Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

¿Cómo saben los alumnos que lo que aprenden en matemáticas es cierto? Un estudio exploratorio[1]

Alfinio Flores Peñafiel

Yo sé que funciona porque mi maestra no me mentiría.

UN ALUMNO DE 12 AÑOS DE SEXTO GRADO

Resumen: Se dan ejemplos de los esquemas de justificación utilizados por los alumnos de los grados 5 a 10. Los alumnos respondieron a las preguntas *1)* "¿Qué has aprendido recientemente en matemáticas?" y *2)* "¿Cómo sabes que es cierto?" Las entrevistas fueron conducidas por futuros maestros o maestros en ejercicio. Se dan recomendaciones de lo que pueden hacer los maestros para aumentar la habilidad de justificación de sus alumnos en matemáticas.

Palabras clave: esquemas de justificación, demostración matemática, esquemas de prueba, argumento convincente, evaluación por entrevista.

Abstract: We give examples of schemes of justification used by students in grades 5 through 10. Students answered the questions: *1)* "What have you learned recently in mathematics?" and *2)* "How do you know it is true?" Interviews were conducted by prospective and in-service teachers. We give a few suggestions of what teachers can do to increase their students' ability to justify in mathematics.

Keywords: justification schemes, mathematical demonstration, proof schemes, convincing argument, interview assessment.

Fecha de recepción: 3 de diciembre de 2004.

[1] Este artículo está basado en entrevistas conducidas por Sean Berrett, Angie Bilbao, Jamie Bolster, Amelia Clarkson, Hyun Jung Kang, Sarah Kinner, Chris Lemke, Hsiu-Mei Lin, Dmitri Logvinenko, John Lowery, Megan Murphy, Rachel Neuharth, Julia Petersen, Koyal Roy, Jeffrey Samson, Jeanne Scown, Ambur Sedlar, Jane Smoudi, Sarah Winzeler.

Los estudiantes de los grados intermedios (6 a 9) aprenden gran cantidad de matemáticas que van más allá de hechos que son obvios o que pueden verificarse fácilmente, tales como operaciones con números racionales o negativos e identidades algebraicas. Algunos de los conceptos que aprenden fueron desarrollados por los matemáticos a lo largo de varios siglos y no son, de manera alguna, evidentes. Este artículo describe diferentes modos en los que los alumnos justifican lo que han aprendido en matemáticas. No se pretende discutir el significado filosófico de verdad en matemáticas, sino simplemente presentar cómo los alumnos saben que las afirmaciones que aprendieron en la escuela, tales como que "un negativo por un positivo es siempre negativo" o que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, son efectivamente ciertas.

Como muestra la cita del inicio, la mayoría de los alumnos de estos grados tienen confianza en sus maestros y están convencidos de que lo que están aprendiendo es cierto. Los alumnos rara vez cuestionan las matemáticas que se enseñan en las escuelas. Sin embargo, no todo lo que los alumnos piensan que es cierto resulta ser de veras cierto. Algunas veces los alumnos no recuerdan correctamente lo que dijo el maestro o malinterpretan la información recibida. Por ejemplo, una alumna de 13 años de 8° grado dijo: "Aprendí cómo hacer los números irracionales y racionales... Un número racional es un número donde se repite como 0.4646464646... Un número irracional no se puede convertir en un decimal... Es cierto, porque mi maestro me dijo que lo era". (La verdad, desde luego, es que un número irracional puede convertirse en un decimal, pero la expansión decimal será infinita y no periódica.) Es por tanto importante que los alumnos desarrollen métodos para ser capaces de justificar por sí mismos que un procedimiento sea correcto o que un hecho sea verdadero. Conforme las matemáticas que estudian se vuelven más abstractas y sofisticadas, paralelamente los estudiantes deben desarrollar sofisticación matemática en sus maneras de justificar lo que han aprendido. Como maestros, debemos entender los modos que los alumnos utilizan, a fin de poder partir de esos métodos y ayudarlos a desarrollar su habilidad para esgrimir argumentos convincentes en matemáticas.

A continuación daremos una breve descripción de algunos trabajos previos en el área de justificación y prueba en el aprendizaje de las matemáticas. Luego describiremos el marco teórico utilizado (esquemas de justificación), así como los métodos y procedimientos. La parte principal de este artículo proporciona ejemplos de los esquemas de justificación utilizados por los alumnos entrevistados. Al final del artículo, expondremos algunas recomendaciones de lo que pueden hacer los maestros para aumentar la habilidad de justificación de sus alumnos.

INVESTIGACIONES SOBRE PRUEBAS Y JUSTIFICACIONES

Varios autores han señalado las diferentes funciones que tiene la demostración en la enseñanza de las matemáticas (Bell, 1976; De Villiers, 1999; Hanna y Jahnke, 1996). Entre las funciones mencionadas están:

- Verificación (trata de la verdad de una afirmación).
- Explicación (da comprensión de por qué es verdadero).
- Sistematización (la organización de varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos y teoremas principales).
- Descubrimiento (invención o descubrimiento de nuevos resultados).
- Construcción de una teoría empírica.
- Exploración del significado de una definición o las consecuencias de una suposición.
- Incorporación de un hecho bien conocido en un marco nuevo y verlo así desde una nueva perspectiva.

Las diferentes funciones de la prueba en matemáticas se pueden resaltar más o menos de acuerdo con las necesidades de la audiencia. Por ejemplo, Hersh (1993) dice que la prueba matemática puede convencer y explicar. Señala que, en la investigación matemática, su principal función es convencer y que, en el nivel medio superior y superior, su principal función es explicar.

