Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Fuenlabrada, Irma; Delprato, María Fernanda
Tres mujeres adultas y sus diferentes acercamientos a los números y las cuentas
Educación Matemática, vol. 17, núm. 3, diciembre, 2005, pp. 25-51
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Tres mujeres adultas y sus diferentes acercamientos a los números y las cuentas[1]

Irma Fuenlabrada y María Fernanda Delprato

Resumen: En este artículo se relatan los casos de Carmen, Olga y Sofía y sus diferentes acercamientos al aprendizaje de los números y las operaciones de suma y resta. Estos casos fueron estudiados en una investigación sobre procesos de acceso a la simbología matemática de adultos no alfabetizados mediante la metodología de ingeniería didáctica.

En particular, de la ingeniería diseñada e implementada, se destaca la importancia de la simultánea recuperación y problematización-extensión de los saberes previos (noción y usos sociales) de los sujetos de aprendizaje y cómo ello conlleva a la consecución de acciones didácticas específicas. Éstas deben responder de manera más coherente a los posicionamientos particulares de cada mujer sobre lo simbólico y sus maneras de asumir lo que saben y lo que suponen que les falta por aprender sobre las temáticas tratadas en la experiencia de enseñanza. Sin embargo, la especificidad de la intervención didáctica no implica un desvío de los principios didácticos generales asumidos en la ingeniería.

Palabras clave: educación de adultos, didáctica de las matemáticas, alfabetización, operaciones básicas.

Abstract: In this paper, Carmen, Olga and Sofía's cases are reported, as well as their different approaches to the learning of numbers and the operations of addition and subtraction. These cases were studied in a research on access processes to mathematical symbolization in non-literate adults by means of the didactical engineering methodology.

Fecha de recepción: 14 de noviembre de 2004.

[1] Este artículo integra tres ponencias, cuyos resúmenes fueron publicados en las memorias de los congresos correspondientes: "Carmen alcances y limitaciones de su cálculo mental" de María Fernanda Delprato e Irma Fuenlabrada (2003b); "Olga, desde su cálculo mental, dialoga con los números y las cuentas" de Irma Fuenlabrada y María Fernanda Delprato (2003a). Ambas ponencias se presentaron en la RELME 17, realizada en Santiago de Chile, Chile. Y "Sofía, posibilidades y límites de un cálculo escrito arbitrario" de Irma Fuenlabrada y María Fernanda Delprato (2003b) se presentó en el VII CNIE, realizado en Guadalajara, Jalisco, México.

Particularly, from the designed and implemented engineering, it is highlighted the importance of the simultaneous recuperation and problematisation-extension of previous knowledge (notion and social uses) of the learning subjects, and how this leads to the acquisition of specific didactic actions. These actions must respond, more coherently, to the particular suppositions each woman has about the symbolic, and their ways to assume what they know and what it is suppose they need to learn over the treated topics during the teaching experience. However, the specificity of the didactical intervention does not imply a detour from the general didactic principles supposed in engineering.

Keywords: adults education, didactics of mathematics, literacy, basic operations.

INTRODUCCIÓN

Consideramos que la problemática del analfabetismo es la marginación de una simbolización con valor social. En la investigación de la que provienen los resultados que se informan en este artículo (Delprato, 2002) se retoma esta agenda desde el campo de la exclusión del dominio de la simbolización matemática, en particular, la de los números y las operaciones de suma y resta.

Una mirada al acervo teórico vigente sobre los conocimientos aritméticos de adultos de baja o nula escolaridad[2] permite detectar estudios de diversa índole. Algunos de ellos (Carraher y Carraher *et al.*, 1997) indagan "...nociones matemáticas subyacentes empleadas en contextos culturales diversos (escolar-cotidiano, diferentes prácticas laborales), para así cuestionar la concepción académica de la inteligencia que excluye la inteligencia práctica y la importancia de la situación social como condicionantes de la organización de las acciones que realiza un sujeto".[3]

Otros estudios se abocan a la indagación de concepciones extraescolares de nociones matemáticas específicas (Ávila, 1990; Ferreiro y Fuenlabrada *et al.*, 1987; Mariño, 1986; Soto, 1997; Valiente, 1995) y reconstruyen las lógicas no escolares de resolución de problemas aritméticos (por ejemplo, algoritmos utilizados en el cálculo mental) o de la lectura y escritura de números, establecen criterios para

[2] Para una revisión más amplia, puede consultarse Delprato (2002), en particular, los apartados "Estudios sobre conocimientos matemáticos no escolares" e "Interpelando las experiencias alternativas".

[3] Delprato (2002, p. 6).

identificar niveles de desempeño de los adultos y elaboran algunas implicaciones didácticas generales de los hallazgos obtenidos. Esta línea de indagación es recuperada, a su vez, por algunas producciones para proponer revisiones curriculares de planes de educación de adultos (Ávila y Waldegg, 1994; Ávila, 1997) o diseñar alternativas para la enseñanza de los algoritmos de cálculo (Mariño, 1997).

Específicamente, la propuesta de Mariño (1997), desde una postura que procura el diálogo cultural (intercambio entre saber popular y saber académico), asume como liga entre ambos tipos de saberes el trabajo simultáneo con una representación gráfica del cálculo mental (control de las cantidades de mayor orden a las de menor) y con la notación convencional (en las que se opera a la inversa), pero no tematiza[4] el tránsito de una escritura a la otra. De hecho, el conocimiento que articula ambas notaciones es, en realidad, como se argumentará más adelante, el conocimiento del sistema de numeración y éste, en la propuesta de Mariño, estaría minimizado.

A partir de esta breve revisión, puede concluirse que, si bien se han reportado algunos supuestos didácticos generales para la enseñanza aritmética a adultos, no existen trabajos que den cuenta de variables vinculadas más directamente con el diseño de situaciones de enseñanza (especificidades, variables didácticas por manipular).

Esta ausencia, junto con la disidencia a la propuesta esbozada por Mariño, justificarían la pertinencia de un estudio como el realizado por Delprato (2002), que estuvo regido por el compromiso con los adultos analfabetos en el logro del acceso al conocimiento en condiciones de ejecución específicas que permitieran desentrañar, caracterizar y valorar las componentes de una ingeniería didáctica.

Desde este interés, se estudiaron los casos de tres mujeres adultas de baja o nula escolaridad: Carmen, Olga y Sofía. Metodológicamente, se procedió con apego a los recursos de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995), es decir, entre otros insumos, se diseñó e implementó una secuencia de enseñanza sobre la representación de los números y las operaciones de suma y resta y se analizó su efecto en el aprendizaje de dichas nociones por parte de las mujeres. Sin embargo, es preciso señalar que el diseño y experimentación de la ingeniería didáctica a la

[4] "La noción piagetiana de tematización es esencial para comprender esto. Significa que algo que ha sido inicialmente utilizado como instrumento de pensamiento puede convertirse en un objeto de pensamiento, cambiando, al mismo tiempo, su estatus en cuanto elemento del conocimiento [...] La tematización implica, pues, un cierto grado de toma de conciencia" (Ferreiro, 1998, p. 33).

que se alude permitió la exploración de las condicionantes de una propuesta de enseñanza, por lo que no conlleva pretensiones paradigmáticas.[5]

Para el diseño de la secuencia, se retomaron posturas de los escenarios de la educación de adultos y de la didáctica de las matemáticas (Brousseau, 1986) en torno a la importancia de la recuperación de las nociones matemáticas iniciales de las mujeres (nociones y usos sociales). Esta recuperación procuraba valorar durante todo el proceso las posibilidades de estas mujeres como sujetos de saber. A la vez, tendía a la extensión de sus conocimientos hacia el uso de una simbolización con sentido, accediendo a las funciones y a las leyes constitutivas de un sistema simbólico. Asimismo, el supuesto de dicha secuencia era que la enseñanza de los algoritmos convencionales de suma y resta están directamente correlacionados con el sistema de numeración en el que operan (sistema de base y posición).

