Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Guillén Soler, Gregoria
Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos
Educación Matemática, vol. 17, núm. 2, agosto, 2005, pp. 117-152
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos

Gregoria Guillén Soler

Resumen: En este trabajo se mira la clasificación desde diferentes puntos de vista: desde los niveles iniciales, desde las matemáticas y desde la enseñanza de las matemáticas. Con el estudio teórico realizado se aporta la estructura en la que se encajan una gran variedad de situaciones/problemas relativos a la clasificación en el mundo de los sólidos. Se presenta una propuesta para tratar la clasificación con estudiantes de magisterio (futuros profesores de niños de 6 a 12 años), elaborada utilizando resultados que provienen de análisis teóricos y de la experimentación. Se analizan los diferentes tipos de clasificación que contempla esta propuesta, precisando sus características fundamentales y, para algunas clasificaciones, se indica la actividad geométrica que se puede desarrollar a partir de ellas. Asimismo, se apuntan algunas respuestas de estudiantes que informan, por un lado, de una manera de tratar la elaboración de definiciones de conceptos en esta propuesta y, por otro, del comportamiento de los estudiantes cuando resuelven algunas actividades planteadas al implementar la propuesta.

Palabras clave: clasificación, definición, enseñanza de la geometría de los sólidos, formación del profesorado, dificultades.

Abstract: In this research we look at classification from different points of view: from the first stages of learning, from mathematics and from the teaching of mathematics. The theoretical study carried out in this research provides the structure in which a great variety of situations/problems related to the classification in the world of solids fit in. We present a proposal in order to deal with the classification with teacher training college students. This proposal has been elaborated using results that come from theoretical analysis and experimentation. We analyse the different types of classification considered in this proposal, specifying its main characteristics. Moreover, for some classifications we indicate the geometrical activity which can be developed from them. Furthermore, we add some ans-

Fecha de recepción: 24 de septiembre de 2004.

wers by students that tell us how to handle the elaboration of definitions of concepts and which also tell us about the behaviour of students when they solve some of the activities set when implementing our proposal.

Keywords: classification, definition, teaching of the geometry of solids, teachers' training, difficulties.

INTRODUCCIÓN

La mayoría de las investigaciones realizadas en educación matemática relativas a la clasificación se han desarrollado en el marco del modelo de Van Hiele y se refieren a la clasificación de algunos tipos de polígonos. Cabe señalar las que han sido especialmente importantes en nuestro estudio por el análisis teórico que realizan del papel y función de la clasificación jerárquica en matemáticas (De Villiers, 1987, 1994) y las que han evaluado si los estudiantes pueden identificar y explicar relaciones entre subclases de polígonos (cuadriláteros o triángulos) (Burger y Shaughnessy, 1986; Corberán y otros, 1994; Fuys, Geddes y Tischler, 1988). Otros trabajos que también se han contemplado en el estudio que presentamos en este artículo se han desarrollado desde el punto de vista de la enseñanza (Castelnuovo, 1963, 1979; Craine y Rubenstein, 1993; Fielker, 1986, 1987; Maraldo, 1980); se refieren a la clasificación de cuadriláteros o hexágonos y las cuestiones que plantean, sus comentarios y "modo de hacer" se pueden trasladar a las clasificaciones que se hacen en el mundo de los prismas o de las pirámides.

La clasificación en el mundo de los sólidos ha sido menos investigada; entre los estudios realizados consideramos, por un lado, los que ponen de manifiesto análisis teóricos que se han realizado del proceso de clasificar o han proporcionado secuencias de actividades para trabajar la clasificación en el mundo de los sólidos organizadas según el modelo de Van Hiele (Guillén, 1991, 1997); por otro, los que señalan modelos de respuestas de estudiantes de magisterio para las tareas de identificar y enumerar ejemplos de subfamilias de prismas, juzgar, enunciar y justificar relaciones entre ellas, y representar estas relaciones mediante un diagrama, estudios que además subrayan algunas dificultades con las que se enfrentaron los estudiantes cuando resolvieron las tareas mencionadas (Guillén, 1999, 2001).

En el trabajo que corresponde a este artículo, del que ya hemos publicado una primera parte (Guillén, 2004), nos situamos en el marco del modelo de Van Hiele, considerando su evolución como consecuencia de la investigación realizada en el Instituto de Freudenthal. Esta evolución la describimos brevemente en Guillén (2004). En este marco de referencia, uno de los objetivos de la enseñanza de la geometría es desarrollar el nivel de razonamiento de los estudiantes y que se avance en la progresiva matematización a través de la práctica matemática. Como indicamos en Guillén (2004), al entender como razonamientos lógicos procesos matemáticos como análisis, clasificación, definición, conjetura, generalización y demostración, en nuestro estudio nos fijamos en las acciones que corresponden a describir, clasificar, definir y demostrar, como componentes de la práctica matemática, para avanzar en la progresiva matematización; en el artículo citado se prestaba atención a la *descripción y análisis* de objetos geométricos y en este artículo nos centramos en la clasificación.

Aquí, vamos a introducirnos en el tema con algunas cuestiones relativas a la clasificación y continuamos realizando un análisis de este proceso matemático; esto es, delimitamos diferentes tipos de clasificación y diferentes enfoques para la enseñanza. Hacemos hincapié en que nos podemos aproximar a la clasificación a través de diferente tipo de actividad matemática y también consideramos dificultades que pueden subyacer cuando se enseña-aprende la clasificación. Presentamos una propuesta para enseñar-aprender la clasificación con estudiantes de magisterio, elaborada a partir de la experimentación en este ámbito de estudio de propuestas previas organizadas según el modelo de Van Hiele. Nos centramos en los diferentes tipos de clasificación que contempla nuestra propuesta y para cada tipo indicamos sus características fundamentales. Por último, para un tipo de clasificación de los que hemos delimitado, analizamos con detalle la actividad matemática que se puede abordar al enseñar-aprender ese tipo de clasificación e indicamos algunas respuestas de estudiantes de magisterio que informan, por un lado, una manera de aproximarnos en esta propuesta a la formación de conceptos[1] y, por otro, del comportamiento de los estudiantes cuando resuelven algunas actividades planteadas al implementar la propuesta.

Puesto que la investigación que se presenta en este artículo tiene como ob-

[1] En este estudio se ha tomando como marco de referencia el trabajo de Freudenthal (1983) y utilizamos la "jerga" que introduce. Así, distinguimos *concepto* y *objeto mental*. Puig (1997) indica que "en una primera aproximación, la contraposición objeto mental-concepto que plantea Freudenthal puede verse como la consecuencia de considerar a las personas que conciben o usan las matemáticas frente a las matemáticas como disciplina o conjunto de saberes histórica, social o culturalmente establecidos". Apunta que "podemos partir pues de una imagen inicial: la contraposición objeto mental-concepto es una contraposición entre lo que está en la cabeza de las personas –los objetos mentales– y lo que está en las matemáticas como disciplina: los conceptos". Asimismo, en este trabajo se ha tomado de Vinner (1983) la manera de entender los conceptos; cuando se habla del *concepto* consideramos el concepto que se deriva de su definición matemática.

jetivo incidir de alguna manera para que en las clases de primaria y secundaria mejore la situación actual de la enseñanza-aprendizaje de la clasificación, para finalizar este apartado subrayamos nuestra concepción de la enseñanza de las matemáticas como actividad. Siguiendo a Fielker (1986, 1987), nos aprovechamos de sus ideas para precisar esta concepción. Las matemáticas se conciben como un gigantesco juego en el que podemos decidir nuestras propias reglas y cuál juego vamos a jugar, donde la única condición es que todo debe ser consistente por sí mismo y también debe producir la sensación de que la cosa vale. No hay definiciones dadas previamente: podemos decidir por nuestra cuenta. Y podemos dárselas a lo que nos parezca. Se tiene que dar la oportunidad a los estudiantes de que sientan la sensación del *poder*, inherente a las matemáticas de alterar las variables, examinar las consecuencias, recrear las definiciones, hacer elecciones, entretenerse con clasificaciones y crear nuevas definiciones para reconciliar los sentimientos propios ante las nuevas situaciones.

LA CLASIFICACIÓN. ALGUNAS PREGUNTAS

Vamos a comenzar con algunas preguntas sobre la clasificación, que pueden surgir al reflexionar sobre el conocimiento que se tiene de este proceso matemático y considerando que este proceso puede ser un contenido de la enseñanza primaria o secundaria.

1. ¿Qué se entiende por clasificación? ¿Cómo se percibe la clasificación?
2. ¿Cuáles elementos están implicados?
3. ¿Clasificaciones particiones o clasificaciones inclusivas en el comienzo del aprendizaje-enseñanza de la geometría?
4. ¿Cuáles problemas pueden ser interesantes para incluirlos en modelos de enseñanza propuestos para estos niveles?
5. ¿En el contexto de la geometría plana? ¿En la geometría de los sólidos? ¿En las matemáticas?
6. Los diferentes tipos de clasificación ¿se retoman en diferentes contextos y en tiempos diferentes?

En el trabajo que sigue se abordan estas cuestiones; si bien los apartados sólo hacen referencia a alguna de ellas, se puede notar que el análisis realizado aporta también respuestas para otras.