Dada la importancia de las justificaciones y demostraciones en las matemáticas y su aprendizaje, no es de sorprender que haya un considerable cuerpo de investigación acerca de diferentes aspectos relacionados con ellas. La investigación empírica en educación matemática se ha enfocado en buena medida a describir y analizar las respuestas de los alumnos a cuestiones que requieren demostración. Existe abundante información de que la mayor parte de los alumnos tiene dificultades en seguir o construir argumentos deductivos presentados de manera formal, para entender cómo difieren de la evidencia empírica, y en utilizarlos para derivar nuevos resultados (Chazan, 1993; Fischbein, 1982; Harel y Sowder, 1998; Porteous, 1994; Schoenfeld, 1989). Martin y Harel (1989) encontraron que muchas de estas dificultades también son comunes en futuros maestros de primaria.

La investigación ha mostrado que algunos alumnos sostienen que medir los lados o ángulos de una figura, al igual que escribir una prueba deductiva, les permite llegar a conclusiones que son ciertas y aplicables a conjuntos que tienen un número infinito de elementos. Por otro lado, algunos alumnos ven las pruebas en geometría como pruebas para un solo caso: el que está representado en el diagrama asociado. No aprecian el aspecto genérico de los diagramas en las demostraciones geométricas (Chazan, 1993). Schoenfeld (1989) encontró que, a pesar de afirmar que las construcciones geométricas y las pruebas están relacionadas estrechamente, en problemas de construcción los alumnos se comportan como si su conocimiento relacionado con pruebas no existiera.

Según Fischbein (1982), cuando se trata de alumnos que estudian matemáticas, al considerar el posible impacto de un cuerpo de información o de un patrón de procedimientos en la dinámica del pensamiento productivo, debemos tener en cuenta el tipo y la fuerza de la credibilidad asociada a ellos por el estudiante. No basta que los alumnos aprendan pruebas y aprendan la noción general de una prueba. "El sentimiento de la necesidad universal de una cierta propiedad no es reducible a un formato puramente conceptual. Es un sentimiento de concordancia, una base de creencia, una intuición, pero que es congruente con la aceptación formal correspondiente" (p. 17). Es importante, por tanto, no sólo que un argumento sea correcto, sino que el alumno lo crea y lo entienda. Hanna (1990) sugiere el uso, siempre que sea posible, de pruebas que expliquen y no de pruebas que sólo prueben.

Healy y Hoyles (2000) investigaron las características de los argumentos reconocidos por alumnos de alto aprovechamiento de 14 y 15 años de edad como demostraciones en álgebra, así como las razones detrás de sus juicios y las maneras en que construyen pruebas para sí mismos. Healy y Hoyles encontraron que los alumnos tienen simultáneamente dos concepciones diferentes de prueba. Por un lado, aquéllas sobre argumentos que consideran que recibirían la mejor calificación y, por el otro, aquéllas sobre argumentos que ellos adoptarían para sí mismos. En la primera categoría, los argumentos algebraicos son populares. En la segunda, los alumnos prefieren argumentos que pueden evaluar, que encuentran convincentes y explicativos. Estas preferencias excluyeron razonamientos algebraicos. Los argumentos empíricos predominan en las demostraciones construidas por los propios alumnos, aunque la mayoría está consciente de sus limitaciones. Los alumnos más exitosos presentaron las pruebas usando el lenguaje cotidiano, en vez de utilizar álgebra.

Balacheff (1987) distingue las siguientes etapas en la evolución de los alumnos de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales: empirismo ingenuo, experiencia crucial, ejemplo genérico, experiencia mental. Otros autores también describen que hay varias etapas previas necesarias para que los alumnos comprendan una demostración formal. Para Blum y Kirsch (1991), una prueba preformal es una cadena de conclusiones correctas no representadas formalmente que se refieren a premisas válidas no formales. Ejemplos particulares de tales premisas incluyen objetos reales dados de manera concreta, hechos geométricos intuitivos, ideas básicas orientadas a la realidad o afirmaciones intuitivamente evidentes, comúnmente entendibles o sicológicamente obvias. Las conclusiones se deben suceder unas a otras en su orden sicológico natural. Las conclusiones deben poderse generalizar directamente del caso concreto. Si se formalizan, deben corresponder a argumentos matemáticos correctos. Para aceptar una prueba preformal no es, sin embargo, necesario que tal formalización se realice o sea siquiera reconocible. En cualquier caso, las pruebas preformales deben ser válidas y rigurosas. Para Blum y Kirsch, "riguroso" no es de manera alguna equivalente a "formal".

Simon (1996) propone que la búsqueda de los alumnos de comprensión en matemáticas y para determinar validez matemática conduce no sólo al pensamiento inductivo y deductivo, sino también a un tercer tipo de pensamiento: el razonamiento transformacional. Aunque el razonamiento inductivo o deductivo puede conducir a los alumnos a convencerse de la verdad de una idea, con frecuencia lo que buscan es un sentido de cómo funciona el sistema matemático en cuestión.