Las mujeres fueron atendidas de manera individual. Se recurrió a la entrevista (12 sesiones de 45 minutos para cada caso estudiado) como instrumento de trabajo, pero ésta se utilizó con diferentes modalidades e intenciones: *a)* en las dos primeras, el propósito fue la indagación de antecedentes familiares y escolares, ámbitos de uso de nociones matemáticas vinculadas a la numeración y al cálculo, hipótesis sobre el sistema de numeración, rango de números conocidos y familiares, estrategias de resolución de problemas aditivos[6] (entre ellas los algoritmos de suma y resta); *b)* mientras que las 10 entrevistas restantes se ocuparon para la intervención didáctica mediante acciones de enseñanza pertinentes a cada una de las mujeres, en función de sus saberes previos, de sus posibilidades de respuesta, sus visiones sobre las temáticas trabajadas y sobre el saber matemático en general. No obstante, estas acciones específicas estuvieron reguladas por los mismos supuestos didácticos generales con la pretensión de procurar el acceso a la simbolización convencional de los números y de las "cuentas".

Los protocolos de observación se reconstruyeron mediante: grabación de audio, inclusión de transcripción de producciones escritas de las mujeres y notas de campo de la entrevistadora.

Los resultados que se registran en este artículo se estructuran en relación con la información y el análisis de los datos referentes al aprendizaje de la represen-

[5] Pese a la pretensión de no constituir a la ingeniería como una secuencia didáctica replicable, siempre es posible derivar de ella algunos recursos para la enseñanza; en este sentido, los lectores interesados pueden revisar Delprato y Fuenlabrada (2003a).

[6] "Por 'problemas de tipo aditivo' entendemos aquéllos cuya solución exige adiciones o sustracciones; de la misma manera que por 'estructuras aditivas' entendemos las estructuras o las relaciones en juego que sólo están formadas por adiciones o sustracciones" (Vergnaud, 1991, p. 161).

tación numérica convencional y al control en el plano de lo simbólico de las operaciones de suma y resta.[7] Cabe señalar, en primer lugar, que los diferentes acercamientos al aprendizaje observados en las mujeres del estudio devienen de sus particulares posicionamientos sobre lo simbólico y sus asunciones, tanto de lo que saben como de lo que suponen que les falta por aprender sobre las temáticas tratadas en la experiencia de enseñanza. Y en segundo lugar, que si bien las distintas condiciones de partida implicaron la consecución de acciones didácticas específicas, éstas no modificaron los principios didácticos generales sustentados en la ingeniería diseñada.

TRES MUJERES, TRES HISTORIAS. SUS VÍNCULOS CON EL SABER

CARMEN

Tiene 46 años, es originaria del Estado de México (México), ha cursado dos años de primaria y, cuando la contactamos, atendía un puesto callejero de dulces. *Carmen disponía, al inicio de la experiencia, de un cálculo mental eficiente y eficaz,*[8] en un rango numérico no mayor de 200, en el cual empleaba el registro de los datos de los problemas aditivos únicamente como recurso de apoyo. Este nivel de eficacia llevó a identificar esta estrategia de Carmen como un cuasi algoritmo, es decir, como un procedimiento de resolución sistemático. Así, por ejemplo, se le presenta el problema:

> Pagas en el súper la compra y la cajera no tiene para darte tu vuelto de \$65. Entonces la cajera te pide algo de cambio. Se lo das. Si te dan \$110 de vuelto, ¿cuánto te pidió de cambio la cajera? [110 − 65 = 45]

Para resolverlo, hace uso de una estrategia no convencional, busca el complemento aditivo por aproximaciones sucesivas, calculando en sentido de menor a mayor, controla mentalmente lo que va sumando y procede sistemáticamente:

[7] No debe entenderse, sin embargo, que los números y las operaciones aparecieron sin referente contextual; de hecho, surgieron a lo largo de la experiencia de aprendizaje para solucionar diferentes problemáticas.

[8] "...eficiencia, es decir, número de tanteos necesarios para lograr resultados correctos; [...] eficacia, entendida como la capacidad de obtener resultados correctos" (Ávila, 1990, p. 60).

C. [silencio] Eh ... ¿Cuarenta y cinco (es correcto)?
E. A ver, ¿cómo hiciste?
C. Sumé.
E. Sí, yo escuchaba que en voz bajita decías sesenta y cinco.
C. Setenta, ochenta, noventa, cien, ciento diez. ¿Sí?

(Delprato, 2002, p. 132)

Reconstrucción del algoritmo mental:
Resolución convencional: 110 – 65
(sólo escribe uno de los datos: 65)

45
argumentación:

65 (+ 5)	=	**70**	5
(70 + 10)	=	**80**	+ 10
(80 + 10)	=	**90**	+ 10
(90 + 10)	=	**100**	+ 10
(100 + 10)	=	**110**	+ 10
			45

Asimismo, dadas las características mencionadas, *la entrevistada valorizaba este recurso disponible al punto de mostrarse como la estrategia predilecta de resolución en desmedro del cálculo escrito*. Cabe señalar que Carmen conocía el cálculo escrito (suma y resta), así como su lógica subyacente, pero de modo implícito. También era capaz de identificar la operación (de suma o resta) que permite resolver cierto tipo de problemas aditivos.[9]

Olga

Nació en el estado de Guerrero (México), tiene 25 años, no ha tenido acceso a la escolaridad, pero dispone de una fuerte expectativa de acceso a lo educativo. Su migración al Distrito Federal en busca de trabajo (es empleada doméstica) le significó colateralmente una reapertura en su historia personal de esa expectativa:

> Quería estudiar, pero ahora sí que yo oí hablar del INEA,[10] nada más que allá [en Guerrero] es difícil, te salen caros los materiales, entonces no, no... y aquí

[9] Al inicio de la secuencia, Carmen pudo resolver con éxito las siguientes categorías aditivas (Vergnaud, 1991): 1ª categoría, búsqueda de la medida compuesta; 2ª categoría, búsqueda del estado inicial cuando la transformación es negativa; 4ª categoría, búsqueda de una transformación elemental cuando las transformaciones son opuestas; 5ª categoría, búsqueda del estado inicial; 6ª categoría, búsqueda de uno de los estados relativos. No pudo resolver correctamente la 3ª categoría, pues vacilaba entre identificar la incógnita (la otra medida) con la medida elemental ya proporcionada o con la relación.

[10] Siglas del Instituto Nacional para la Educación de Adultos (de México). A Olga se le contactó en un grupo de alfabetización del Instituto.

> aparte de que trabajo, eso me da campo de estudiar, me da campo [...] es como yo decía, yo quiero seguir estudiando y que no me llegue a pasar nada y, mientras pueda, voy a echarle ganas a estudiar, porque me da pena ver que otras personas saben y yo no.

Olga mostraba seguridad y confianza en sus saberes matemáticos, pese a la vivencia de la exclusión y de la valorización del acceso a la escolaridad:

> Pues sí, o sea, no los conozco [se refiere a los números] en la forma de... como por ejemplo, el número [...] para escribirlo no lo sé [...] Para contar sí, cuento de 1, 2, hasta el 200, 300, ¡el 500, 1 000! Pero nada más en voz, no para verlos ni para...