¿CÓMO SE PERCIBE LA CLASIFICACIÓN? UN ANÁLISIS DESDE DISTINTOS PUNTOS DE VISTA

La clasificación desde los niveles iniciales. Algunas preguntas

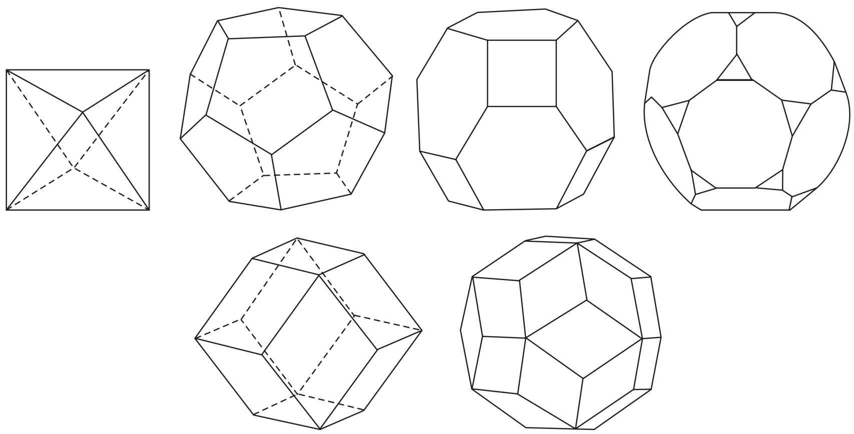
La clasificación tiene unos usos en distintos contextos cotidianos. También se utiliza en otras áreas; por ejemplo, en la biología, la química, etc. Estos usos que se hacen de la clasificación proporcionan unos significados que llevan a que en la enseñanza, al introducir el estudio de la geometría, podamos aproximarnos de diferentes maneras. ¿Cómo se percibe la clasificación al comenzar el estudio de la geometría? ¿Es una tarea de organizar? ¿De hacer grupos incluidos? ¿O es una tarea de separar? ¿O es una tarea de buscar todos los objetos de una familia? ¿Es una tarea de buscar los que se parecen? ¿Es una tarea de buscar parecidos y diferencias?

La clasificación desde las matemáticas. Tipos de clasificaciones

Cuando la clasificación se mira desde las matemáticas (como contenido matemático) y uno se centra en los componentes implicados en el proceso (el universo objeto de clasificación y el criterio utilizado para clasificar) y en el tipo de clasificación que se establece, de nuevo surgen algunas cuestiones: ¿Se considera todo el universo (por ejemplo, el mundo de los poliedros) o sólo un trozo (por ejemplo, en alguna familia de poliedros)? ¿Cuáles criterios cabe utilizar para separar en clases? ¿Hay criterios para separar en clases que no se basan en observaciones/percepciones? ¿En qué aspectos inciden? ¿Qué tipos de clasificación se pueden establecer?

Un análisis del contenido matemático de la clasificación puede llevar a distinguir la clasificación a priori y la clasificación *a posteriori*. De Villiers, (1994, p. 14) precisa ideas para estas clasificaciones: En una clasificación *a posteriori*, la clasificación de los elementos de una familia (por ejemplo, la de los paralelepípedos) se considera después de que se conocen durante algún tiempo los cubos, ortoedros, etc., y se han examinado minuciosamente sus propiedades. En general, la función más importante de una clasificación *a posteriori* es organizar conceptos. Por *clasificación a priori* se entiende que los procesos de generalización y especialización se utilizan deliberadamente para producir nuevos conceptos que se colocan inmediatamente en relaciones jerárquicas o en partición con los otros conceptos existentes. En una clasificación *a priori*, la función más importante es,

Figura 1 Dos poliedros regulares, dos poliedros arquimedianos y dos poliedros de Catalán

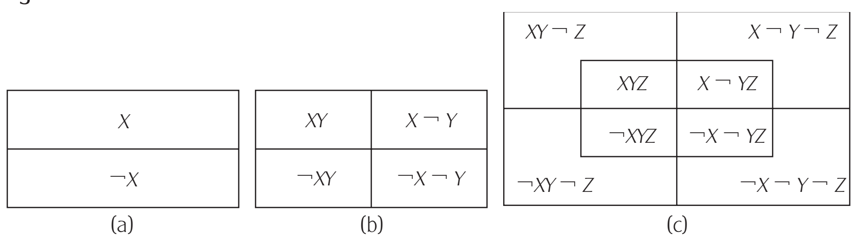


por tanto, claramente, la de descubrir/crear conceptos nuevos. Con una clasificación *a priori*, comenzamos con el concepto más especial, por ejemplo, los poliedros regulares (poliedros que tienen caras regulares, iguales y vértices iguales), y con la generalización establecemos como conceptos nuevos otras clases, como los poliedros arquimedianos (se mantienen las condiciones de regularidad de las caras y de igualdad de vértices, pero ahora las caras no son iguales), o los de Catalán (se mantiene la condición de igualdad de las caras, pero no son regulares y los vértices no son iguales). En la figura 1 se muestran dos ejemplos de cada una de estas familias.

Un análisis del contenido de la clasificación puede llevar también a otros tipos de clasificación. El listado puede ser bastante largo; por ejemplo, si se consulta Guillén (1991, pp. 23-40), donde se organiza el mundo de los poliedros, se encuentran las siguientes:

- Clasificaciones ingenuas, basadas en criterios que centran la atención en la regularidad e igualdad de los elementos de los poliedros. Dentro de este grupo se consideran clasificaciones dicotómicas y clasificaciones en las que las particiones se solapan. En este último caso se distingue si están implicados dos o tres criterios para clasificar. Así, por ejemplo, como mostramos en el diagrama de la figura 2, al considerar los tres criterios: regularidad de

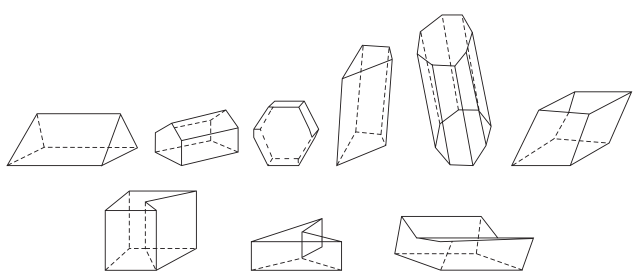
Figura 2



caras, *X*, igualdad de caras, *Y*, e igualdad de los vértices, *Z*, se establecen ocho familias y una de ellas, representada en el diagrama por *XYZ*, es la de los poliedros regulares platónicos.[2]

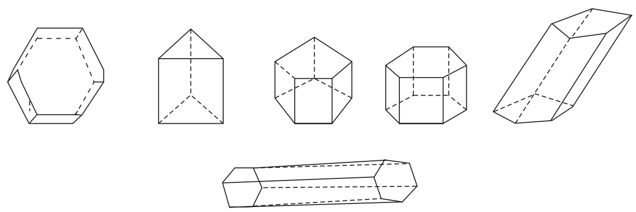
- Se consideran también otros criterios para clasificar basados en observaciones/percepciones que se hacen sobre los objetos de características que tienen un fuerte componente visual, lo que lleva a que se expresan con terminología visual. Las clasificaciones establecidas son particiones. Como ejemplo, podemos considerar las clasificaciones que se establecen con los criterios basados en las observaciones de que hay sólidos "inclinados" o de que hay sólidos "con entrantes". Así, se establecen dos familias disjuntas en cada caso. Considerando como universo objeto de clasificación la familia de los prismas, se establecen, con el primer criterio, la familia de los prismas rectos y la de los oblicuos; y con el segundo, la familia de los prismas cóncavos y la de los prismas convexos. En la figura 3 mostramos ejemplos de estas subfamilias.

Figura 3 Prismas rectos y oblicuos, cóncavos y convexos

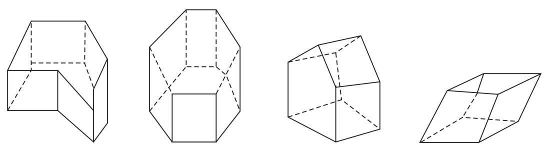


[2] A la familia que no cumple el atributo *X* la representamos en el diagrama como ¬*X*.

Figura 4 Prismas de bases regulares y prismas de bases irregulares



(a)



(b)

- Otro criterio basado en observaciones/percepciones que cabe comentar se basa en la observación de que hay poliedros que "tienen base o bases". Con este criterio se separan los poliedros que "tienen base o bases" de aquellos para los que no se distinguen. Y en las familias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides (poliedros que pertenecen al primer grupo), se distinguen las bases de las caras laterales. Las clasificaciones de este bloque se analizan con más detalle posteriormente.
- Al centrarse en las familias que "tienen base o bases", hay clasificaciones que tienen que ver con uno de sus elementos: la base. Así, por ejemplo, en el mundo de los prismas se establecen los prismas de bases regulares y los prismas de bases irregulares; en la figura 4 se muestran ejemplos de estas subfamilias. O los prismas triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etcétera.
- También se pueden establecer clasificaciones con criterios cuantitativos, clasificaciones en las que hay implicados más de un criterio, que corresponden a clasificaciones en las que las particiones se solapan, clasificaciones establecidas con criterios que son normas de construcción y clasificaciones inclusivas o jerárquicas. Estos tipos de clasificación los vamos a retomar al precisar nuestra propuesta para enseñar-aprender la clasificación con estudiantes de magisterio; en este apartado se indican las características fundamentales.

La clasificación desde la enseñanza de las matemáticas: enfoques, problemas para abordar y dificultades

Al realizar un análisis didáctico de la clasificación podemos establecer diferentes enfoques para la enseñanza, distinguir diferentes componentes de la actividad matemática y prestar atención a las dificultades y errores.

Los tres enfoques con los que se puede introducir la clasificación corresponden a las ideas que tienen los estudiantes sobre la clasificación y se han indicado ya. Se enlistan a continuación:

1. Organizando un mundo conocido, separándolo en clases disjuntas; enfoque que introducirá en la clasificación partición.
2. Organizando y estructurando un mundo conocido; enfoque que llevará a las clasificaciones jerárquicas.
3. Construyendo ejemplos, siguiendo normas de construcción o buscando los objetos que se parecen a otros, cumplen sus propiedades o verifican su definición; enfoque que conducirá a otra manera de abordar la clasificación en matemáticas y de la que también vamos a hablar.

Cuando los diferentes tipos de clasificación que se han delimitado al realizar un análisis del contenido se retoman desde el punto de vista de la enseñanza, surgen las siguientes preguntas referidas a cada tipo de clasificación: ¿Cuáles aspectos cabe resaltar de cada tipo de clasificación? ¿Cuáles problemas aparecen íntimamente ligados a cada tipo de clasificación?