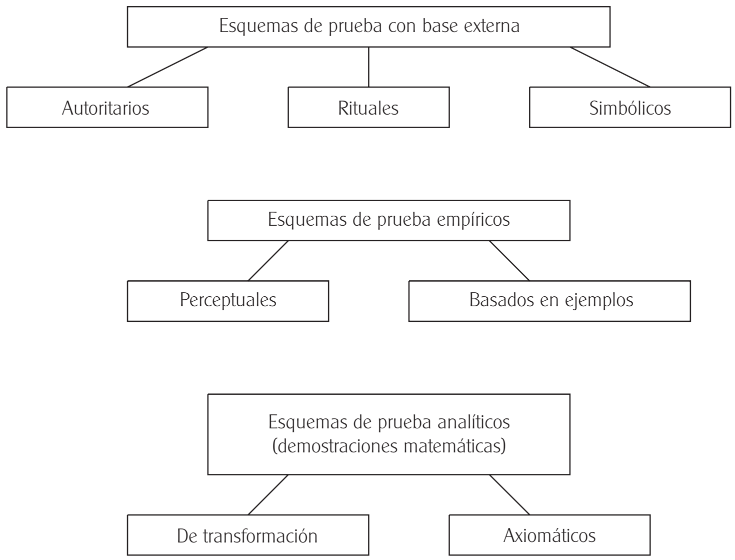
En la siguiente sección describiremos los tipos de esquemas de justificación propuestos por Sowder y Harel (1998). Estos esquemas nos permitirán agrupar y entender mejor los tipos de argumentos ofrecidos por los alumnos.

MARCO TEÓRICO: ESQUEMAS DE JUSTIFICACIÓN

Probar o justificar resultados en matemáticas incluye convencerse a sí mismo y a otros. El esquema de justificación de un individuo consiste en las acciones que éste realiza para lograr ese convencimiento. Sowder y Harel identificaron tres tipos de esquemas de justificación utilizados por alumnos de nivel medio superior y superior. Los tipos de esquemas son: *1)* esquemas de prueba con base externa, *2)* esquemas de prueba empíricos, y *3)* esquemas de prueba analíticos, cada uno con subcategorías (véase la figura 1).

En los esquemas de prueba con base externa, lo que convence al alumno o lo que el alumno hace para persuadir a otros proviene de una fuente exterior. Estas fuentes exteriores pueden ser una autoridad, como en el esquema autoritario; la forma de un argumento, como en el esquema ritual; o la manipulación sin

Figura 1 Esquemas de justificación



sentido de símbolos, esto es, el esquema simbólico. La autoridad puede ser el libro de texto o una persona con autoridad, tal como un padre o un maestro. En los esquemas de prueba empíricos, las justificaciones se basan solamente en ejemplos. Las personas dependen, por lo general, de ejemplos para formar conceptos. Los alumnos también valoran los ejemplos como un medio para entender o para verificar su comprensión de las ideas. Sowder y Harel identificaron dos tipos de esquemas de prueba empíricos: los esquemas de prueba perceptuales y los esquemas de prueba basados en ejemplos. Los alumnos que argumentan sobre la base de percepciones de un solo dibujo están utilizando el esquema perceptual. En los esquemas basados en ejemplos, los alumnos emplean uno o más ejemplos para convencerse a sí mismos o a otros. En los esquemas de prueba analíticos, los argumentos que se dan son generales e involucran razonamiento matemático en vez de ejemplos. Hay dos subtipos: esquemas de prueba analíticos de transformación y esquemas de prueba analíticos axiomáticos. La característica general de los esquemas de transformación es que los alumnos tratan con los aspectos generales de una situación y que involucra razonamiento orientado al caso general. Harel y Sowder (1998) señalan que un ejemplo particularmente importante del esquema de prueba de transformación es el uso transformativo de los símbolos: "Las manipulaciones de símbolos son llevadas a cabo con la intención de derivar información relevante que profundice la comprensión de uno... En tal actividad el individuo no forma necesariamente imágenes específicas de algunas o de todas las expresiones algebraicas y relaciones... sólo en etapas críticas en este proceso" (p. 264). Sowder y Harel consideran el esquema de prueba de transformación como un precedente necesario para el último esquema de prueba: el esquema de prueba axiomático. Se puede organizar un campo desarrollado de las matemáticas de modo que los nuevos resultados sean consecuencias lógicas de los que los preceden. Las pruebas de los nuevos teoremas se basan solamente en axiomas o en teoremas demostrados con anterioridad. Sowder y Harel elaboraron su marco basados en su trabajo con alumnos del nivel medio superior y del nivel superior. Con algunas adaptaciones, este marco ha sido utilizado anteriormente para describir los esquemas de justificación de los alumnos de primaria (Flores, 2002).

MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS

Entrevistas

Este artículo se basa en entrevistas conducidas por futuros maestros y maestros en ejercicio en un curso de métodos de enseñanza de las matemáticas en la Universidad Estatal de Arizona. La mayoría de los alumnos entrevistados, y foco principal de este artículo, corresponde a los grados 6 a 9 (véase el cuadro 1). Para este artículo también se incluyeron algunos ejemplos de alumnos de 5° de primaria, y algunos del grado 10, cuando el tema descrito era uno que comúnmente se cubre en los grados 6 a 9. Cada maestro escogió cuatro alumnos de acuerdo con razones prácticas de accesibilidad y participación voluntaria. Los alumnos fueron entrevistados de manera individual. Primero, el entrevistador le pidió a cada alumno que diera dos ejemplos de hechos, procedimientos o reglas que hubiera aprendido recientemente en matemáticas. Después, el entrevistador le preguntó

Cuadro 1 Distribución de los entrevistados por grado escolar

Grado	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de entrevistados	2	13	23	20	6	3	2	1

al alumno cómo sabía que el hecho era cierto o que el procedimiento daría una respuesta correcta. Los entrevistadores registraron las respuestas empleando, en lo posible, el lenguaje utilizado por los alumnos. Las respuestas y diálogos fueron traducidas del inglés por el autor.