Olga, inicialmente, sólo interpretaba y producía números con soltura hasta el 20; no era consistente en la aplicación de criterios ni en la interpretación ni en la producción de números mayores; no acudía a ningún tipo de registro como apoyo en la resolución de problemas y su recurso de solución era un cálculo mental signado por varios intentos y pocas probabilidades de éxito.

Sofía

Proviene del estado de Hidalgo (México), tiene 28 años, no ha ido a la escuela (cuando se realizó la experiencia, cursaba la primaria en el INEA) y trabaja como empleada doméstica. *Sofía, al inicio de la experiencia, resolvía los problemas propuestos mediante un cálculo escrito erróneo, apoyándose en el registro de los datos numéricos y algún dato de su contexto,* como puede observarse en el siguiente registro:

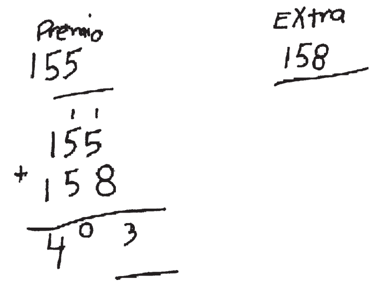
Problema: "Si usted no falta, su patrón le prometió un premio de $155 por mes. Pero, además, este mes, como vinieron visitas, también le pagaron $158 extras. ¿Cuánto cobrará extra este mes?" [155 + 158 = 313]

[Después de que resuelve la operación en silencio, la entrevistadora le pide que la argumente]

S. Me salió cuatrocientos tres (es incorrecto).
E. ¿Cuatrocientos tres? A ver, ¿cómo le hiciste?
S. Sí, porque son trece *[resultado de sumar las unidades 5 + 8]*. Son 10 *[suma las decenas]*, llevamos una *[se refiere al 1 que escribió en la columna de las decenas]*. Y dos, más los dos *[señala los 1 "que se llevaba"]*, cuatro.

(2º E.33)

Su anotación es:



A pesar de la ineficacia mostrada en su cálculo escrito (pues aplicaba toda transformación al orden mayor, las centenas, y anotaba los reagrupamientos encolumnados, no en el grupo al que afectaría, sino sobre los grupos en el que se originaban estos reagrupamientos), tenía una fuerte creencia en esta modalidad de resolución. La dificultad que esta preeminencia de lo simbólico ocasionó en Sofía fue su búsqueda de modos de control intrínsecos a lo simbólico, es decir, demandaba (a la entrevistadora) procedimientos para su control que le posibilitaran prescindir de algún referente concreto.

La sucinta semblanza de las tres mujeres y sus vínculos con el saber, descrita en los párrafos precedentes, sitúan a Carmen como un caso interesante, porque en él –como se mostrará más adelante– se devela cómo el cálculo mental (estrategia dominante) puede constituirse tanto en una potencialidad como en un obstáculo para el aprendizaje del cálculo escrito. Mientras que, en Olga, se evidencian las asunciones didácticas que posibilitaron que ella reconociera los vínculos entre la escritura de los números, la interpretación del sistema de numeración y el desarrollo de estrategias de cálculo. Asimismo, la secuencia le permitió llegar a la representación escrita, lo que significó el desplazamiento de la reiteración de los datos del problema para poder recordarlos (gesto propio de las culturas orales). Así, la escritura significó para Olga un recurso, no sólo para "representar" los problemas, sino también para su resolución a través de un cálculo más eficiente y eficaz: el algoritmo de la suma y de la resta. Aunado a ello, el interés de este caso consiste también en que, si bien Olga –en relación con las otras dos mujeres– llega más lentamente a lo simbólico, por su ausencia inicial de registro, responde de un modo más natural y fluido a la intervención didáctica, es decir, presenta menos resistencias a la propuesta.[11] Finalmente, el interés del caso de Sofía radica en algunos rasgos de sus conocimientos aritméticos previos. Sofía valorizaba, como se señaló, el cálculo escrito como la estrategia preferida de resolución en detrimento del cálculo mental. Quizás esta predilección se vinculase con su mirada sobre el valor del acceso a lo simbólico y su importancia en el ámbito escolar. Este posicionamiento de Sofía frente a lo simbólico no es en sí totalmente cuestionable, pero el algoritmo que tenía Sofía como único recurso para el cálculo era erróneo; al inicio de la experiencia, nunca hizo el intento de recurrir al cálculo mental, simplemente porque no le otorgaba a éste ningún valor.

INTERVENCIÓN DIDÁCTICA DISEÑADA

CARMEN

La ingeniería didáctica diseñada con Carmen procuró dotarla de un recurso alternativo al cálculo mental y, simultáneamente, redefinir la valorización de éste como estrategia privilegiada de resolución.

El recurso alternativo propuesto fue el cálculo escrito. Para ello, fue necesario fortalecer el dominio inicial que tenía Carmen de los procesos de resolución de la suma y de la resta, dotándola de posibilidades de argumentación de los procedimientos algorítmicos al tematizar la lógica subyacente de éstos. La explicitación de dichos procedimientos y sus vínculos con las leyes del sistema de numeración decimal (SND) permitiría que Carmen dispusiera de este recurso con mayor autonomía y con mayores posibilidades de generalización.[12]

Con este propósito, en la secuencia se enfrentó a Carmen con situaciones que le dieran la posibilidad de familiarizarse con:

[11] En Carmen, la sobrevaloración de su cálculo mental (Delprato y Fuenlabrada, 2003b) y, en Sofía, la preeminencia de lo simbólico (construido erróneamente) en detrimento de la evocación de un referente de uso social (el sistema monetario) (Fuenlabrada y Delprato, 2003b), se manifestaron como obstáculos en el desarrollo de la secuencia de enseñanza.

[12] Panizza (2003) advierte sobre la postura didáctica diferente de la tradición escolar frente a los mecanismos de cálculo, signada por niveles de automatización que hacen olvidar que dichos mecanismos también requieren construcción: "...el riesgo es considerar que los *conceptos* son motivo de construcción, que están ligados al sentido, a la comprensión, mientras que los *mecanismos* están desprovistos de sentido y puede accederse a ellos por observación sensorial. Es así como en algunas corrientes de enseñanza coexisten una *concepción constructivista* de la enseñanza de los conceptos matemáticos y una *concepción empirista* en relación con los sistemas simbólicos" (p. 52).

- Las transformaciones implícitas en los algoritmos de suma y resta (reagrupar y desagrupar,[13] respectivamente).
- Las leyes de escritura de los números (posicional y decimal).
- Los procedimientos algorítmicos (encolumnar, dirección más eficaz de resolución, transformaciones).

La interacción con las *transformaciones implícitas en los algoritmos de la suma y la resta* se provocó mediante la implementación del juego de *El Cajero* (Fuenlabrada, Block, Balbuena y Carvajal, 1991) con algunas modificaciones. En este juego,[14] como material se utilizaron fotocopias del sistema monetario mexicano (monedas y billetes de $1, $10 y $100).[15] El uso de este material obedece a que el dinero es un portador social de uso de los números que permite recuperar la familiarización implícita con las leyes de cambio relacionadas con la organización decimal del SND; estos dos aspectos son reconocidos en general por los adultos no alfabetizados (Delprato y Fuenlabrada, 2003a).

Este juego consiste en ir tirando dados para las diferentes posiciones del SND (unidades, decenas, centenas) por turnos y pedir o entregar dinero (monedas de $1 y $10, y billetes de $100) al cajero en función de lo que los dados señalen. En el cajero *ascendente* se va pidiendo dinero y, cada vez que se reúnen 10 monedas del mismo valor, deben cambiarse por una del valor inmediato superior; gana el primer jugador que logra reunir una cantidad de dinero preestablecida. En el cajero *descendente*, en cambio, se va entregando dinero al banco, la cantidad exacta de dinero que indiquen los dados; gana el primer jugador que se deshaga de su dinero.