En el apartado siguiente se aborda la primera pregunta. Respecto de la segunda, cabe subrayar lo extenso que resulta el listado de componentes de la actividad matemática que corresponden a cada tipo de clasificación. Entre ellos cabe señalar:

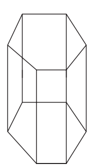
- Reflexionar sobre lo que puede considerarse o no como criterio de clasificación para un universo dado.
- Tratar otros problemas ligados a la clasificación:
  - Diferentes diagramas que las representan
  - Las relaciones entre familias
  - Las diferentes maneras de expresarlas
  - Situaciones diferentes porque cambia la relación que existe entre las familias o porque cambia la manera como se presentan las relaciones
  - Propiedades de las subfamilias establecidas

- Abordar problemas conectados con la clasificación que no son propios de ella. Por ejemplo, el nombre que se da a las subfamilias que se establecen.
- Tratar problemas que relacionan el proceso de clasificar con otros procesos:
  - El tipo de clasificación establecida y la descripción/definición de familias
  - La descripción/definición de familias y el tipo de clasificación que se establece
  - El tipo de clasificación establecida y la demostración de propiedades.

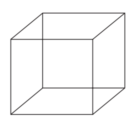
Si el punto de mira se pone en las dificultades que afrontan los estudiantes al abordar estos problemas, que les llevan a cometer ciertos errores, la investigación nos aporta información sobre ello. Son numerosas las publicaciones relativas al modelo de Van Hiele que han mostrado claramente que algunos estudiantes tienen problemas con las clasificaciones jerárquicas (como ejemplo, véanse De Villiers, 1987, 1994; De Villiers y Njisane, 1987; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Guillén, 1997, 2001; Van Hiele, 1986). Por ejemplo, en el contexto de la clasificación de triángulos y cuadriláteros, De Villiers (1987) determinó que "los niños son capaces de comprender a una edad muy temprana inclusiones de clases como 'los gatos y los perros son animales'; sin embargo, es, sin duda, psicológicamente mucho más difícil con figuras geométricas, ya que definir atributos es realmente más sutil y complejo". Apoyándose en los resultados de Mayberry (1981), concluye que la inclusión de clases entre diferentes clases de figuras geométricas (por ejemplo, la inclusión de los triángulos equiláteros en los isósceles y la inclusión del cuadrado en los rectángulos o incluso la inclusión entre diferentes pares de cuadriláteros) no conlleva psicológicamente la misma dificultad psicológica, aunque la estructura lógica podría ser la misma. En sus experimentaciones verificó que, de todas las tareas propuestas a los niños (identificación de tipos de figuras, uso de terminología geométrica, interpretación de definiciones dadas, argumentos deductivos de un paso, descripción verbal de propiedades de figuras, deducción más larga y clasificación jerárquica de conceptos geométricos), la clasificación jerárquica resultó ser la tarea más difícil. Además, en los cursos superiores se mejoraba muy poco en el rendimiento (De Villiers, 1987, p. 22, citado en Guillén, 2001).

Y en el contexto de la clasificación de los prismas, Guillén (2001) puso de manifiesto las dificultades con las que se enfrentaron estudiantes de magisterio cuando, una vez tratada la clasificación inclusiva de los cuadriláteros y después de haber establecido diferentes familias de prismas, se acometieron las tareas de: *i)* enumerar ejemplos de subfamilias de prismas que cumplían determinadas condiciones, *ii)* precisar el tipo de caras que pueden tener los ejemplos de estas familias, *iii)* juzgar y justificar si la relación entre familias de prismas que se enuncia o se da representada en un diagrama es correcta o incorrecta, y *iv)* establecer o representar si entre dos familias de sólidos dadas hay relación de inclusión, de exclusión, o tienen intersección pero no están incluidas una en otra. Las respuestas de algunos estudiantes, que indicamos a continuación, son ejemplos ilustrativos de algunas dificultades que se mencionan en este trabajo.

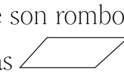
- Cuando se pedían ejemplos de paralelepípedos que no son ortoedros[3] se respondió: "Todos los que tienen caras paralelogramos. Las caras sí que pueden ser cuadrados, porque el cuadrado es paralelogramo. Y rombos y rectángulos también." "Todos los que tienen caras rectángulos. Ésos son los que son ortoedros. Los paralelogramos también pueden ser. Así, unos son ortoedros, como dice, y otros son paralelepípedos." Y para paralelepípedos que además son ortoedros se indicó: "Todos, pues todos los ortoedros son paralelepípedos. Pones rectángulos en las bases y los haces rectos, más o menos altos."
- Al responder a la pregunta de si los ejemplos de paralelepípedos que no son romboedros pueden tener alguna cara que sea rombo se indicó: "No pueden tener caras rombos; ninguna; si sus caras son rombos, entonces serían romboedros."
- Para juzgar la relación "Los prismas siempre son cubos", se dieron las siguientes respuestas: "Verdadera. Los cubos tienen bases iguales como los prismas, aunque en el cubo son iguales."



Ejemplo de un prisma y no es cubo (base hexágono)



Es cubo. Tiene caras cuadradas

Para la relación "Los prismas de bases cometas siempre son romboedros" se indicó: "Falsa. Por ejemplo, el paralelepípedo de caras  no es romboedro; no tiene forma de cometa (lados vecinos iguales,...). O se indica: "Falso, el ortoedro no es romboedro, no tiene todas las caras iguales".

[3] Al hablar de *paralelepípedos*, consideramos los prismas, cuyas caras son paralelogramos; como *ortoedros* consideramos los paralelepípedos, cuyas caras son rectángulos (incluimos los cuadrados como rectángulos); y como *romboedros*, los paralelepípedos con todas las caras iguales (rombos iguales, incluimos los cuadrados como rombos).

Y para la relación "Los prismas de caras laterales regulares son siempre prismas de bases regulares se respondió: "Cierta, los prismas de caras laterales cuadrados y la base regular son prismas de caras regulares."

- Al realizar una actividad en la que se tenía que seleccionar *siempre, nunca* o *se solapan* para expresar la relación que existe entre el paralelepípedo y los prismas de base cometa se seleccionó el término "nunca" y se aclaró: "Es 'nunca' pues no tienen ejemplos comunes (no tiene flecha el diagrama)" [la respuesta se dio a partir del diagrama que se había construido previamente que relacionaba las diferentes familias de prismas cuadrangulares y en esta respuesta se plasmó la idea de que cuando dos familias no estaban conectadas con una flecha significaba que no tenían ejemplos comunes].

Las dificultades que se han puesto de manifiesto en el contexto del mundo de los sólidos se han observado también cuando se ha tratado la clasificación de determinados tipos de polígonos (Guillén, 2001). De Villiers (1994) explica por qué las clasificaciones jerárquicas tienen gran dificultad:

> Varias dificultades que tienen los niños con la inclusión de clases jerárquica (especialmente los niños de mayor edad) no subyace necesariamente en la lógica de la inclusión como tal, sino que a menudo tiene que ver con el *significado* de la actividad, lingüístico y funcional: lingüístico en el sentido de interpretar correctamente el lenguaje usado en la inclusión de clases, y funcional en el sentido de entender por qué la clasificación jerárquica es más útil que la clasificación partición (p. 17, citado en Guillén, 2001).

Llegados a este punto, para finalizar el apartado, vale la pena resaltar que, al mirar la clasificación desde diferentes puntos de vista, se han delimitado una gran variedad de problemas que se podrían plantear en una propuesta de modelo de enseñanza para trabajar este proceso matemático; esto es, se pueden considerar criterios de clasificación con unas características u otras; para establecer las familias se puede considerar un criterio de clasificación o varios; también se puede variar el mundo que es objeto de clasificación; asimismo, se ha señalado que se pueden establecer diferentes tipos de clasificación y, para cada tipo de clasificación, se pueden abordar diferentes problemas para los que posiblemente los estudiantes enfrenten dificultades que los lleven a cometer determinados errores. Hasta ahora, en este trabajo se ha perfilado la estructura en la que se pueden encajar numerosas situaciones/problemas relativos a la clasificación.

UNA PROPUESTA PARA TRABAJAR LA CLASIFICACIÓN. TIPOS DE CLASIFICACIÓN: CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES

En este apartado se presenta una propuesta para trabajar la clasificación en el mundo de los sólidos con estudiantes de magisterio, la cual se ha elaborado a partir de la experimentación en este ámbito de estudio de propuestas iniciales; para los tipos de clasificación que se incluyen se señalan sus características fundamentales.[4]

Clasificaciones particiones

Por *clasificación partición* se quiere decir clasificación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos que son disjuntos unos con otros. Se puede ver que estas clasificaciones se establecen a partir de relaciones de equivalencia. Se tiene una relación de equivalencia y las clases corresponden a las clases de equivalencia.

En los primeros niveles se percibe como que se separa en grupos disjuntos un mundo de objetos (el que se está clasificando) o como que se buscan analogías y diferencias entre los objetos de un grupo o entre los de un grupo y los de otro.

Las condiciones que se imponen a las clasificaciones particiones son:

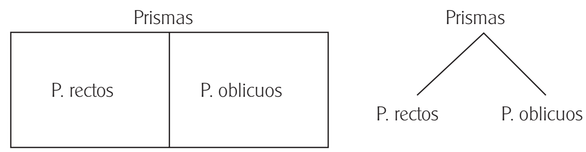
- Una vez determinado el universo y el criterio de clasificación, cada ejemplo del universo debe pertenecer a una y sólo a una clase. Las subfamilias establecidas deben ser disjuntas.
- Las distintas subfamilias establecidas en el universo objeto de clasificación deben de dar cuenta de la totalidad de éste.

Hay varios tipos de clasificaciones particiones: Clasificaciones establecidas con un criterio (y podemos variar el criterio considerado) y clasificaciones establecidas con varios criterios.

Un ejemplo de clasificación partición se tiene, por ejemplo, cuando en el mundo de los prismas, se establecen los prismas rectos (PR) y los prismas oblicuos (PO); o cuando, en este mismo universo, se distinguen los prismas cóncavos (PC) y

[4] En Guillén (1991, 1997, 1999) se desarrollan con más detalle los tipos de clasificación que se incluyen en esta propuesta. Las características fundamentales, las figuras y los diagramas que mostramos aquí están tomadas casi textualmente de estos trabajos.