Reflexiones de los entrevistadores

Cada uno de los entrevistadores también escribió una reflexión acerca de las entrevistas. Parte de la comprensión ganada proviene de estas reflexiones.

Análisis de datos

Las respuestas de los alumnos entrevistados fueron agrupadas por el autor según la manera como el alumno sabía que sus enunciados eran ciertos o correctos. Los agrupamientos corresponden en gran medida a los esquemas de justificación identificados por Sowder y Harel (1998).

ESQUEMAS DE JUSTIFICACIÓN UTILIZADOS POR LOS ALUMNOS ENTREVISTADOS

Encontramos que los alumnos de los grados 5 a 10 utilizan los tres tipos de esquemas de justificación descritos por Sowder y Harel (1998): *1)* esquemas de justificación con base externa, *2)* esquemas de justificación empíricos, y *3)* esquemas de justificación analíticos, aunque no en todos los casos encontramos ejemplos de todos los subtipos. En unos cuantos casos, los alumnos no pudieron ofrecer ninguna justificación. Por ejemplo, un alumno de 6° grado afirmó que un número multiplicado por cero es cero. Cuando le preguntaron por qué era cierto esto, respondió: "No tengo idea". Un alumno puede usar diferentes esquemas para justificar. Muchos utilizan autoridad en un caso y justificación empírica o analítica en otro caso. Algunos incluso emplean diferentes esquemas en el mismo ejemplo. Una alumna de 13 años de 8° grado escogió el tema de exponentes y pudo explicar el significado de 4^2 y 4^3 en términos de 4×4 y $4 \times 4 \times 4$. Cuando el entrevistador le preguntó acerca de 4^1 la alumna fue capaz de decir que la respuesta era 4, diciendo que multiplicas la base sólo una vez. Sin embargo, cuando le preguntaron acerca del caso 4^0, después de una confusión inicial, la alumna revirtió al uso de la autoridad: "Cualquier número a la potencia 0 es siempre 1". Dijo que su maestro le había dicho que éste era un caso especial.

Esquemas de justificación con base exterior

Encontramos que los alumnos entrevistados utilizan esquemas de prueba autoritarios y esquemas de prueba simbólicos. No encontramos ejemplos de esquemas de prueba rituales.

Esquemas de prueba autoritarios

La mayoría de los alumnos que utilizaron este esquema se refirieron al maestro como la fuente de autoridad y, en segundo lugar, al libro de texto usado. Aunque no con frecuencia, los alumnos también usaron aparatos electrónicos como fuente de autoridad. Una alumna justificó un procedimiento, porque "lo hicieron en la computadora". A diferencia de alumnos de menor edad, que a menudo citaron como fuentes de conocimiento matemático a sus padres o a sus hermanos mayores (Flores, 2002), las autoridades matemáticas para los alumnos entrevistados de los grados 5 a 10 se encuentran casi exclusivamente en la escuela.

En algunos casos, los propios alumnos reconocen que, aunque confían en la autoridad, ellos mismos no tienen una buena comprensión de la situación matemática, como muestra la siguiente cita de un alumno de sexto grado.

> Yo sé que ésta es la forma correcta, porque mi maestra nos enseñó y ella lo aprendió de su maestro de matemáticas en la clase de la universidad, así que vino de algunas personas realmente listas. Aparte de eso, no estoy muy seguro de por qué tiene sentido.

Una alumna de 14 años de 8° grado explicó: "La distancia es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo... El maestro me dijo la fórmula y está escrita en el libro. Nunca pensé en preguntar por qué. Realmente no sé por qué es así".

En otros casos en los que la justificación se basa en la autoridad, los alumnos no muestran si han entendido o no la situación. Un alumno de 12 años de 7° grado dijo: "Para multiplicar fracciones, pones numerador por numerador sobre denominador por denominador. Por ejemplo, $\frac{7}{2} \times \frac{14}{3} = \frac{98}{6}$ ya que $7 \times 14 = 98$ y $2 \times 3 = 6$". Cuando le preguntaron cómo sabía que era cierto, respondió que el maestro lo había enseñado y había hecho muchos ejemplos. Un alumno de 10 años de 5° grado describió la multiplicación de fracciones de esta manera: "Un medio por un tercio es igual a un sexto... 1 por 1 es 1, y 2 por 3 es 6... Mi maestro me enseñó. También está en el libro". Un alumno de 14 años de 9° grado explicó cómo despejar la incógnita en una proporción: "Cuando una fracción es igual a otra fracción con una variable, multiplicas en cruz y luego despejas la variable". Cuando le preguntaron cómo sabía que este procedimiento es correcto, dijo: "Bueno, es lo que mi maestro nos dijo que hiciéramos y no me han marcado nada mal todavía".

En varios casos, la justificación dada por los alumnos se basaba en la autoridad del maestro, pero los alumnos mostraron que tenían una comprensión conceptual de la situación. Una alumna de 12 años del 7° grado dijo: "Un rectángulo es un paralelogramo". Su justificación estuvo primero basada en la autoridad: "Mi maestro hizo un dibujo y nos dijo que un rectángulo era un caso especial de un paralelogramo". Sin embargo, cuando le preguntaron por qué era cierto esto, ella fue capaz de explicarlo en términos conceptuales. "Bueno, supongo que los lados de un rectángulo son paralelos como los del paralelogramo, sólo que van derechos de arriba abajo en vez de en diagonal."