Como puede deducirse, este juego propicia una familiarización con los procedimientos de reagrupar y desagrupar requeridos para la resolución de las "cuentas" de suma y resta, asentados en la regla de cambio del SND (se requieren 10 de un grupo para obtener 1 del grupo inmediato superior, o –a la inversa– con 1 de un grupo se pueden obtener 10 del grupo inmediato inferior). El cajero ascendente promueve esta familiarización, al contemplar dentro de sus reglas la

[13] Reagrupar: acción de cambiar 10 de un grupo menor por 1 del inmediatamente mayor, comúnmente llamado en México: "llevar". Desagrupar: acción de cambiar 1 de un grupo mayor por 10 del inmediatamente menor, comúnmente llamado en México: "pedir".

[14] Para conocer su potencial como recurso didáctico, consúltese Delprato y Fuenlabrada (2003a).

[15] En México circulan monedas o billetes de: $1, $10, $100, $2, $20, $200, $5, $50 y $500; en las caras de los dados que se utilizan en el juego, aparecían (dos veces), respectivamente, los números: 1, 2 y 5; 10, 20 y 50; 100, 200 y 500.

exigencia de realizar reagrupamientos (cada vez que se tienen 10 monedas de un tipo DEBEN cambiarse); y el cajero descendente, al demandar el pago con cantidades EXACTAS, enfrenta a situaciones de desagrupamientos (necesidad de cambiar con el cajero antes de pagar para hacerlo de manera exacta).

Asimismo, en el contexto del juego mencionado, se promovió el desocultamiento de las *leyes de escritura*. A medida que se jugaba, se iban registrando las cantidades obtenidas (de los tiros y las resultantes después de pedir o entregar dinero) en una tabla, lo que permitía poner en evidencia el carácter posicional del SND. El único rastro de la variación del valor de las cifras es el lugar que ocupan y esto se explicitaba en los encabezados de las columnas que componían la tabla ($100, $10, $1). Esta modalidad de registro, al confrontarse con la escritura habitual de los números, permitía develar entonces el carácter relativo del valor de las cifras en función de la posición en un número. Pero, a la vez, este reconocimiento de la lógica posicional de la representación escrita de los números demanda la aplicación de agrupamientos exhaustivos (respetando la regla de cambio mencionada). Esta exigencia de exhaustividad en los agrupamientos se mostró a través de la problemática de la escritura de cantidades representadas materialmente sin correspondencia con la escritura convencional (por ejemplo, $150 representados con 14 monedas de $10 y 10 monedas de $1). Así, la entrevistada reconoció la necesidad de aplicar los reagrupamientos para obtener la escritura convencional de una cantidad (es decir, en el ejemplo citado, cambiar 10 monedas de $10 para obtener 1 billete de $100 y 10 monedas de $1 por 1 moneda de $10, teniendo finalmente –como lo indica la escritura del número 150– 1 billete de $100, 5 monedas de $10 y ninguna moneda de $1). Esta reflexión también permitió argumentar la transformación de "reagrupar", implícita en el algoritmo de la suma, y que Carmen sólo podía nominar como "me llevo una", desconociendo su significado y fundamento. Finalmente, la tabla enfrentó a Carmen con algunas componentes de eficacia de los *procedimientos algorítmicos* habituales que han contribuido a su adopción como convencionales. Por ejemplo, la ubicación de las cifras correspondientes a una misma posición una debajo de otra (encolumnar) como un mecanismo facilitador del cálculo; pues este procedimiento, junto con el carácter posicional del SND, hace posible el tratamiento de las cifras como dígitos, en contraposición al recurso de descomposición aditiva empleado por el cálculo mental. Ello se hizo evidente en una situación de dictado de sumandos de diversa cantidad de cifras.

Por otro lado, el sentido de la resolución de derecha a izquierda (en contraposición con la dirección de izquierda a derecha, o sea de las cifras mayores a las menores, del cálculo mental) se analizó en el contexto de la resolución de operaciones aditivas –de suma y resta– (con transformaciones) en la tabla. Se propuso probar por dónde iniciar el cálculo para no tener que borrar. Así, al confrontar con los algoritmos convencionales, Carmen pudo vincular la resolución de derecha a izquierda como un procedimiento que permite evitar estar borrando cada vez que se hace un reagrupamiento.

Además, se instauró el algoritmo ampliado,[16] *y en definitiva la escritura, como alternativa de eficacia frente a la mayor complejidad operatoria*. Para ello, se presentó el algoritmo ampliado como un recurso para controlar las transformaciones (reagrupar y desagrupar) que posibilita prescindir de la necesidad de retener en la memoria las transformaciones sucesivas ("lo que me llevé" o "lo que pedí").

La redefinición de la valorización del cálculo mental como estrategia predilecta de resolución, que era sostenida por Carmen, se realizó orientando el sostenimiento de su uso como recurso de validación y, simultáneamente, develando sus alcances. Así, fueron constatándose los límites del cálculo mental por su pérdida de eficacia frente a una mayor complejidad operatoria. Incluso, se puso en evidencia como fuente de error en el uso del algoritmo ampliado, cuando Carmen lo utilizaba como mero mecanismo de explicitación y no como recurso de apoyo de la operación. Esto se manifestaba en que, inicialmente, recurría al algoritmo ampliado, pero lo utilizaba en el agrupamiento en el que iba a operar sin registrar la transformación del reagrupamiento afectado, lo cual limitaba su eficacia cuando se realizaban varias transformaciones sucesivas sobre un mismo agrupamiento. En el siguiente ejemplo, puede observarse que este uso inicial que Carmen hacía del algoritmo ampliado asentado en la memorización de resultados parciales, la lleva a cometer un error, pues le impide recordar que las centenas han sido afectadas por varios cambios, por lo cual quedan nueve centenas en vez de las diez que ella considera:

[16] Se denomina *algoritmo ampliado* aquel en el que se incorporan anotaciones marginales para indicar las transformaciones realizadas, es decir, los reagrupamientos en la suma ("lo que me llevo") y los desagrupamientos en la resta ("lo que pedí").

C. *[va diciendo en voz baja mientras resuelve]* Quince *[escribe 15 arriba de las unidades].*

C. A quince le quitamos siete ... ocho. Ocho *[escribe 8 en el resultado en las unidades].*

C. A doce ... a once *[escribe 11 arriba de las decenas]* le quitamos ... cuatro ... siete *[escribe 7 en el resultado en las decenas].*

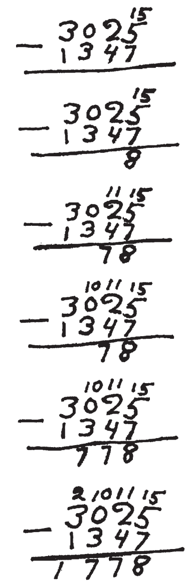
C. Siete. Umm ... o sea que ... diez *[escribe 10 arriba de las centenas].*

C. A diez le quitamos tres, quedan ... siete *[escribe 7 en el resultado en las centenas que es incorrecto].*

C. Siete. Al dos *[escribe 2 arriba de los miles]* le quitamos una ... queda una *[escribe 1 en el resultado en los miles].*

(Delprato, 2002, p. 74)

Su anotación es:



Simultáneamente a esta explicitación de los límites del cálculo mental, sostenerlo como recurso de validación (mediante la estimación) supuso mostrarlo como una estrategia valiosa que permite la rectificación y la toma de conciencia incluso de errores ocasionados por su uso en situaciones de mayor complejidad operatoria. Por ejemplo, al sumar 87, 476 y 588, intenta resolverlo entretejiendo el cálculo mental y la manipulación simbólica, ubicando equivocadamente el 87 en la disposición convencional de la suma. Cuando obtiene 1 864, el resultado la sorprende, le parece excesivo, porque ella había estimado que tendría que ser como: "mil y feria".