Figura 5



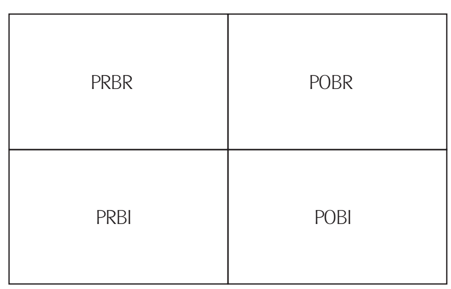
los prismas convexos (PX). La clasificación de estos ejemplos es una partición llamada *dicotomía,* y los diagramas de la figura 5 pueden representarla.

Si el problema se trata de forma general, considerando los criterios *X, Y, Z,* en la figura 2 se muestran *modelos* posibles para representar clasificaciones particiones establecidas con uno, dos o tres criterios.

Los aspectos fundamentales de una clasificación partición son el establecimiento de clases, el que se consideren particiones o particiones superpuestas y las relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento que hay entre las clases. Aunque en las clasificaciones donde se superponen las particiones, las clases resultantes, representadas por las casillas en el modelo, son disjuntas, también se pueden considerar las clases que corresponden a uno solo de los criterios y entonces aparecen relaciones de inclusión entre unas y otras. Pero en estas clasificaciones, las inclusiones no son lo que se considera como aspecto más importante.

Por ejemplo, como mostramos en la figura 6, cuando en el mundo de los prismas clasificamos con los criterios que permiten separar los prismas rectos de los oblicuos, y los prismas de bases regulares de los prismas de bases irregulares, tenemos establecidas cuatro familias de prismas disjuntas: Prismas rectos de bases regulares, prismas rectos de bases irregulares, prismas oblicuos de bases regulares, prismas oblicuos de bases irregulares.

Figura 6



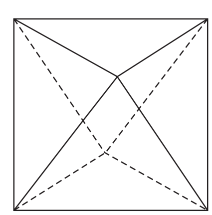
Al comparar cada una de estas familias con las que se obtienen al considerar sólo un criterio, aparecen relaciones de inclusión entre ellas: los prismas rectos de bases regulares están incluidos en la familia de los prismas rectos y en los prismas de bases regulares.

Al fijarnos en las características de las clasificaciones particiones, también se puede centrar la atención en el nombre que se da a las subfamilias establecidas. El problema de la clasificación-nombre se aborda poniendo nombres intuitivos: a una subclase que también cumpla una característica se le da el nombre de la clase aumentado con "algo" que unas veces hace referencia a la característica y otras veces no. En los ejemplos propuestos, el nombre hace referencia a la familia a la que pertenecen (los prismas); ahora bien, el ser recto o inclinado, o tener la base regular o irregular, sí que se refleja en el nombre de las subfamilias establecidas cuando clasificamos con el criterio correspondiente, pero la característica visual "tener o no tener entrantes" no se refleja en el nombre de cóncavos o convexos.

Cabe comentar también que, cuando un universo se clasifica con varios criterios, como se superponen las particiones, a un mismo elemento de una clase establecida con varios criterios se le pueden dar varios nombres diferentes, que provienen de cada una de las clasificaciones establecidas a partir de cada uno de los diferentes criterios. Por ejemplo, como mostramos en la figura 7, cuando en el mundo de los poliedros se consideran los criterios "ser antiprisma" y "ser bipirámide" se pueden separar en cada caso los poliedros que lo son de los que no lo son. Con los dos criterios se tienen establecidas cuatro clases. El octaedro pertenece a la clase de poliedros que son bipirámides y antiprismas. Además de

Figura 7

	Antiprismas	
	Sí	No
Sí	Octaedro	
No		



octaedro (nombre que le viene de que es poliedro regular), lo podemos llamar bipirámide cuadrada y antiprisma triangular.

Clasificaciones jerárquicas

Por *clasificación jerárquica* se quiere indicar clasificación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos de los más generales. Se puede ver que este tipo de clasificación, donde las clases están incluidas unas en otras, proviene de las relaciones de orden. Estas relaciones establecen una jerarquía entre los elementos del conjunto. Cuando todo par de elementos son comparables, están relacionados en un sentido –a*R* b o b*R* a–, entonces el orden es total; en caso contrario, cuando existe al menos una pareja de elementos que no son comparables, entonces el orden es parcial. En el ejemplo que damos en la figura 8b de la clasificación y ordenación jerárquica de los cuadriláteros, la relación es de orden parcial.

En los primeros niveles, las clasificaciones jerárquicas se perciben como organizar y estructurar un mundo conocido. Dado un mundo conocido (el universo), éste se organiza en diferentes estratos y se remarcan relaciones entre las familias establecidas.

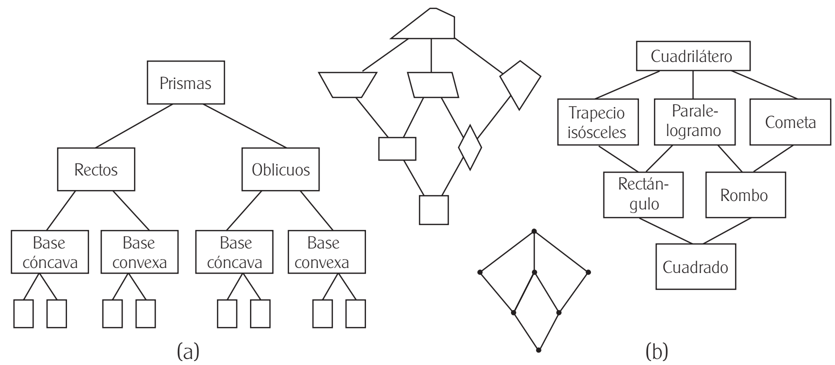
Los aspectos fundamentales de estas clasificaciones son el establecimiento de las clases y las relaciones de inclusión entre ellas. Se pueden representar mediante un modelo que es una red. Las clasificaciones inclusivas más naturales son en las que a las clases resultantes les damos el nombre genérico y uno o varios adjetivos.

En el ejemplo de la figura 8a el modelo está representado por un árbol, un caso particular de red. Otro ejemplo de este tipo, cuya representación no es un árbol, lo mostramos en la figura 8b y corresponde a una clasificación posible de los cuadriláteros. Respecto de estas clasificaciones también queremos subrayar que las familias establecidas pueden tener varios nombres: correspondientes a los de todas las familias que las contienen.

Clasificaciones con criterios de construcción

Vistas las clasificaciones particiones y las jerárquicas, cabe considerar ahora otras clasificaciones. En matemáticas, lo que se hace a veces al clasificar es fijarse en

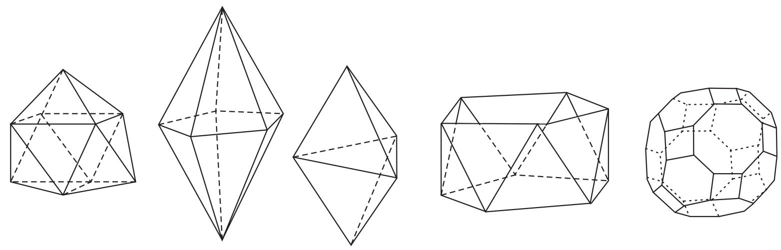
Figura 8



una característica de un conjunto de objetos y después se determinan todos los elementos que pertenecen a esa clase: en realidad, se hacen clasificaciones dicotómicas pues, por un lado, se consideran los objetos que cumplen la propiedad y, por otra, los que no la cumplen. En los primeros niveles se plantean actividades de identificación de formas que inciden en aspectos relativos a estas clasificaciones. Por ejemplo, cuando se pide que se identifiquen todos los ejemplos de una familia de sólidos (por ejemplo, de cilindros) en los objetos del entorno cotidiano del estudiante; o cuando dado un conjunto de objetos se quieren seleccionar aquellos que cumplen la(s) característica(s) de los objetos que se han considerado. Pero las actividades que se van a tratar en lo que sigue están inmersas en tareas de construcción.

En los primeros niveles, las *clasificaciones con criterios de construcción* se perciben como obtener ejemplos inmersos en procesos de construcción cuando no se construye al azar, sino siguiendo normas fijadas de antemano. Cabe señalar que cuando se utiliza material manipulable, también se puede clasificar. Los criterios que se pueden usar son condiciones que se imponen para construir; restricciones respecto al material que se puede utilizar o respecto de cómo juntar las caras alrededor de cada vértice del poliedro. Siguiendo las condiciones impuestas, se construyen los elementos de familias. Por ejemplo, cuando la norma que se impone para la construcción (criterio utilizado para clasificar) es que se utilicen polígonos regulares, se obtendrán *poliedros de caras regulares*. Entre ellos, los poliedros platónicos (regulares), los deltaedros –poliedros con caras triángulos equiláteros–, los poliedros arquimedianos –poliedros que tienen caras

Figura 9



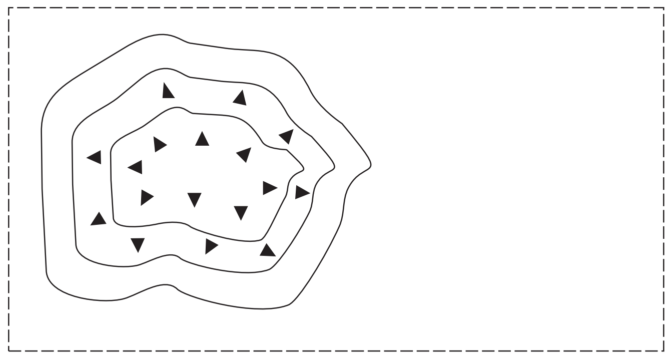
regulares de más de una clase y vértices iguales–, etc. En la figura 1 tenemos cuatro ejemplos y en la figura 9 tenemos otros cuatro. Y si la condición que se impone es que se utilicen polígonos iguales, se obtendrán *poliedros de caras iguales*; entre otros, los poliedros platónicos, los deltaedros, las bipirámides de base regular, etc. En la figura 1 tenemos cuatro ejemplos y en la figura 9 tenemos otros tres.

Puede notarse que estas familias ya se habían establecido también desde otros puntos de vista; se podían establecer basándose en observaciones –atributos– (considerando un criterio o varios) o por generalización (en las clasificaciones *a priori*). Sin embargo, la manera de obtenerlas es diferente y los aspectos relacionados con la clasificación, sobre los que se insiste en cada caso, también son diferentes.