Esquemas de prueba simbólicos

Varios estudiantes dieron justificaciones que eran básicamente procedimientos y manipulaciones simbólicas. Esto fue más frecuente que con alumnos más pequeños, donde esta forma de justificación externa no fue utilizada por los alumnos entrevistados (Flores, 2002). En muchos casos, la manipulación de símbolos que los alumnos mostraron correspondería a lo que Skemp (1987) ha descrito como entendimiento instrumental o reglas sin razones. Los alumnos descritos en esta sección dan cadenas de procedimientos como justificación, lo que correspondería a una orientación calculacional (Thompson, Philipp, Thompson y Boyd, 1994).

Los alumnos dan secuencias de procedimientos como explicaciones

Un alumno de 13 años de 7° grado dijo: "Un número por un medio es lo mismo que decir ese número dividido entre dos". El entrevistador le pidió que explicara.

Alumno: No sé. Sólo quiero decir... ummmm como $7\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.

Entrevistador: ¿Cómo sabes que esto funciona?

Alumno: Porque 7 se puede escribir como $\frac{7}{1}$ y así $7\times\frac{7}{1}$ es lo mismo que $\frac{7}{1}\times\frac{1}{2}$. De ahí tú sabes que puedes multiplicar los de arriba y los de abajo para obtener $\frac{7}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.

Nótese que aunque el alumno usa un ejemplo particular, la justificación se basa en una secuencia mecánica del procedimiento para multiplicar fracciones. Si el alumno hubiera calculado el valor $7 \div 2$ por una parte y luego el de $7\times\frac{1}{2}$ por otro lado y al compararlos hubiera visto que son iguales, sería un caso de una prueba empírica basada en un ejemplo.

Los alumnos manipulan símbolos sin referencia a lo que los símbolos representan

Una alumna de 12 años de 6° grado dijo: "Cuando tienes decimales divididos entre decimales, debes arrastrar el punto decimal. No puedes dividir entre nada más que un número entero. El número debajo del signo de división puede ser un número parcial, pero no el divisor". Al preguntarle, ella explicó lo que quería decir con arrastrar. "Es cuando mueves el punto decimal lugares, dos lugares como en este problema $3.25\,\overline{)450.07}$. Según cuántos lugares arrastras el divisor es cuántos arrastras el número debajo del signo de dividir." Ella dijo que la razón para arrastrar era "para aumentar el número de enfrente". Una alumna de 12 años de 6° grado dijo que era buena para dividir fracciones. Con el problema que le dieron, $\frac{3}{4}$ dividido entre $\frac{1}{4}$, "volteó" el primer número, multiplicó las fracciones y obtuvo $\frac{1}{3}$ Acerca de la volteada, ella explicó: "Es lo que haces para obtener la respuesta correcta". La alumna no mostró entender por qué una fracción se "voltea"; el procedimiento era meramente una manipulación simbólica para ella. Sin embargo, cuando le preguntaron el significado de dividir, ella dijo que significaba "cuántas veces cabe un número en otro número" y explicó que la pregunta era "cuántos $\frac{1}{4}$ caben en $\frac{3}{4}$." Entonces se dio cuenta de que cabía tres veces y que no había hecho el problema correctamente.

ESQUEMAS DE PRUEBA EMPÍRICOS

Las justificaciones basadas en ejemplos constituyen el esquema de justificación empírico. Los alumnos entrevistados que utilizaron esquemas de prueba empíricos fueron más allá de ofrecer simples argumentos perceptuales.

Esquemas de pruebas basados en ejemplos

La mayoría de la información empírica ofrecida en las entrevistas corresponde a dos clases, una involucra medición, la otra, ejemplos numéricos.

Los alumnos justifican midiendo o traslapando

Una alumna de 16 años del 10° grado explicó acerca de pares de ángulos lineales.

Alumna: Los pares lineales suman 180 grados.
Entrevistador: ¿Qué es un par lineal?
Alumna: Es cuando dos ángulos están juntos y forman una línea. Y una línea es 180 grados, por tanto, los ángulos suman 180 grados.
Entrevistador: Bueno, ¿cómo sabes que esto es cierto?
Alumna: En la clase medimos un montón de pares lineales para asegurarnos de que sumaban 180. Y todos los pares lo hicieron, así que pienso que siempre lo hacen.

La alumna también aprendió acerca de ángulos opuestos por el vértice: "Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes... Puedes doblar los ángulos y moverlos de modo que queden justo uno encima del otro". La alumna dibujó algunos ángulos opuestos por el vértice y dobló el papel de modo que los ángulos quedaran uno encima del otro. "Mira, son del mismo tamaño, eso significa que son congruentes."

Los alumnos justifican la generalización usando ejemplos numéricos

Una alumna de 14 años del 10° grado aprendió acerca de la propiedad distributiva $a(b + c) = ab + ac$. Como justificación dijo: "La propiedad distributiva es cierta, porque distribuye a dentro del paréntesis. Cada vez que yo uso números diferentes, un lado es siempre igual al otro lado". En este caso, aunque la alumna muestre cierta comprensión de lo que es una variable, la justificación se basa en calcular cada lado de la ecuación con números particulares y verificar que ambos lados son iguales.

Una alumna de 12 años del 7° grado aprendió una regla para verificar si un número es divisible entre 3.

Alumna: Para saber si un número grande es divisible entre 3, sumas los números y, si ese número es divisible entre 3, entonces el número original es divisible entre 3.

Entrevistador: ¿Cómo sabes que eso es cierto para todos los números?

Alumna: En la clase tomamos muchos números diferentes y sumamos los números para ver si era divisible entre 3. Para verificar otra vez, tomamos el número original y tratamos de dividirlo entre 3. Funcionó para cada número que probamos.

