fraccionarios entre números naturales; una experiencia didáctica*, tesis de Maestría, México, Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN.
Kieren, T. (1988), "Personal Knowledge of Rational Number: Its Intuitive and Formal Development", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Research Agenda for Mathematics Education.
Mancera, E. (1992). "Significados y significantes relativos a las fracciones", *Educación Matemática*, vol. 4 núm. 1, México, Grupo Editorial Iberoamérica.
Martínez Falcón, P. (1997), *Desarrollo de procedimientos para dividir: un estudio didáctico*, tesis de Maestría, México, Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-INP.
Martínez Falcón, P. y E. Moreno (1996), "Aprendiendo a dividir", *Revista Básica. Las matemáticas en la escuela*, núm. 11, México, Fundación SNTE, pp. 34-44.
Ohlsson, S. (1988), "Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, vol. 2, Lawrence Elrbaum Associates.
Piaget, J. *et al*. (1960), "Subdivisión de áreas y el concepto de fracciones", en *The Child's Conception of Geometry*, Londres, Routledge and Keagan Paul. [Trad. de Irma Velázquez. Dirección General de Educación Especial, 1990.]
Ramírez, L. (2003), *La enseñanza de los primeros números en preescolar. Exploración de una alternativa didáctica*, tesis de Maestría, México, Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN.
Schwartz, J. (1988), "Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, vol. 2, Lawrence Elrbaum Associates.
Secretaría de Educación Pública (1994), *Fichero; Actividades didácticas. Matemáticas. Quinto Grado*, México, SEP.
Solares, D. (1999), *Desarrollo de procedimientos para dividir: un estudio didáctico*, tesis de Maestría, México, Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN.

DATOS DE LOS AUTORES

Néstor Raymundo González Tovar
Dirección de Educación Especial, Secretaría de Educación Pública, México
ness_world@yahoo.com.mx

David Block Sevilla
Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav, IPN, México
dblock@cinvestav.mx

www.santillana.com.mx/educacionmatematica