En las clasificaciones basadas en observaciones, en cierto modo se tiene en mente todo el universo, los poliedros que pertenecen a una clase y los que no. Se hacen clasificaciones dicotómicas, esto es, se divide el universo y no nos preocupa si cada una de las partes tiene elementos o no. Sin embargo, cuando se construyen poliedros con unas condiciones impuestas, en realidad no se está clasificando, no se tiene el universo presente en su totalidad; el universo que se tiene en la cabeza se va ampliando a medida que se van construyendo más poliedros y, al finalizar, los poliedros en los que se piensa son exclusivamente los que se han construido. El modelo que lo representa se muestra en la figura 10.

Las clasificaciones basadas en criterios de construcción inciden en la determinación de los elementos de las clases; sólo después, si se quiere, se ve si las clases construidas están interconectadas o no. Sin embargo, como ya se ha dicho, en las clasificaciones basadas en observaciones, lo fundamental es el establecimiento de las clases, el que sean particiones o particiones superpuestas, o la relación de inclusión entre ellas.

Figura 10



Clasificaciones por analogía

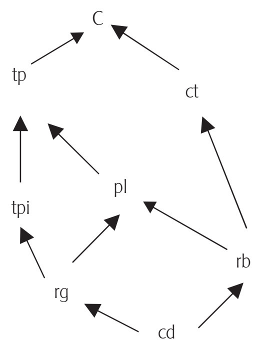
En un intento de relacionar el plano y el espacio, a continuación se va a considerar la que vamos a llamar *clasificación por analogía*. Se quiere decir con este tipo de clasificación que, una vez establecida una clasificación en el plano y delimitadas las analogías entre los elementos análogos del plano y del espacio, se tiene la clasificación en el espacio. Cuando se clasifica de esta manera, se subraya que algunos problemas resueltos en el plano se pueden aplicar para resolver los correspondientes en el espacio.

Los aspectos fundamentales de esta clasificación son el establecimiento de elementos análogos del plano y del espacio y la verificación de si se mantiene en el espacio una clasificación análoga a la del plano.

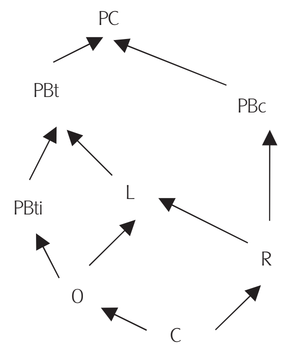
Hay que tener en cuenta que la analogía no siempre proporciona conjeturas correctas. Por ejemplo, cuando nos planteamos el problema de determinar todos los poliedros regulares, no podemos generalizar el resultado del problema análogo en el plano; mientras que hay infinitos polígonos regulares, sólo hay 5 poliedros regulares convexos. Ahora bien, la analogía sí funciona en la clasificación los prismas cuadrangulares. La clasificación de los cuadriláteros podemos aprovecharla para la clasificación de los prismas cuadrangulares. En la figura 11 mostramos diagramas de estas clasificaciones.[5]

[5] Los cuadriláteros implicados en el diagrama de la figura 11a son los siguientes: el cuadrado, *cd*; el rectángulo, *rg*; el rombo, *rb*; el paralelogramo, *pl*; el trapecio isósceles, *tpi*; la cometa, *ct*; y el trapecio, *tp*. Y los prismas cuadrangulares del diagrama 11b son: cubo, *C*; ortoedro, *O*;

Figura 11



(a)



(b)

Del párrafo anterior se desprende lo importante que puede ser establecer los elementos análogos entre el plano y el espacio y verificar si comparten relaciones que son pertinentes para el problema. En este caso, cabe señalar que, en los prismas de bases cometas, prismas de bases trapecios, isósceles o de bases trapecios se rompen las relaciones de igualdad y perpendicularidad entre los elementos límites (lado y cara lateral, respectivamente). En los prismas oblicuos, una igualdad de lados del polígono de las bases no implica que las caras laterales correspondientes sean iguales, ya que los ángulos de estas caras pueden cambiar. Pero aunque se rompen algunas relaciones entre los elementos análogos que aparecen en los diagramas correspondientes de elementos del plano y del espacio, puesto que estas relaciones sí se mantienen en algunas familias (por ejemplo, la propiedad del paralelogramo de *lados* opuestos iguales se verifica en los paralelepípedos: las caras opuestas son iguales) y para todas las familias de prismas cuadrangulares se siguen verificando las relaciones de paralelismo entre los elementos límites, consideramos que los elementos del plano y del espacio comparten relaciones que son pertinentes para el problema propuesto.

La construcción del diagrama que refleja una clasificación de los prismas cuadrangulares puede mostrar cómo se puede aplicar la analogía para explicar las relaciones de inclusión o no inclusión que hay entre pares de familias de prismas cuadrangulares: se pasa el problema al plano después de establecer los elementos

romboedro, *R*; paralelepípedo, *L*; prisma de bases cometas, *PBc*; prisma de bases trapecios isósceles, *PBti*; prisma de bases trapecios, *PBt*.

análogos y se explica ahí la respuesta (se construye el diagrama que refleja la clasificación de los cuadriláteros); después se hacen las traducciones correspondientes de los elementos análogos.

Así pues, trabajar la clasificación de los prismas cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc., centrando la atención en la analogía que existe entre elementos del plano y del espacio que comparten relaciones, nos remite a la clasificación de cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, etcétera.

En relación con estas clasificaciones, los trabajos de Fielker (1986, 1987) y Castelnuovo (1963, 1979) son de referencia obligada. Desarrollados desde el punto de vista de la enseñanza, hacen un estudio de la clasificación en el que van más allá de los trillados senderos euclideos, se soslaya el álgebra y se alejan del estudio rutinario de la clasificación de los triángulos y los cuadriláteros. En Fielker (1986, 1987) se presentan reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en nuestra enseñanza primaria y secundaria, sobre qué se enseña y cómo se enseña. Este autor expresa que aprender matemáticas incluye aprender a hacer matemáticas, lo que implica no sólo resolver problemas, sino crear problemas e inventar nuestras propias matemáticas, así como aprender las matemáticas de otras personas (Fielker, 1986, p. 6). Insiste en que al trabajar la clasificación:

> Son los niños quienes han de hacer las elecciones y no meramente llevar a cabo una clasificación rutinaria basada en la elección hecha por el maestro. La capacidad para tomar las propias decisiones es una parte esencial del proceso de clasificación y lleva consigo la capacidad de decidir sobre las decisiones, es decir, de alterarlas, cuando sea necesario, por razones de inconveniencia, inconsistencia o, tal vez, banalidad (Fielker, 1987, p. 13).

En la manera en que desarrolla el estudio, tanto para los cuadriláteros como para los hexágonos, plantea clasificaciones sucesivas, utilizando uno y dos criterios de clasificación que pueden referirse a igualdad de lados, paralelismo, número de ángulos rectos, simetrías, etc.; también se cambia la dimensión en la cual se realiza el estudio (de dos dimensiones se pasa a tres y a una dimensiones) y se relacionan entre sí polígonos (por ejemplo, el hexágono equiangular y el rectángulo) para los que se tienen ideas que no resultan convincentes para todos los que se relacionan.

Al centrarse en un criterio dado y en los cuadriláteros o hexágonos, las cuestiones que guían la actividad son: ¿Cuántos ejemplos distintos hay? ¿Cuáles son las posibilidades? ¿Qué significa... (el criterio que se está considerando)? ¿Qué pasa si sólo consideramos... (se indica sólo algunas condiciones del criterio que se está usando para clasificar)? ¿Qué ocurre si... (se modifica el criterio usado para clasificar)? ¿Cómo sabemos que no hay otros? ¿De cuántos modos se puede completar una parte del cuadrilátero (o hexágono) que se está considerando para que quede el polígono que cumpla las condiciones que se han impuesto? ¿Qué relaciones tienen los lados (los ángulos) de los cuadriláteros (hexágonos) que se han encontrado? ¿Cuáles longitudes elegir para los lados? ¿Cómo ordenarlas? ¿Cómo clasificar los diferentes casos? ¿A qué llamar diferentes? Clasificando los polígonos en general, considerando como variables en número de lados, ¿podríamos definir "isósceles" para un polígono y luego estudiar las consecuencias de cambiar el número de lados? ¿Qué ocurre si nuestra elección es limitarnos a los lados que concurren *formando ángulos rectos*? ¿Ángulos rectos internos y externos? ¿Resulta extraño pensar en el rectángulo como un hexágono? ¿Significa esto que el hexágono equiangular "corresponde" en cierto modo al rectángulo, del mismo modo que podríamos decir que el hexágono regular "corresponde" al cuadrado? ¿Cuadriláteros cruzados? ¿Cuáles son las propiedades que se conservan al cruzar los lados y cuáles aparecen como nuevas? ¿Cuadriláteros de una sola dimensión?

Puede notarse que con las actividades planteadas por Fielker (1986, 1987) se ha estimulado considerablemente la actividad matemática. Como él mismo subraya, "se han hecho surgir algunas hipótesis acerca de las relaciones entre las longitudes, hipótesis que quedan sin formular con precisión, poner a prueba, verificar, generalizar y demostrar" (Fielker, 1986, p. 8). Y si consideramos las cinco últimas cuestiones que hemos apuntado, el problema que abordan y la manera de hacerlo nos muestra una concepción de la enseñanza de las matemáticas y de la formación de conceptos, a la que ya hemos hecho referencia en la presentación, y que también se ve reflejada de nuevo en el último apartado de este trabajo.