Una alumna de 13 años de 8° grado dijo que las "operaciones inversas son números que se deshacen uno al otro". Al pedirle que lo justificara, dio el ejemplo $7 \times 9 = 63$, $63/7 = 9$.

Esquemas de prueba analíticos

En estas entrevistas, encontramos esquemas de justificación que corresponden a esquemas de prueba de transformación. No encontramos ejemplos que correspondan al esquema de prueba axiomático.

Esquemas de prueba de transformación

En varios ejemplos, las respuestas de los alumnos revelan "una concepción rica de situaciones, ideas y relaciones entre las ideas", lo que corresponde a una orientación conceptual (Thompson *et al.*, 1994, p. 86).

Los alumnos usan valor posicional y sentido numérico para justificar sus respuestas

Una alumna de 13 años de 7° grado citó la definición de valor absoluto del libro: "El valor absoluto de un número es su distancia al cero en una recta numérica". La alumna utilizó el ejemplo $|-8| = 8$ para explicar que tanto 8 como -8 están a la misma distancia de cero, ocho "espacios" para ser exactos, y como la distancia no es en términos de números negativos, entonces $|-8| = 8$. También relacionó el valor absoluto con una situación de la vida real. Dijo que no importaba si debes dos galletas o si tienes dos galletas, de todos modos se trata de dos galletas. Un alumno de 13 años de 7° grado explicó la suma de decimales: "Cuando sumas decimales tienes que alinear los puntos decimales... Escribes los decimales uno debajo del otro y te aseguras de que los puntos decimales estén justo debajo uno del otro. Tienen que estar alineados". Cuando le preguntaron cómo sabía que esto era correcto, dijo:

> Porque cuando sumas decimales, tienes que asegurarte de que estás sumando los lugares correctos. Como... tienes que sumar juntas las unidades, y las decenas juntas, y los décimos juntos, y los centésimos juntos. Así para asegurarte que haces esto, alineas los decimales.

Un alumno de 12 años aprendió a multiplicar decimales. "Es como cuando haces un problema, 2.82×4, no te preocupas por el decimal hasta el final. Haciéndolo en la cabeza, pienso que es 11.22. Es fácil para mí hacer matemática mental." (La respuesta no es correcta pero está bastante cerca.) Cuando el entrevistador preguntó por qué no era 1.128, el alumno reveló sentido de la magnitud de los números involucrados: "Lo que hago es redondear 2.83 a 3, $3 \times 4 = 12$, así que la respuesta va a ser alrededor de 12."

Los alumnos usan sentido de las operaciones

Un ejemplo de sentido de operación fue dado por una alumna de 13 años del 7° grado al explicar la regla para los símbolos cuando se multiplican números negativos. Ella piensa en un símbolo negativo como otra forma de decir lo opuesto de algo. "Así, si tuvieras $(-6) \times 5$, podrías pensar primero en 6×5, que es 30, y luego tomar el opuesto de 30, que es -30. Luego, si los dos números son negativos, $(-6) \times (-5)$, primero harías 6×5, que es 30, y luego el opuesto de 30 que sabemos es -30, y luego tomar el opuesto de -30 que sería 30." Una alumna de 12 años de 7° grado también mostró sentido de operación al relacionar la multiplicación con la suma repetida. Ella dijo: "Un negativo por un positivo es siempre negativo... Mi maestro dijo que multiplicar es como sumar el número a sí mismo. Así, cuando sumas un número negativo a sí mismo, siempre se vuelve más y más negativo." Un alumno de 12 años de 7° grado enunció las operaciones inversas que había aprendido en la escuela:

> La adición es una inversa de la sustracción.
> La multiplicación es una inversa de la división.
> La sustracción es una inversa de la adición.
> La división es una inversa de la multiplicación.

Cuando este alumno piensa en operaciones inversas en matemáticas, piensa qué operación puede invertir el proceso. Así, si tuviera que sumar $9 + 8$, para regresar a 9 tendría luego que restar 8 del resultado, esto es, $9 + 8 - 8 = 9$. Los mismos conceptos se aplican a la multiplicación y la división. Otro alumno de 7° grado explicó que las inversas son operaciones matemáticas que "se deshacen" una a la otra. "Si quieres regresar a donde empezaste, tienes que deshacer las acciones que has hecho."

Los alumnos relacionan conceptos con conocimiento previo

A menudo, los alumnos son capaces de relacionar conceptos con conceptos más básicos, aun cuando no sean capaces de justificar todo. Un alumno de 10 años de 5° grado aprendió sobre área. "La fórmula para calcular el área de un rectángulo es largo por ancho... Recuerdo que mi maestra nos enseñó, pero no recuerdo cómo salió la fórmula." Sin embargo, el mismo alumno tenía una comprensión bastante buena de la fórmula para el área de un triángulo rectángulo.

> El área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. Déjame dibujarlo *[el alumno hizo un dibujo]*. Como la mitad de un rectángulo es un triángulo, por eso es la mitad. La base del triángulo es el largo del rectángulo; la altura es el ancho. Como el área del rectángulo es largo por ancho, el área del triángulo es un medio por el largo por el ancho, esto es un medio de la base por la altura.

La siguiente justificación es de una alumna de 14 años del 8° grado. Ella usa la propiedad distributiva y revela conocimiento de los inversos aditivos.