OLGA

La ingeniería didáctica que se implementó con Olga procuró darle un recurso alternativo a su accidentado cálculo mental, que restaba eficacia y eficiencia a sus cálculos espontáneos empleados para resolver problemas aditivos, revirtiendo así la ausencia de registro para retener tanto las cantidades involucradas como las operaciones.

El recurso alternativo fue la ampliación del rango numérico dominado, el conocimiento de las leyes del SND mediante la evocación del sistema monetario y el uso de dichas leyes en la operatoria, proveyéndola en el transcurso del aprendizaje de posibilidades de argumentación para la interpretación y producción de números y de procedimientos algorítmicos.

En la secuencia, Olga se enfrentó a situaciones que le permitieran familiarizarse con:

- La ley de reagrupamiento y su inversa, la de desagrupamiento del SND.
- Las leyes de escritura de los números (posicional y decimal).
- Las transformaciones implícitas en los algoritmos de suma y resta (reagrupamientos y desagrupamientos).
- Los procedimientos algorítmicos (encolumnar, dirección más eficaz de resolución).

Para propiciar que Olga empezara a interactuar con *la ley de reagrupamiento y, su inversa, la de desagrupamiento del SND* y con *las transformaciones implícitas en los algoritmos de suma y resta,* se realizó –como se hiciera con Carmen– el juego de *El Cajero*. Pero, en este caso, el énfasis se puso primero en el desocultamiento de *las leyes de escritura de los números,* en lo que respecta al valor posicional de los dígitos. Como se detalla a continuación, también se pidió a Olga que fuera registrando en una tabla con columnas (en cuyos encabezados aparecía: $100, $10, $1; en ese orden) las cantidades obtenidas antes y después de realizar los cambios, y que aplicara los agrupamientos de manera exhaustiva para escribir convencionalmente cantidades según las leyes del SND.

Olga y los números

La manipulación didáctica por parte de la entrevistadora de los recursos descritos (*El Cajero* y la tabla) permitió que Olga utilizara un referente (el comportamiento de los agrupamientos decimales del sistema monetario) para mejorar paulatinamente su competencia en la *interpretación* de los números.

Al inicio de la experiencia, mostró confusiones en la lectura de cantidades escritas en cartones; por ejemplo, el número 310 lo leyó como trescientos uno (301), el 130, como treinta y uno (31), el 7 500, como quinientos siete (507). Estas confusiones iniciales, que adoptan la forma de inversiones en la interpretación, quizás se deban a que Olga se centraba en las cifras reconocidas en la denominación oral de los números, pero sin considerar el papel relevante de la posición que ocupan.

Posteriormente, logra rectificar estas lecturas a partir de la identificación sugerida de los agrupamientos y de su conocimiento de los múltiplos de cien. Así, en el 864 reflexiona: *"es... ocho billetes de cien... son ocho de a cien... son* [cuenta usando los dedos] *cien, doscientos, trescientos [...] ochocientos"*, llegando a la interpretación correcta.

En la *producción* de números, Olga inicialmente combinaba diversas hipótesis, la más consolidada parecía ser la necesidad de diversidad en la escritura para números distintos. En algún momento recibe $240 en billetes (sabe cuánto dinero es), pero escribe 24, la entrevistadora, para crearle un conflicto, le entrega entonces $204 y le pide que escriba la cantidad, Olga anota también 24: *"Umm* [silencio] *éste lleva cero"* [señalando el 24 que representa al 240, lo corrige y escribe 204]. En este ejemplo, puede observarse que Olga reconocía que el 240 (en cuanto combinación de los nudos: 200 y 40) llevaba un cero, pero desconocía en qué lugar debía colocarlo. Optaba también por una escritura aditiva, apoyada en la descomposición que sugiere la serie oral, siempre que no se produzca un número de tamaño "excesivo". Por ejemplo, para el ciento cinco escribe: 100 5 (100 + 5) que no le crea demasiado conflicto; sin embargo, ante su escritura del mil quinientos como 1000 500 (1000 + 500) no se siente conforme.

De modo incipiente, en la cuarta sesión, cuando utiliza la tabla, empieza a visualizar una relación entre la regla de cambio y las leyes de escritura de los números. Niega que pueda escribirse 12 u 11 en la columna de $1, pero considera que sí puede escribirse 10 en cualquier columna (de los cienes, dieces o unos), pero después de retomar la regla de cambio, concluye que la cifra máxima es nueve. Este vínculo vuelve a explicitarse posteriormente en la escritura de cantidades producto de un reagrupamiento, aunque con oscilaciones y, por consiguiente, todavía no lo bastante consolidado como estrategia. En la quinta sesión, cuando suma la operación con contexto 274 + 83 cuenta las monedas de $10 y registra en la tabla, sin ninguna contradicción, el total (15) en la columna de los dieces. Luego se le pide que escriba la cantidad de dinero que tiene (357) y, a partir de la diferencia con la escrita en la tabla (2 157), la entrevistadora le hace notar que el origen de la diferencia entre las dos escrituras es el no respeto a la regla de cambio. Después, durante la misma sesión, en la operación con contexto 357 + 264 constata que, en total, tiene $621 (5 billetes de $100, 11 monedas de $10 y 11 monedas de $1), cuando va a registrar las monedas de

$10, se le pregunta si puede escribir 11, responde negativamente y propone cambiar sin respetar la regla de cambio, pero respetando las restricciones de escritura en cada columna en las que anteriormente había reflexionado (el número máximo posible en cada columna es 9): Tienes once monedas de diez, ¿qué harías? *"cambiar"*, ¿cuántas vas a cambiar? *"una... dos"*; ¿dos? (pregunta la entrevistadora) *"sí"* –afirma Olga– (para llegar hasta el 9).

Posteriormente, aunque persisten ocasionalmente algunas dificultades (por ejemplo, para resolver un problema escribe 61 para representar el seiscientos –seis... [6]cien[1]tos–), dispone de un recurso para rectificar esa escritura: lo hace a partir del reconocimiento de que seiscientos son seis billetes de $100 y que no tiene monedas de $10 ni de $1, borra (61) y escribe 600. En la séptima sesión, se le entregan $255 (un billete de $100, quince monedas de $10 y cinco monedas de $1), reconoce la cantidad que ha recibido y antes de registrarla propone: *"tengo que cambiar por un billete de a cien"* (se refiere a las monedas de $10).

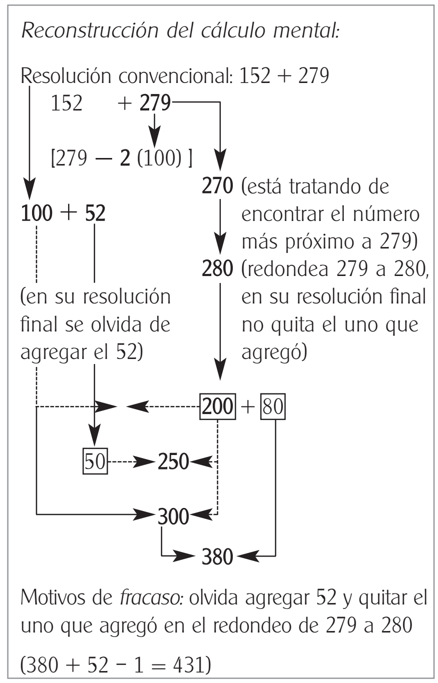
A partir de los avances reseñados de Olga en torno a su representación numérica, puede concluirse que, aunque en estudios sobre la adquisición del sistema de numeración (Lerner y Sadovsky, 1994) se ha informado que la noción de agrupamiento no es el origen de la comprensión de la posicionalidad, la tematización de la noción de agrupamiento con Olga (cuyo referente de producción central es la serie oral y, por ende, produce escrituras no estrictamente posicionales) hace posible –al recuperar la descomposición aditiva sugerida en la serie oral– develar la posición como único rastro de dicha descomposición.