Por otro lado, Castelnuovo (1963, 1979), con la construcción de los cuadriláteros con varillas (que tienen agujeros distribuidos a la misma distancia) que se juntan con chinchetas (las chinchetas se utilizan como mecanismos de unión), proporciona un entorno dinámico donde los cuadrados surgen como uno de los posibles rombos, el rectángulo como uno de los posibles paralelogramos, etc. Así, se puede explicar mediante la construcción que, por ejemplo, el cuadrado y el rombo tienen relación de inclusión: de todos los rombos que podemos construir, juntando los extremos de 2 varillas iguales, que se cortan en el punto medio de ambas perpendicularmente, el cuadrado es uno de ellos; cuando las varillas de partida son iguales. Por tanto, el cuadrado es un rombo particular. De la misma manera se puede explicar que el cuadrado es un rectángulo particular; las reglas de construcción ahora son que se parte de varillas iguales y que se juntan en el punto medio. El cuadrado es uno de los posibles rectángulos que se construyen al juntar los extremos de estas dos varillas de partida una vez que se han juntado por el punto medio de ambas; el cuadrado surge cuando las varillas se cortan perpendicularmente. Se puede concluir pues que *el cuadrado es un rombo y un rectángulo* particular. Si en la construcción imponemos otras condiciones para juntar las varillas que funcionan como diagonales de los cuadriláteros, se pueden establecer las relaciones siguientes: el rombo es un paralelogramo y una cometa particular, el rectángulo es un paralelogramo y un trapecio isósceles particular.[6]

Para finalizar este apartado, cabe centrar la atención en los nombres que aparecen en los diagramas de la figura 11. Puesto que unos corresponden a elementos del plano y otros a elementos del espacio, puede aparecer una nueva dificultad. En diagramas que construyen los estudiantes para estas clasificaciones, con frecuencia aparecen nombres de sólidos y de polígonos en cada uno de ellos.

ALGUNAS CLASIFICACIONES. ACTIVIDAD QUE PERMITEN ABORDAR

Analizados los diferentes tipos de clasificación que se incluyen en nuestra propuesta para enseñar-aprender este proceso matemático con alumnos de magisterio, en este apartado indicamos la actividad matemática que permiten abordar algunas clasificaciones concretas incluidas en esta propuesta. Se consideran los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides como universo de clasificación; y se estudian las clasificaciones que llevan a distinguir los rectos de los oblicuos, y las que separan los de base(s) regular(es) de los de base(s) irregular(es).

LOS PRISMAS, ANTIPRISMAS, PIRÁMIDES Y BIPIRÁMIDES, RECTOS Y OBLICUOS. AMPLIACIÓN DEL UNIVERSO OBJETO DE CLASIFICACIÓN

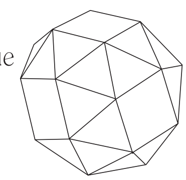
En este subapartado se centra la atención en los prismas rectos y oblicuos. Juntando dos polígonos (construidos con cartulina dura) con gomitas (juntan los vértices que se corresponden) se puede obtener la unidad base que presenta Castelnuovo (1979, citado en Guillén, 2004) para generar prismas rectos y oblicuos.

[6] En Guillén (1997, pp. 292-293; 1999) se trata con detalle cómo se puede proceder para facilitar que los estudiantes lleguen a establecer estas relaciones así como las dificultades que encuentran para ello.

Cabe mirar la figura 5 y revisar de nuevo las características fundamentales de la clasificación llamada dicotomía.

Lo que se destaca en este subapartado es que esta clasificación permite discutir sobre lo que puede ocurrir al ampliar el universo objeto de clasificación cuando se clasifica con un criterio dado.

En la experimentación que realizamos con niños de 12 años tuvo lugar la siguiente conversación, que informa sobre lo que puede ocurrir en clase al ampliar el universo objeto de clasificación cuando se clasifica con el criterio ser recto u oblicuo (Guillén, 1997):



E1: Y ése ¿dónde va? [*se refiere al cubo chato*] Yo creo que como está un poco torcido...

E3: Pero es que mira... se entra por aquí...

E1: Pero aquí hay una cara y aquí otra paralela que no está desviada [*se refiere a dos caras cuadradas opuestas*].

E2: Pero mira... este cuadrado y éste están... no están igual.

E1: Sí, están girados, pero en éstos también, en los antiprismas.

E3: Pero está como chafado, mira cómo se mete para adentro...

E2: Ése es de ésos que se meten para adentro.

E3: ¿Los cóncavos?

E1: Pero no se mete tanto. No hay un vértice así... [*hace un gesto con la mano como que se mete para adentro*]. Aquí se mete todo...

P: ¿Qué pensáis? ¿Es recto u oblicuo?

E1: Pues yo, ya no lo sé.

E3: Yo tampoco.

E2: Yo tampoco, pero creo que es recto.

P: Lo que quiero que notéis es que cuando no consideramos prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, no se tiene tan claro dónde incluir algunos sólidos, si en los rectos o en los oblicuos.

Como refleja este protocolo, clasificar con el criterio ser recto u oblicuo lleva a concluir que o bien uno se queda en un "trocito" de mundo de los poliedros (el de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides), o bien se tiene que precisar la idea de sólido recto y oblicuo para poder asignar cualquier modelo en una de las familias establecidas.

Con esta clasificación, se hace notar que resulta necesario nombrar siempre el universo que se somete a clasificación, al igual que el criterio que conduce a establecer las familias y las familias que se establecen.

Respecto de las tareas de descripción de las familias, también cabe hacer comentarios. En el subapartado siguiente se indican dificultades que conllevan estas tareas, dificultades que provienen de las ideas que pueden tener los estudiantes sobre los conceptos implicados en ellas o por los problemas de lenguaje que conlleva expresarlas de manera precisa.

Los prismas rectos y oblicuos. Sobre descripción de familias. Dificultades

En este subapartado se centra la atención en las propiedades de estas familias (prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides) relativas a la altura y a los diferentes tipos de ángulos de los sólidos.

Cabe señalar que, para enumerar las propiedades relativas a la altura, se tiene que admitir que la altura de un prisma oblicuo, dibujada desde un punto de la base (de un prisma o de un antiprisma) o desde el ápice (en una pirámide o una bipirámide), puede caer fuera del prisma o antiprisma (pirámide o bipirámide). Tal como indicamos en Guillén (1997, pp. 275-276) en las experimentaciones que hemos realizado hemos constatado que algunos estudiantes tienen incluido en el objeto mental de este concepto el atributo de que tiene que quedar dentro del sólido, o en la superficie; o de que la altura de un sólido tiene que unir centros de bases (se refieren a los centros de gravedad), o ápices y centros de bases; esto es, bastantes estudiantes tienen un objeto mental de altura de un prisma basada exclusivamente en los prismas rectos. En los prismas oblicuos también identifican la longitud de la altura y la de la arista lateral. Otros estudiantes, aunque no identifican ambas longitudes, no pueden indicar cuál es la altura del prisma oblicuo; expresan que "como está torcido...".

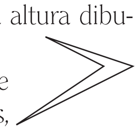
Cuando cuestionamos a niños de 12 años qué altura había que poner a un estante para que el prisma oblicuo cupiese cuando estaba apoyado en una de sus bases, hubo niños que respondieron, que la longitud de las aristas laterales. También hubo estudiantes de magisterio que dieron esta respuesta. Otros niños la señalaron correctamente, aunque no pudieron expresar una idea de ella en términos geométricos: "Pues de aquí abajo a aquí" [Señaló perfectamente la altura: un dedo lo puso en un vértice de la base de arriba y el otro en la mesa siguiendo la "vertical"].

En todas nuestras experimentaciones (con niños de 12 años y con estudiantes de magisterio), hemos comprobado que los estudiantes no son reacios a admitir, una vez señalado por el profesor, que la altura de un prisma oblicuo, dibujada desde un punto de la base (de un prisma o de un antiprisma) o desde el ápice (en una pirámide o una bipirámide), puede caer fuera del prisma o antiprisma (pirámide o bipirámide). Podemos encontrar la explicación en el hecho de que en los libros de texto usuales de primaria se presenta dibujada la altura de un prisma y de una pirámide oblicuos que reflejan esta característica visual. De hecho, algunos niños de 12 años expresaron que tenían en cuenta estos dibujos:

> E1: Yo ahora pienso que a lo mejor sería desde el centro del prisma para abajo esa altura, porque cuando lo tienes recto [*y busca un modelo en el que apoyarse; coge un prisma de bases irregulares*], éste vamos a suponer, si esto fuera el centro [*y lo señala*] se mediría de ahí abajo, entonces ahí igual.
> P: ¿Y esta línea no es recta? [*Con la mano señala una recta inclinada.*]
> E2: Esa línea es inclinada.
> E1: Pero es recta. [*Se ríe.*] O sea, horizontal, o sea, es que no sé...
> E3: Perpendicular a la base esa. Y si se sale como aquí [*señala un prisma oblicuo*], pues entonces perpendicular a la mesa.
> E1: Sí, como en el dibujo de los libros.

En las experimentaciones también hemos verificado que muy pocos estudiantes de magisterio enumeran propiedades de las familias tratadas, relativas a su altura, a menos que el profesor lo indique explícitamente; al trabajar esta clasificación, se puede dirigir la actividad para que los estudiantes caractericen estas subfamilias en términos de altura. Un prisma o antiprisma (pirámide o bipirámide) es *recto* cuando al dibujar la altura desde el centro de una base (desde el ápice) cae en el centro de la otra base (cae en el centro de la base o pasa por ella y cae en el otro ápice). En los prismas y antiprismas, cuando no ocurre esto, e incluso la altura puede caer fuera de la base del sólido, los sólidos son entonces *oblicuos o inclinados*.

Estas actividades permiten también remarcar que, mientras que en los prismas y antiprismas rectos, la altura dibujada desde un punto de la base no va a caer fuera de la otra base, en las pirámides y bipirámides, rectas, la altura dibujada desde el ápice puede caer fuera del polígono de la base.



Las pirámides rectas presentan un caso interesante respecto de los prismas y antiprismas. Se tienen ejemplos de pirámides rectas, de aspecto francamente raro, donde el ápice se corresponde con un punto que no pertenece al polígono; esto ocurre cuando la base es un polígono cóncavo que tiene el centro fuera de él. Por ejemplo, cuando la base es el polígono de la figura.

Estos polígonos también pueden utilizarse como bases de los prismas, pero ahora lo que se puede discutir es si al considerar los prismas que tienen estas bases se siguen manteniendo en esta familia todas las propiedades relativas a la altura que se habían enumerado sin haber pensado en estos modelos como ejemplos. Se puede aclarar que consideramos como centro del polígono el centro de gravedad y que se supone que existe, aunque quede fuera del polígono (Guillén, 1997, p. 276).