> $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Déjame probarlo. Es un poco difícil. ¿Qué tal al revés? Yo sé cómo probarlo al revés... $(a + b)(a - b)$, expándelo. Se vuelve a por a que es a^2, luego a por $(-b)$ es $-ab$, b por a es ba o ab, b por $-b$ es $-b^2$. Así $-ab$ y ab se cancelan mutuamente, se vuelve cero... Así como $-1 + 1 = 0$, así $-ab + ab = 0$. Así lo que sobra es $a^2 - b^2$.

Los alumnos usan relaciones matemáticas que surgen de la situación

Un alumno de 13 años de 8° grado tuvo gran dificultad para explicar su pensamiento. Mencionó incluso que siempre se le dificulta cuando la maestra le hace las mismas preguntas cuando trabaja con ella. Él explicó el procedimiento para despejar x en el problema $5 : 6 = x : 36$:

> Primero tienes que dividir el número total entre la parte de la razón; luego multiplicas la respuesta por la otra parte de la razón... Yo sé que es cierto, porque el número de niñas es 36 y por cada seis niñas hay cinco niños. Así, si hay 36 niñas, ¿cuántos grupos hay? Primero, divide 36 entre 6 para encontrar cuántos grupos de niñas hay, que son seis.

A pesar de sus dificultades para explicar, la respuesta de este alumno muestra que tiene una buena comprensión de las relaciones matemáticas de la situación. Su explicación no es meramente computacional, sino que revela la cuestión matemática clave del problema.

REFLEXIONES DE LOS ENTREVISTADORES

Varios entrevistadores informaron que los alumnos tienen dificultades para hablar de lo que han aprendido en matemáticas. Uno reflexionó: "Me sorprendió la dificultad de los alumnos para dar descripciones verbales de lo que saben en matemáticas. El vocabulario y la habilidad para comunicar esta información son como un lengua extranjera para ellos." Otro entrevistador comentó que en las entrevistas "un aspecto fue común a todas: los alumnos tuvieron dificultad para explicar con palabras su comprensión de las matemáticas". Una alumna de 13 años de 8° grado mencionó que sabía un montón de hechos y reglas en matemáticas, pero que no sabía por qué eran ciertos. También exclamó: "¡Éste es el primer año en el que alguien me ha preguntado por qué estoy haciendo cualquier cosa!"

Esta dificultad para explicar no debe sorprendernos si los propios maestros con frecuencia no explican por qué algo es cierto. Un alumno de 13 años de 8° grado aprendió que "cuando multiplicas dos negativos obtienes un positivo". Dijo que así le habían enseñado. El entrevistador le preguntó cómo sabía que era cierto y el alumno respondió que nunca se lo habían explicado. Dijo que no dan una razón que explique por qué funciona, no van a fondo, sólo dicen que funciona. Otro alumno dijo: "El maestro en la escuela no nos enseña por qué funciona. Sólo dice aquí está la fórmula o ecuación y nos dice que la usemos".

Varios alumnos también tuvieron dificultad para recordar lo que habían aprendido recientemente. Un entrevistador recalcó que, sobre todo, le había sorprendido cuán poco podían los alumnos decir lo que habían aprendido este año. Algunos alumnos perciben el objetivo de la clase de matemáticas como calcular algo o encontrar una respuesta en vez de aprender o recordar algo. El siguiente diálogo es con un alumno de 10 años de 5° grado. Cuando le preguntaron qué había aprendido en matemáticas, después de una pausa como de 30 segundos, respondió finalmente:

Alumno: De veras no sé. No me diste el problema o número para resolver.
Entrevistador: Lo que quiero decir es una regla o fórmula, por ejemplo, que un número impar más un número par da un impar.
Alumno: Bueno, sí entiendo, pero de todos modos es muy difícil. No recuerdo ninguna.
Entrevistador: ¿Qué tal algo que aprendiste el año pasado?
Alumno: Si no recuerdo nada de este año, ¿cómo puedo recordar del año pasado?

Muchos alumnos desconfiaron cuando les preguntaron por qué era cierto lo que habían aprendido. Un entrevistador reflexiona:

> Todos los alumnos se sorprendieron cuando les pregunté cómo sabían que lo que habían aprendido era cierto. Se pusieron suspicaces, como si les estuviera preguntando una pregunta capciosa. Esto en sí mismo fue revelador. Obviamente los alumnos están acostumbrados a recibir información y se espera de ellos que la crean sin cuestionar.

Otro entrevistador hizo la siguiente observación: "la idea de 'probar' sus respuestas era algo extraño para todos los niños". Un entrevistador escribió en su reflexión: "la segunda pregunta (esto es, cómo sabes que es cierto) para en seco a los alumnos". El mismo entrevistador describió cómo cambió el comportamiento de una alumna cuando le hizo la segunda pregunta: "Hasta ese momento, ella estaba sonriendo y moviéndose y, cuando hice la pregunta, la sonrisa desapareció y dejó de moverse". Un alumno de 12 años de 7° grado estaba explicando acerca de los ejes de coordenadas. Cuando oyó la segunda pregunta exclamó "¿Qué? Me estás confundiendo. ¿Estás tratando de enredarme?"

En su reflexión final, dos entrevistadores subrayaron el valor de las entrevistas para aprender acerca del pensamiento de los alumnos y cómo pueden los maestros incorporar las entrevistas en su enseñanza. Al describir la variedad de maneras utilizadas por los alumnos para justificar su conocimiento, una futura maestra se dio cuenta de cuán importante era explicar un concepto en una variedad de modos. También se dio cuenta de que no todos los alumnos aprenden dando explicaciones matemáticas, sino que los alumnos pueden aprender conceptos matemáticos al relacionarlos con escenarios del mundo real. Otra entrevistadora, una maestra con experiencia, dijo que estaba sorprendida de lo mucho que había aprendido acerca de los alumnos durante las entrevistas uno a uno y de lo que cada quien necesitaba. Se dio cuenta de la importancia de las entrevistas como un medio para evaluar. El proceso de las entrevistas también le ayudó a fijar sus propias "metas para dar oportunidades de pasar de lo concreto a lo abstracto".