Olga y la operatoria

Como ya se asentara, Olga al inicio de la experiencia no contaba con ningún recurso gráfico que le sirviera de referente para el cálculo. Por ello, solicitaba a la entrevistadora continuamente la reiteración de los datos o ella misma los repetía varias veces, como intentando "capturarlos" para poder operar con ellos. Así, por ejemplo, frente al problema: "Estás cancelando de a poco una deuda. Este mes pagaste $152 y debes aún $279, ¿qué deuda tenías antes del pago de este mes?" La entrevistada reconoce que debe encontrar el resultado de 152 + 279; para ello, redondea el sumando mayor (279) a 280 y el sumando menor (152), en principio, a 150, pero solamente opera con 100. Al final, olvida agregar los 52 y quitar el 1 que había agregado al 279 (que en el cálculo consideró como 280), por lo que llega a un resultado erróneo 380 en lugar de 431. Evidentemente, Olga ha establecido una relación semántica correcta entre los datos, su proyecto para resolver el cálculo aritmético también es acertado aunque complejo por las oscilaciones entre la consideración de un dato y otro. En el proceso, la ausencia de registro tanto de los datos como de un procedimiento algorítmico de solución, le causan un gran esfuerzo para calcular, esto puede observarse en el registro correspondiente que a continuación se presenta:

O. Doscientos setenta y nueve, le quito los dos *[se refiere a los 200]*, doscientos setenta *[está tratando de encontrar el número más próximo al 279]*, doscientos ochenta *[redondea 279 a 280]* ... y doy de abono ciento *[piensa en el 100 del 152]*...
E. Ciento cincuenta y dos.
O. Cincuenta y dos *[no considera el 100 del 152 y los 52 los redondea a 50]* son... doscientos *[piensa en el 200 del 280 que ya había obtenido]*... ciento *[retoma el 100 del 152]*... doscientos cincuenta *[suma 200 del 280 con los 50 del 52]*, trescientos *[suma ahora el 200 del 280 pero con el 100 del 152]*, trescientos. ¿Debía trescientos ochenta *[recupera el 80 del 280 provenientes del 279, que suma a los 300 recién obtenidos]*?

(Delprato, 2002, p. 131)



Uno de los motivos señalados de ineficacia e ineficiencia en el cálculo inicial de Olga, la ausencia de registro de datos, fue revertido mediante los avances ya mencionados en la representación escrita de los números.

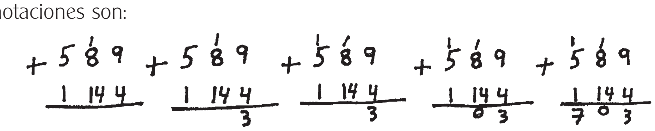
Asimismo, como se ha señalado, Olga inicia una interacción sistemática con *las transformaciones implícitas en los algoritmos de suma y resta (reagrupamientos y desagrupamientos)* cuando realiza el juego de *El Cajero*. A su vez, el trabajo de registro en la tabla le permite tener experiencias que la aproximan a *los procedimientos algorítmicos de la suma y de la resta, tales como encolumnar y la dirección (de derecha a izquierda) más eficaz de resolución* cuando se opera en el plano de lo simbólico. La entrevistada reflexiona sobre la eficacia del procedimiento escrito cuando realiza los cálculos empezando en la columna de la derecha, ante la evidencia del error que le ocasiona operar comenzando por la columna de la izquierda. Para hacer evidente el error, la entrevistadora le sugería recuperar la tabla o evocar el contexto monetario. Logró, incluso, introducir los signos gráficos para identificar cada operación y el resultado e identificar también la ubicación espacial de los signos y de la raya indicadora del resultado, pudiendo después no sólo usar los signos, sino además reflexionar sobre este logro y su importancia:

> [...] y eso es lo que yo erraba en esos signos, éste [–] pues no le entendía. Éste [+] [...] sí sé que es para la suma y el que se me hacía difícil era éste [–] y el otro, el que es como una equis [...] lo único que ella [se refiere a su asesora en INEA] me explicó es que lo tenía que poner abajo [las cantidades una debajo de otra para realizar el algoritmo] [...] ya ahorita que me ha estado enseñando, bueno que usted me ha enseñado, éste me quedó así y digo: "¿para qué, para quitar o para poner?"

Al operar fuera de la tabla, ante la presencia de algunas dudas en torno al modo de representar los reagrupamientos, se incorpora también –como se hizo con Carmen– el algoritmo ampliado. Con el acompañamiento de la entrevistadora, le queda claro que escribir en una columna lo reagrupado es indicador de que es un sumando que debe ser agregado en dicha columna. Paulatinamente, logra mayor independencia, hasta incorporar el registro sugerido de manera autónoma y empieza a operar evocando por iniciativa propia el referente monetario. Por ejemplo, al resolver en el plano de lo simbólico 589 + 114:

> Umm ... nueve ... ¿trece pesos? [...] cambiaría los de a peso por de a diez *[anota el 1 arriba de las decenas]* quedan tres *[escribe 3 en las unidades]* diez monedas de a peso ... de a diez *[rectifica]* [...] las cambiaría [...] por un billete de cien, le pongo *[escribe 1 arriba de las centenas]* ¿cero? *[señala el lugar de las decenas, y lo anota]* Umm ... cinco, seis ... cinco, seis ¿siete? *[escribe 7 en el lugar de las centenas]*.

Sus anotaciones son:



(Delprato, 2002, pp. 115-116)

Sofía

La ingeniería didáctica diseñada para trabajar con Sofía buscó proveerla de recursos para la rectificación, control y argumentación de su propio cálculo escrito, al dotar a su simbolización (de los números y de los algoritmos) de un referente.

La instauración de un referente como mecanismo de explicitación, reconocimiento y control de la lógica subyacente a dicha simbolización fue realizada en la intervención didáctica, dado que la entrevistada no empleaba al cálculo mental como recurso alternativo.

El referente propuesto entonces para la resolución de problemas aditivos fue el uso del dinero, por la familiaridad de la entrevistada con situaciones de cambio en este contexto.

El uso de este referente fue presentado en situaciones que procuraban familiarizar a Sofía con:

- Transformaciones implícitas en los algoritmos de suma y resta.
- Develar las leyes de escritura de los números.
- Explicitar procedimientos algorítmicos.

A fin de propiciar la interacción de Sofía con las transformaciones implícitas en los algoritmos de la suma y la resta se recurrió, como con las otras mujeres, a la implementación del juego de *El Cajero*.