Con respecto a las propiedades relativas a los diferentes tipos de ángulos de los sólidos, cabe subrayar las grandes dificultades que presentan para los estudiantes. Como se ha señalado en Guillén (1997), puede ser que no se midan correctamente los ángulos diedros, que no se aplique correctamente la idea de ángulos de los vértices, o que se presenten problemas de lenguaje. Por ejemplo, la propiedad de los prismas rectos –"Los ángulos diedros que forman las caras laterales entre ellas coinciden con los ángulos correspondientes del polígono de la base"– se asocia a todos los prismas, porque los estudiantes no miden adecuadamente los ángulos diedros de los prismas oblicuos: en vez de seleccionar segmentos perpendiculares a la arista, seleccionan los lados correspondientes de la base. Para que los estudiantes descubran esta propiedad se puede prestar la atención en si se verifica o no en ejemplos concretos de prismas rectos y oblicuos; cabe fijarse en la medida del ángulo diedro de dos caras laterales y, a continuación, en la medida del ángulo correspondiente de la base.

Las experimentaciones realizadas con niños de 12 años han mostrado que éstos tienen dificultades para seleccionar de manera adecuada los segmentos que reflejan la medida del ángulo diedro correspondiente (los perpendiculares a la arista que forman las caras) y se muestran reacios a abandonar la idea de que hay que elegir los segmentos paralelos a los lados de la base. Los segmentos que suelen elegir los estudiantes de magisterio también son los paralelos a los lados correspondientes de las bases, pero no muestran resistencia a aceptar que los segmentos que hay que seleccionar para medir un ángulo diedro son, uno de cada cara que forman el ángulo, perpendiculares a la arista y que se juntan en un vértice. Ellos mismos llegan a expresarlo cuando se les proporcionan dos pentágonos de polydron o de troquelados unidos (representaban un ángulo diedro) en los que se ha dibujado previamente la altura desde un vértice y los polígonos se han juntado de manera que las alturas concurren en el mismo punto de la arista que ellos forman al juntarse. Con este modelo, los estudiantes de magisterio pueden observar que los segmentos que mejor representan la abertura de los pentágonos son los que hay dibujados y descubrir así que estos segmentos son perpendiculares a los lados de los pentágonos o a la arista que forman al juntarse.

Ahora bien, verificar si en los prismas "los ángulos diedros de las caras laterales coinciden siempre con el ángulo correspondiente del polígono de la base" no resulta tan sencillo; ni aun utilizando material, resulta inmediato convencerse de que ese enunciado no es una propiedad de los prismas pues sólo la verifican los prismas rectos. Incluso cuando la comprobación se hace en modelos de prismas oblicuos, tanto los niños de 12 años como estudiantes de magisterio aceptan esta afirmación como propiedad.

En las experimentaciones realizadas con niños de 12 años, disponíamos de varillas, que los niños podían utilizar como representantes de los segmentos que había que elegir, y de un dispositivo comercializado para medir ángulos diedros. Los niños disponían de un modelo de prisma oblicuo, colocaban las dos varillas juntas perpendicularmente a la arista lateral y las desplazaban paralelamente hacia la base. Pero, en este caso, el trabajar con varillas creó nuevos problemas. Al llegar al vértice del prisma, giraban el ángulo formado por las varillas hasta hacerlo coincidir con el ángulo de las bases. Así, no aceptaban que el ángulo diedro de las caras laterales no coincidía con el correspondiente de la base. Las siguientes respuestas dan prueba de ello.

> E1: Mira, ponemos esto [*las varillas*] paralelo a esto... más o menos; paralelo no, perpendicular [*las coloca perfectamente; se preocupa de que las varillas no se abran más ni menos y las lleva al vértice del prisma*]. Y no. No, no... ¿No daaa? No, pero sí que da. [*Vuelve a hacerlo.*]
>
> E2: Haces así, lo pones así, sigo subiendo y aquí [*en el vértice*] éste se para [*la varilla que está sobre un lado del polígono de la base*] y éste sigue subiendo. Y llega un momento en que coincide...
>
> E1: Aquí, si lo subes todo paralelo [*las dos varillas*], no. Pero si subes éste [*una varilla*] más, sí que es. ¿No? Pero los ángulos son iguales, aquí y aquí, y aquí... [*las dos varillas con una abertura fija las coloca en diferentes sitios giradas sobre la mesa*]. Mira, si un ángulo lo pones aquí y es de 90° o lo pones aquí da lo mismo, porque sigue siendo de 90° [*lo muestra, desplazando el ángulo que ha construido con las varillas*]. Y si lo pongo de pie también.
>
> Mira, yo no la cambio [*se refiere a la abertura*] y sí que da. Nadie lo puede negar. Dejo la misma abertura. No me entendéis. Sólo hago así [*hace gesto de girar*], pero dejo la misma abertura...

Cuando indicamos que al mover la varilla dejaba de ser perpendicular a la arista, se aceptó que efectivamente dejaba de serlo, pero su resistencia a cambiar de idea lo llevó a no tenerlo en cuenta, y a justificarlo de nuevo, basándose en el hecho de que los ángulos no cambian porque cambie su posición.

E1: A ver, una pregunta: si tenemos dos lados así, mide 90° ¿no? Y si los tenemos así también, ¿no? Pues ya está... [*toma dos varillas unidas*] O sea que si lo pongo así y así [*mueve el ángulo que ha construido para colocarlo en diferente posición*] es que ya no está lo mismo...

Sin embargo, cuando dibujamos en los prismas varios segmentos paralelos a los elegidos, sobre varios puntos de la arista, de manera que nos íbamos acercando hacia la base, e introdujimos el instrumento de medida para medir ángulos diedros (permite dejar fija una abertura, cosa que no ocurre con las varillas), que lo colocábamos sobre estos segmentos y sobre los lados de la base, se aceptó de inmediato que los prismas oblicuos no verifican la propiedad. Es decir, que en los prismas oblicuos algunos ángulos diedros de las caras laterales no coinciden con el ángulo correspondiente del polígono de la base.

P: Bueno, vale, vamos a medir los ángulos con este instrumento que no cambia la abertura. [*elige un prisma muy oblicuo y en él selecciona un ángulo diedro que remarca mucho que no coincide con el ángulo correspondiente de la base. Muestra en un modelo cómo medir el ángulo que forman dos caras.*

Todos los niños quieren medir ángulos diedros con este instrumento de medida].

E1: A ver. Lo pongo perpendicular... Ya está. Lo llevo a la base... Y no coincide. Bueno... pero... Algunos, no todos.

P: Hazlo con cuidado, para que realmente lo pongas perpendicularmente a la arista y no cambies la abertura al sacarlo, y mira a ver si coinciden o no en los demás.

E1: [*Mide el ángulo diedro con el instrumento y dice*] Por muy poco...

E2: Claro. Pero no coincide.

E3: Eso... no coincide.

Los estudiantes de magisterio no mostraron tantas resistencias para llegar a aceptar que el enunciado era propiedad de los prismas rectos, pero la aceptación tampoco fue inmediata a partir de argumentos basados en los segmentos que formaban el ángulo diedro. Sólo al ver prismas de bases regulares (por lo que tenían ángulos iguales) que además estaban muy inclinados, visualizaron claramente que los ángulos diedros de las caras laterales no eran iguales, y así concluyeron que cada uno de ellos no podía ser igual al correspondiente de la base

Otra propiedad que también implicó grandes dificultades para que algunos estudiantes de magisterio la asociaran a los prismas rectos de bases regulares fue: "Los ángulos de los vértices son iguales"; en vez de aplicar la idea de ángulo de los vértices como "la suma de los ángulos de los polígonos que se juntan en un vértice", se aplicaba que en ese vértice se juntan ángulos de dos medidas (los de las caras laterales, que son de 90° cada uno, y el de la base).

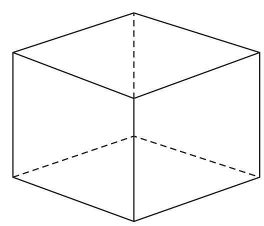
Respecto de la descripción de los prismas oblicuos, también cabe subrayar la dificultad que implica para los estudiantes obtener propiedades de esta familia a partir de la negación de las propiedades de los prismas rectos. En Guillén (1997), se indica que es muy usual que no se niegue de manera matemáticamente correcta el cuantificador *todo* que aparece en ellas. Si bien algunos estudiantes identifican como prismas oblicuos modelos con alguna cara lateral rectángulo o cuadrado (todas ellas no lo son), como propiedades de los prismas oblicuos indican "ninguna cara lateral es rectángulo", "no tiene rectángulos en sus caras laterales", etc., propiedades que excluyen los ejemplos mencionados.

Prismas rectos y oblicuos, prismas de bases regulares e irregulares. Acerca de la formación de conceptos

En este subapartado se trata un problema especialmente interesante que ya hemos adelantado en la presentación; tiene que ver con la formación de conceptos. Teniendo en cuenta la nota 2, en la que se indica que cuando se habla del *concepto* se considera el concepto que se deriva de su definición matemática, en este subapartado se trata el proceso de elaboración de definiciones.

La manera de tratar un problema refleja a veces una concepción de la enseñanza de los conceptos. Con el problema que vamos a tratar aquí se refleja una concepción de la enseñanza de las definiciones en las que éstas se conciben como el final de un largo proceso (examen de ejemplos, análisis de propiedades, clasificaciones, etc.) y, además, parece que los conceptos no se terminan de adquirir nunca. Esto es, consideramos que las definiciones tampoco son inmutables. Compartimos con Puig (1997) una concepción de la naturaleza de los objetos matemáticos que no supone que hay un objeto ideal preexistente y lo que hace la actividad matemática es descubrir sus propiedades; sino que consideramos que los conceptos no permanecen inmutables una vez creados, y lo que nos interesa en la enseñanza es la creación de nuevos conceptos al estilo de Lakatos: "El resultado del proceso que presenta Lakatos de tensión entre conceptos, teoremas y pruebas no es la delimitación del verdadero concepto de poliedro que se correspondería al objeto ideal preexistente, sino la creación de nuevos conceptos" (Puig, 1997, p. 59).