COMENTARIOS FINALES

Los maestros pueden ayudar a los alumnos a desarrollar esquemas de prueba modelando ellos mismos lo que debemos esperar de los alumnos. Un maestro puede justificar fórmulas y procedimientos, explicar las razones por las que éstos funcionan, explicar por qué los enunciados son ciertos o por qué definimos conceptos o símbolos de la manera en que lo hacemos. Los alumnos podrán de esta manera relacionar la notación con el significado detrás de ella. Por ejemplo, a la alumna que explicó cómo resolver $3.25\,\overline{)450.07}$ en términos de "arrastrar" el punto decimal, le dio gusto entender que al multiplicar tanto el divisor como el dividendo por 100, el problema se convierte en $325\,\overline{)45007}$ y que la respuesta es la misma, una situación análoga a multiplicar una fracción por $\frac{100}{100}$.

Los maestros también pueden ayudar a los alumnos a desarrollar su habilidad para hablar acerca de ideas matemáticas dándoles la oportunidad de explicar su forma de pensar a sus compañeros y al maestro. A veces es difícil hacer esto, como una de las entrevistadoras comentó: "Me fue difícil no decir algo o guiarlos a dar una explicación". Sin embargo, después de dar a los alumnos la oportunidad de pensar acerca de la regla, ellos solos fueron "capaces de explicar cómo sabían que una regla en particular era cierta".

Sobre todo, los maestros pueden ayudar a los alumnos a desarrollar sus habilidades para demostrar, pidiéndoles que justifiquen sus respuestas, tanto cuando sean correctas como cuando no. Los alumnos necesitan acostumbrarse a cuestionar y explicar sus propias respuestas de manera que gradualmente piensen acerca de lo que están aprendiendo y no aprendan el nuevo contenido con fe ciega. La práctica de justificar en clase también ayudará a los alumnos a recordar lo que están aprendiendo al destacar cuáles son las ideas importantes en una lección, los conceptos en los que se basan los ejercicios y cálculos, y las conexiones de estos conceptos con los conceptos aprendidos con anterioridad. Como dice Porteous (1994), al darles oportunidades a los alumnos de probar en matemáticas, tendrán la oportunidad de hacer matemáticas esenciales y tendrán la profunda satisfacción de descubrir la estructura matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (1987), "Processus de preuve et situations de validation", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, núm. 2, pp. 147-176.

Bell, A.W. (1976), "A Study of Pupils' Proof-explanations in Mathematical Situations", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7, pp. 23-40.

Blum, W. y A. Kirsch (1991), "Preformal Proving: Examples and Reflections", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, pp. 183-203.

Chazan, D. (1993), "High School Geometry Students' Justifications for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, pp. 359-387.

De Villiers, M.D. (1999), *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad*, Emeryville, CA, Key Curriculum Press.

Fischbein, E. (1982), "Intuition and Proof", *For the Learning of Mathematics*, vol. 3, núm. 2, pp. 9-18, 24.

Flores, A. (2002), "How do Children Know what They Learn in Mathematics is True?", *Teaching Children Mathematics*, vol. 8, pp. 269-274.

Hanna, G. (1990), "Some Pedagogical Aspects of Proof", *Interchange*, vol. 21, núm. 1, pp. 6-13.

Hanna, G. y H.N. Jahnke (1996), "Proof and Proofing", en A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, vol. 2, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 877-908.

Harel, G. y L. Sowder (1998), "Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies", en A.H. Schoenfeld, J.J. Kaput y E. Dubinsky (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. 3, Providence, RI, American Mathematical Society, pp. 234-283.

Healy, L. y C. Hoyles (2000), "A Study of Proof Conceptions in Algebra", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, núm. 4, pp. 396-428.

Hersh, R. (1993), "Proving is Convincing and Explaining", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, núm. 4, pp. 389-399.

Martin, W.G. y G. Harel (1989), "Proof Frames of Preservice Elementary Teachers", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 41-51.

Porteous, K. (1994), "When Truth is Seen to be Necessary", *Mathematics in School*, vol. 23, núm. 5, pp. 2-5.

Schoenfeld, A.H. (1989), "Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, pp. 338-355.

Simon, M.A. (1996), "Beyond Inductive and Deductive Reasoning: The Search of a Sense of Knowing", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, pp. 197-210.

Skemp, R.R. (1987), "Relational Understanding and Instrumental Understanding", *The Psychology of Learning Mathematics*, Hillsdale, NJ, Erlbaum, pp. 152-163.

Sowder, L. y G. Harel (1998), "Types of Students' Justifications", *Mathematics Teacher*, vol. 91, pp. 670-675.

Thompson, A.G., R.A. Philipp, P.W. Thompson y B.A. Boyd (1994), "Calculational and Conceptual Orientations in Teaching Mathematics", en D.B. Aichele y A.F. Coxford (eds.), *Professional Development for Teachers of Mathematics*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 79-92.

DATOS DEL AUTOR

Alfinio Flores Peñafiel
Arizona State University
alfinio@asu.edu

www.santillana.com.mx/educacionmatematica