Asimismo, en el contexto del juego mencionado, se promovió la develación de las leyes de escritura de los números. Nuevamente, el uso del registro de las cantidades obtenidas en una tabla y su confrontación posterior con la escritura habitual de los números permitía hacer evidente el carácter posicional del SND. Además, como ya se mencionó, este reconocimiento de la lógica posicional de la representación escrita de los números demanda la aplicación de agrupamientos exhaustivos (que respeten la regla de cambio); exigencia que se mostró –también con Sofía– a través de la problemática de la presentación de cantidades representadas materialmente sin correspondencia con la escritura convencional. Así, la entrevistada reconoció la necesidad de aplicar los reagrupamientos para obtener una escritura convencional de una cantidad. Esta reflexión le dio también a Sofía la posibilidad de argumentar la transformación de "reagrupar" implícita en el algoritmo de la suma ("me llevo una"). De esta manera, cuando realiza la operación con contexto 258 + 185, al contar las monedas de \$10 manifiesta:

S. [...] Dos, cuatro, seis, ocho, diez. ¿Me puede cambiar éstas *[le entrega a la entrevistadora 10 monedas de $10]*?
E. ¿Por qué quieres cambiar?
S. Por un billete de a cien.
E. Ajá *[le entrega 1 billete de $100].* Si no vas a tener el problema de la otra vez, ¿no?
S. Sí.
E. Que no lo podías escribir.

Finalmente, la tabla enfrentó también a Sofía con algunas componentes de eficacia de los algoritmos habituales, tales como: el sentido de la resolución de derecha a izquierda, que fue analizado en el contexto de la resolución de operaciones aditivas (con transformaciones) en la tabla. Se propuso probar también (al igual que con Carmen y Olga) por dónde iniciar el cálculo para no tener que borrar, esta inquietud se instaló por la evidencia del error que le ocasionaba operar en sentido de izquierda a derecha:

E. Volviste a borrar, ¿no?
S. Sí, porque tuve que cambiar.
E. Ajá. Hay una forma de evitar que uno borre.
S. ¿Cómo?
E. ¡Ah! Ya lo vamos a ver.
S. *[se ríe]*.

Al confrontar con los algoritmos convencionales, Sofía pudo vincular la resolución de derecha a izquierda como un procedimiento que permite evitar borrar, cada vez que hay una transformación (de reagrupamiento o desagrupamiento).

Posteriormente, se empleó otra vez el dinero como referente y el registro en la tabla, pero en el contexto ya no del juego sino de la resolución de problemas aditivos. Al confrontar los resultados obtenidos para un mismo problema haciendo uso de su algoritmo personal erróneo y del dinero y la tabla, se presentó una contradicción en Sofía. A partir de este conflicto generado, fue posible, paulatinamente, rectificar sus procedimientos de cálculo y argumentar estos nuevos procedimientos evocando las transformaciones explicitadas al emplear el referente.

En este proceso, dada la adhesión de Sofía a mecanismos de control simbólico, hubo menos resistencias que las observadas en Carmen para la adopción de un algoritmo ampliado diferente al que ella empleaba. Sin embargo, mostró más resistencia que Olga para usar el dinero como referente de explicitación y de argumentación de los algoritmos. En las entrevistas iniciales, Sofía nunca manifestó la evocación de ningún referente extraescolar para apoyar su cálculo y, de hecho, en las primeras experiencias con *El Cajero*, se mostró incómoda, no sólo porque se "estaba jugando" (sinónimo para ella quizás de pérdida de tiempo), sino, de manera más preocupante, porque no reconocía en sus posibilidades de cálculo con el dinero ningún conocimiento matemático válido. En cierto sentido, para Sofía "hacer matemáticas" estaba únicamente vinculado con lo simbólico (en su connotación escolar).

Esta valorización de lo simbólico permitió hacer algunos ajustes en las anotaciones marginales al promover la toma de conciencia de su uso como apoyo al procedimiento de resolución. Así, rectifica la anotación de "lo que me llevo" (lo escribía sobre el grupo donde se originaba) en la suma, abordando la importancia de encolumnar como estrategia para esclarecer el orden en el que opera el reagrupamiento; y en la resta, se validó el registro de los sucesivos desagrupamientos ("lo que pedí").

Ante la resistencia a la evocación del referente, la adopción del algoritmo ampliado de la suma y su rectificación se hizo inicialmente sólo en el plano de la escritura (si bien ya encolumnaba sobre el grupo al que afectaría el reagrupamiento, no lo aplicaba allí sino sobre el orden mayor –las centenas–). Por ello, al principio, aunque rectifica el encolumnar, persiste con el procedimiento de reagrupar todo en las centenas, como puede observarse en el siguiente algoritmo, pues en las centenas 4 + 3 + 2 le da como resultado 9:

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ 476 \\ +388 \\ \hline 964 \end{array}$$

(Delprato, 2002, p. 122)

Luego corrigió el procedimiento, pero sólo recuperando el indicio gráfico que le proveía el ya encolumnar correctamente las anotaciones marginales ("sumo todo lo que está en una misma columna"). Es decir, toma conciencia del carácter orientador del algoritmo ampliado para la operatoria de la suma, pero tiene dificultades para argumentarlo porque no había operado con respaldo en la lógica subyacente al algoritmo, sino rectificando su creencia previa de "adónde llevar". O sea, persiste en la justificación desde el manejo de lo simbólico, "Porque lo tenía que poner ahí", sin acudir al referente sugerido, el del dinero:

E. Ahora, explícame una cosa, Sofía. ¿Por qué te llevas uno ahí *[señala el 1 escrito arriba de las decenas]*, por qué te llevas uno ahí *[señala el 1 escrito arriba de las centenas]*? ¿Qué quiere decir eso de que te llevas uno? No te estoy diciendo que esté mal. Quiero que me expliques qué es lo que quiere decir.
S. Porque aquí *[señala las unidades]* era... umm... nueve más dos, diez, once.
E. Once.
S. Y no lo puedo poner aquí *[señala las unidades en el resultado]*, lo puse acá *[señala el 1 escrito sobre las decenas]*.
E. ¿Por qué lo pusiste ahí?, a ver.
S. Porque lo tenía que poner ahí.

(Delprato, 2002, p. 123)

Su anotación es:

$$\begin{array}{rl} 1\;1\; & \\ 622 & R= \\ +299 & \\ \hline 921 & \end{array}$$

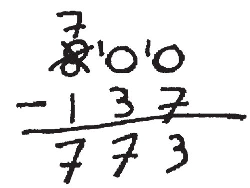
Sofía no pudo argumentar este nuevo procedimiento hasta que venció su resistencia a evocar las situaciones de cambio con el dinero. Posteriormente, al visualizar la dificultad para justificar los reagrupamientos, empieza a reconocer que la sugerencia de utilizar el referente del dinero le permite controlar lo simbólico. Así, en la argumentación del reagrupamiento de decenas a unidades realizado en la cuenta anterior, recurre al dinero: "Porque aquí *[señala el 1 escrito sobre las decenas]* lo cambié por de a diez. No le puedo poner el número completo, así que..."

En cambio, la complejidad operatoria de una resta con desagrupamientos sucesivos (por ejemplo 700 − 378) le demandó, incluso para la rectificación del procedimiento y del algoritmo ampliado, la evocación del dinero como referente. Esta demanda de evocación se presentó ante la reiteración del error de su algoritmo (al confrontar "cuánto le daba" usando el dinero para el cálculo) y la imposibilidad de corrección anticipada de su cálculo escrito. Por ello, cuando resuelve con material (dinero), se logra poner en evidencia la ineficacia de su registro ampliado, el cual omite lo restante en cada agrupamiento afectado por desagrupamientos. Así, por ejemplo, en la revisión de la resta (700 − 137), cuando observa que ante la ausencia de monedas de $1 (unidades) debe cambiar un billete de $100, se le cuestiona que no ha registrado este cambio:

E *[...]* ¿Y anotaste ahí que en vez de ocho te quedó un billete menos?
S. *[Observa en silencio.]*
E. Cada vez que haces un cambio lo tienes que anotar.
S. ¡Ay! Sí. Cierto.
E. ¿Cuántos billetes te quedan ahora?
S. Entonces eran siete... *[tacha y escribe 7 arriba de las centenas].*

(Delprato, 2002, p. 124)

Su anotación es:



A partir de estas evidencias, corrige su algoritmo ampliado y posteriormente logra rectificar su resultado. Por consiguiente, se puede advertir que el propósito de eficacia en el cálculo (evitar este error reiterado) fue posibilitando la instauración de la evocación del referente.