En lo que sigue, se van a considerar algunos paralelepípedos para explicar cómo el problema de dar nombre a algunos poliedros puede suponer un problema de definición o un problema de clasificación y de definición. Esta actividad puede servir como situación para mostrar cómo ante la aparición de un elemento que no se había previsto, ejemplo de un determinado concepto, uno puede seguir caminos diferentes: o se revisa la definición dada para este contenido geométrico o "uno se retira a un mundo más seguro", esto es, en nuestro problema concreto, restringimos el universo objeto de clasificación con el criterio considerado.



La actividad comienza considerando el modelo de la figura formado por cuatro cuadrados y dos rombos y uno se cuestiona si es un prisma recto o un prisma oblicuo. Si la cuestión se plantea a diferentes estudiantes, es muy probable que estos prismas se identifiquen como prismas rectos y como prismas oblicuos, especialmente si los modelos se muestran colocados en diferentes posiciones (apoyados en una cara cuadrada y en una cara rómbica no cuadrada).

Puesto que una de las características que tiene un gran peso en el objeto mental que los estudiantes construyen para este tipo de clasificación es que estas subfamilias son disjuntas, caben dos posibilidades: o se tiene que precisar la idea de prisma recto y oblicuo para que las familias de los prismas rectos y oblicuos sean excluyentes o disjuntas, o se rompe con esta idea y se acepta que estas subfamilias tengan elementos comunes, con lo que la clasificación establecida no sería una dicotomía.

A continuación, se presentan las "ideas" que dieron un niño de 12 años (E1) y un alumno de magisterio (E2) cuando, en sesiones de laboratorio o en el contexto de clase respectivamente, abordamos este problema:

> E1: No, sí. Mira. Si la mayoría... Si al ponerlo de distintas formas la mayoría son oblicuos, pues entonces yo digo que es oblicuo, y si la mayoría son rectos, pues entonces yo digo que es recto.

E2: Un prisma es recto si podemos encontrar dos caras que se juntan con rectángulos y, en otro caso, el prisma es oblicuo.

Este problema es mucho más interesante continuando con clasificaciones establecidas con criterios relativos a las bases. Con la clasificación que separa los poliedros "que tienen base o bases" de los que no las tienen, se puede discutir, al igual que se ha hecho al separar los sólidos rectos de los oblicuos, sobre lo que puede ocurrir al ampliar el universo objeto de clasificación cuando se clasifica con un criterio dado.

Y la clasificación que centra la atención en la regularidad del polígono de las bases proporciona un problema para mostrar de nuevo cómo se van perfilando las ideas de los conceptos a medida que aparecen objetos que nos obligan a ello. El paralelepípedo del que hemos hablado, formado por cuatro cuadrados y dos rombos, se puede incluir en las dos familias establecidas (las de bases regulares y las de bases irregulares), dependiendo de los pares de caras que se elijan como bases.

Si intentamos evitar este problema de la misma manera que cuando se planteó un problema análogo al identificar el modelo como prisma recto u oblicuo, para los prismas de bases regulares y para los prismas de bases irregulares surgirán ideas como las siguientes: un prisma es de bases regulares si podemos encontrar dos caras regulares que pueden ser bases de esa familia. En caso contrario, es de base irregular.

Pero al clasificar con los dos criterios conjuntamente, de nuevo surgen problemas. Llegados a este punto, tendremos que elegir revisar de nuevo las ideas que se han dado para los prismas rectos y oblicuos, y de bases regulares e irregulares, o aceptar que las clasificaciones que se establecen no son disjuntas. A continuación, se da cuenta de cómo se continuó en una de nuestras experimentaciones con estudiantes de magisterio. Se indican algunas propuestas de los estudiantes:

E1: Yo propongo que para los modelos para los que se pueden elegir varios pares de caras como bases, elijamos un par u otro según si cumple o no la propiedad que nos interesa resaltar. Por ejemplo, entre rectos y oblicuos, nos fijamos en ser recto, y las bases que consideramos son las que llevan a ello (los rombos). Y lo mismo para los prismas de base regular e irregular; las bases que consideramos son las que llevan a que sea de base regular (los cuadrados).

[...]

E2: ¿Que ocurre cuándo clasificamos con los dos criterios ser recto u oblicuo y ser de base regular o irregular? ¿Cómo consideramos este modelo, recto de base irregular u oblicuo de base regular? ¿O lo consideramos también de la familia que cumple ambas propiedades que nos interesan, los prismas rectos de bases regulares (PRBR)?

E3: Pero es que si los consideramos rectos de base regular, los pares de bases que hay que elegir en cada caso no son los mismos. Para verlo como recto, se coge de base el rombo y para verlo de base regular, el cuadrado. ¿Eso puede ser?

La propuesta más aceptada fue:

Dado que todo par de caras pueden ser bases, podemos elegir cualquier par de caras y ser coherente con ello.

Así, el modelo se va a incluir en recto de base irregular u oblicuo de base regular según las preferencias de los estudiantes. Se resalta también la necesidad de que se indiquen las caras que se han elegido como bases y que también se podría elegir otra opción, con lo que los resultados serían diferentes.

En las experimentaciones realizadas, llegados a este punto, se revisan las clasificaciones implicadas en el problema y se hace notar cómo la observación de que los poliedros tienen bases o base no es un buen criterio de clasificación considerando cualquier universo. La dificultad que conlleva precisar lo que se entiende por base o bases de los poliedros lleva a que se opte por restringir el universo, para clasificarlo con este criterio, a un "trocito" del mundo de los poliedros (el formado por los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides).

Planteado de nuevo el problema en el que estamos implicados, y una vez observado que el problema aparece porque en ese modelo todo par de caras pueden ser bases del prisma, los estudiantes proponen eliminar también del "trocito de mundo" objeto de clasificación con este criterio, el de las subfamilias que tienen todas sus caras de la misma familia, para las que todo par de caras pueden ser bases. La respuesta siguiente de uno de los estudiantes muestra lo razonable que encuentran esta solución:

Claro, si todas las caras pueden ser bases, para qué hablar de base regular, tendrían que serlo todas también, porque si no, ¿cuál de todas cogemos para mirar si es regular o no? Si pueden ser todas ellas bases... Según la que coja me sale una cosa u otra... Mejor quitar esa familia también.

REFLEXIÓN FINAL

Queremos resaltar que la actividad matemática que surge a partir de una situación/problema puede ser un criterio para decidir si incluirla o no en una propuesta para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La actividad de clasificar es fundamental en las matemáticas, pero hay que prestarle más atención en las clases de matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar mi gratitud a la doctora. Olimpia Figueras, responsable del proyecto "Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas", por su invitación para que impartiera una conferencia sobre "La clasificación en el marco del modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos", a fin de dar a conocer parte del trabajo desarrollado en mi tesis doctoral, en el "Segundo Seminario sobre Rendimiento Escolar en Matemáticas". También quiero agradecer a la Escuela Normal Superior del Estado de México (ENSEM), por haber propiciado este encuentro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Burger, W.F. y J.M. Shaughnessy (1986), "Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 17, núm. 1, pp. 31-48.

Castelnuovo, E. (1963), *Didactica della Matematica Moderna*, Florencia, La Nuova Italia. [Trad. castellana: *Didáctica de la matemática moderna*, México, Trillas, 1970.]

—— (1979), *La Matemática. La Geometría*. [Trad. catalana: *La matemática. La geometría*, Barcelona, Ketres, 1981.]

Corberán, R., A. Gutiérrez, P. Huerta, A. Jaime, J.B. Margarit, A. Peñas y E. Ruiz (1994), *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.

Craine, T.V. y R.N. Rubenstein (1993), "A Quadrilateral Hierarchy to Facilitate Learning in Geometry", *The Mathematics Teacher*, vol. 86, núm. 1, pp. 30-36.

De Villiers, M.D. (1987), "Research Evidence on Herarquical Thinking, Teaching Strategies and the Van Hiele Theory: Some Critical Comments", *Research Unit for Mathematics Education (Rumeus),* núm. 10, Stellenbosch, Sudáfrica.

—— (1994), "The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals", *For the Learning of Mathematics,* vol. 14, núm. 1, pp. 11-18.

De Villiers, M.D. y R.M. Njisane (1987), "The Development of Geometric Thinking among Black High School Pupils in Kwazulu (Republic of South Africa)", en J.C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the 11th International Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Montreal, vol. 3, pp. 117-123.

Fielker, D.S. (1981-1983), "Removing the Shackles of Euclid", *Mathematics Teaching,* pp. 95-104. [Trad. castellana: *Rompiendo las cadenas de Euclides,* Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia, 1987.]

—— (1986), "Hexágonos", *Epsilon,* núm. 8, pp. 5-10.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Dordrecht, D. Reidel.

Fuys, D., D. Geddes y R. Tischler (1988), "The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents", *Journal for Research in Mathematics Education,* monografía núm. 3, Reston, NCTM.

Guillén, G. (1991), *El mundo de los poliedros,* Madrid, Síntesis.

—— (1997), *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje,* tesis de Doctorado, Valencia, Universitat de València. [Publicada en 1999 en la colección: Tesis doctorals en Microfitxes, Valencia, Universitat de València.]

—— (1999), "Una clasificación inclusiva de prismas cuadrangulares. Dificultades", *Actas de las IXas JAEM,* Lugo, septiembre, pp. 535-537.

—— (2001), "Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de magisterio", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 19, núm. 3, pp. 415-431.

—— (2004), "El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad geométrica", *Educación Matemática,* vol. 16, núm. 3, pp. 79-101.

Maraldo, S. (1980), "Properties of Quadrilaterals", *The Mathematics Teacher,* vol. 73 núm. 1, pp. 38-39.

Mayberry, J. (1981), *An Investigation of the Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers,* Ann Arbor, Univ. Microfilms.

Puig, L. (1997), "Análisis fenomenológico", en L. Rico (ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* Barcelona, Horsori, pp. 61-94.

Van Hiele, P.M. (1986), *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education,* Londres, Academic Press.
Vinner, S. (1983), "Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* vol. 14, pp. 293-305.

DATOS DE LA AUTORA

Gregoria Guillén Soler
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia,
España
Gregoria.Guillen@uv.es