CONCLUSIONES

El caso de Carmen muestra particularmente la importancia de tematizar, en una secuencia de trabajo de los algoritmos convencionales con adultos analfabetos, la confrontación de estrategias ágrafas y escritas de resolución mediante la reflexión sobre su vínculo con la eficacia en la resolución en determinados niveles de dificultad operatoria, dotando a la vez de un dominio del cálculo escrito como estrategia alternativa propuesta.

De este modo, el algoritmo escrito e, incluso, el algoritmo ampliado logran instalarse como recursos frente a una búsqueda de eficacia en el cálculo, ante la evidencia de los límites de las estrategias ágrafas por su demanda de retención de información y de control continuo sobre esta retención. Para ello, es importante poner a los adultos en situación de aprendizaje de este mecanismo sustituto o alternativo de la memorización, pero fundamentalmente la intervención didáctica debe propiciar que vayan elaborando criterios de argumentación y control del cálculo escrito que permitan la optimización de una buena competencia operatoria inicial, como la de Carmen, y, simultáneamente, la generalización de dicha competencia a rangos numéricos mayores.

Esta construcción de los mecanismos simbólicos de cálculo y su instauración como modos simbólicos eficaces de calcular permiten que los sujetos se apropien del *sentido* de esta simbolización, en tanto el sentido de un conocimiento (según Brousseau) se define:

> [...] no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etcétera (citado por Panizza, 2003, p. 39).

Por otro lado, la presentación del caso de Olga ilustra cómo los limitados alcances de su cálculo mental generaron una disposición favorable hacia el aprendizaje de estrategias escritas de cálculo, involucrándola en la construcción de mecanismos de simbolización y de cálculo cuyo sentido se cimienta, así, en la búsqueda de mayores niveles de eficacia y eficiencia en la resolución. Es decir, este caso muestra la importancia de considerar los tipos de nociones previas y sus posibles incidencias como recursos que facilitan la extensión de lo sabido a nuevas situaciones con nuevas dificultades.

Para Olga, la intervención didáctica permitió que el algoritmo escrito (incluso el ampliado) se instalara como recurso alternativo eficiente y eficaz frente a su limitado cálculo mental por sus dificultades en la retención de información (debido a la ausencia de registro de los datos), agudizadas por la necesidad de control continuo sobre esta retención.

Finalmente, la intervención diseñada descrita y las particularidades esbozadas de las respuestas de Sofía a dicha intervención dan cuenta de la relevancia de obturar, en una secuencia de enseñaza, recursos de los sujetos sustentados en una sobrevaloración de mecanismos simbólicos de control del cálculo. En la experiencia, esto fue posible al instalar un referente concreto, al manipular la complejidad operatoria (es decir, proponer cálculos con sucesivas transformaciones) y al establecer como parte del contrato didáctico la obligación del alumno de explicar y argumentar sus procedimientos.

Estas variables demandaban de Sofía el dominio de la lógica subyacente de sus procedimientos de cálculo e, incluso, la rectificación de sus procedimientos previos erróneos y arbitrarios. Para ello, fue necesario que Sofía fuera venciendo sus resistencias respecto al uso de un referente de lo simbólico (el dinero) como recurso para explicitar, reconocer y controlar la lógica de los procedimientos algorítmicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995), "Ingeniería didáctica", en P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* México, Iberoamérica, pp. 33-59.

Ávila, A. (1990), "El saber matemático de los adultos analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo", *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos,* México, Centro de Estudios Educativos, vol. XX, núm. 3, pp. 55-95.

—— (1997), "Repensando el currículo de matemáticas para la educación de adultos", en UNESCO-Santiago (ed.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación,* Santiago de Chile, UNESCO-Santiago-OREALC, pp. 101-118.

Ávila, A. y G. Waldegg (1994), *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos,* México, INEA.

Carraher, T., D. Carraher y A. Schliemann (1997), *En la vida diez, en la escuela cero,* 4a. ed., México, Siglo XXI.

Brousseau, G. (1986), "Fondements et méthodes de la mathématiques", *Recherches en didactique de mathématiques,* Bourdeaux, La Pensée Sauvage, vol. 7, núm. 2, pp. 33-116.

Delprato, M. F. (2002), *Los adultos no alfabetizados y sus procesos de acceso a la simbolización matemática,* Tesis de Maestría en Ciencias, Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Delprato, M. F. e I. Fuenlabrada (2003a), "EL CAJERO. Un recurso didáctico que favorece el acceso de los adultos analfabetos a la simbolización de los números y las operaciones de suma y de resta", *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos,* México, CREFAL, primavera, pp. 37-40.

—— (2003b), "Carmen, alcances y limitaciones de su cálculo mental", Informe de investigación presentado en la Decimoséptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 17), organizada por el CLAME en Santiago de Chile, 21 a 25 de julio.

Ferreiro, E., I. Fuenlabrada, M. Nemirovsky, D. Block y M. Dávila (1987), "Conceptualizaciones matemáticas en adultos no alfabetizados", México (Documento publicado en versión rústica DIE-Cinvestav).

Ferreiro, E. (1998), *Alfabetización. Teoría y práctica,* México, Siglo Veintiuno Editores.

Fuenlabrada, I., D. Block, H. Balbuena y A. Carvajal (1991), *Juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula,* México, Libros del Rincón, SEP.

Fuenlabrada, I. y M. F. Delprato (2003a), "Olga, desde su cálculo mental dialoga con los números y las cuentas", Informe de investigación presentado en la Decimoséptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 17), organizada por el CLAME en Santiago de Chile, 21 a 25 de julio.

—— (2003b), "Sofia, posibilidades y límites de un cálculo escrito arbitrario", en *Memorias electrónicas del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa,* México, Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE).

Lerner, D. y P. Sadovsky (1994), "El sistema de numeración: un problema didáctico", en C. Parra e I. Sáiz (eds.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós, pp. 95-184.

Mariño, G. (1986), *Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular (Constataciones y propuestas),* Bogotá, Dimensión Educativa.

—— (1997), "Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos", en UNESCO-Santiago (ed.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación,* Santiago de Chile, UNESCO-Santiago-OREALC, (pp. 77-100).

Panizza, M. (2003), "Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática", en M. Panizza (comp.), *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* Buenos Aires, Paidós, pp. 31-57.

Soto, I. (1997), "Algunas proposiciones sobre la didáctica para la enseñanza de las matemáticas de jóvenes y adultos", en UNESCO-Santiago (ed.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación,* Santiago de Chile, UNESCO-Santiago-OREALC, pp. 119-130).

Valiente, S. (1995), "Análisis de cuatro algoritmos operatorios obtenidos en investigaciones de campo con adultas analfabetas", *Educación Matemática,* México, Iberoamérica, vol. 7, núm. 2, pp. 60-73.

Vergnaud, G. (1991), *El niño, las matemáticas y la realidad,* México, Trillas.

DATOS DE LAS AUTORAS

Irma Fuenlabrada
Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
irfuen@mail.cinvestav.mx

María Fernanda Delprato
Facultad de Filosofía y Humanidades de la UNC, Argentina
ferdelprato@hotmail.com

www.santillana.com.mx/educacionmatematica