Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Camargo, Leonor; Perry, Patricia; Samper, Carmen
La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico?
Educación Matemática, vol. 17, núm. 3, diciembre, 2005, pp. 53-76
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico?

Leonor Camargo, Patricia Perry y Carmen Samper

Resumen: En este artículo se parte de la premisa de que la enseñanza de la demostración en geometría, desde una concepción amplia, implica la construcción de un entorno de aprendizaje especial. Un componente fundamental de este entorno son las tareas que propician el desarrollo del conocimiento conceptual y procedimental, ligado particularmente a la demostración. En una experiencia de aula realizada en el nivel universitario, se evidencia que el enunciado de las situaciones da lugar a diferentes tareas que pueden afectar la actividad demostrativa en aspectos relacionados con la anticipación de la respuesta, el proceso hacia una justificación y la propia justificación.

Palabras clave: actividad demostrativa, tarea con instrucciones, anticipación de la respuesta, visualización, exploración, conjetura, explicación, prueba, demostración formal.

Abstract: An ample conception of proof as a parameter for teaching how to prove implies the construction of a special learning environment. Tasks that foster the development of conceptual and procedimental knowledge, related to proof, constitute a fundamental component of this environment. In a classroom experience carried out with university students, there is evidence that the way a problem is stated gives rise to different tasks that can affect students' performance when a proof is required, in aspects related to the anticipation of a solution, the process towards a justification and the justification itself.

Keywords: demonstrative activity, instructional task, anticipation, visualization, exploration, proof, formal proof.

Fecha de recepción: 6 de diciembre de 2004.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la actividad de los estudiantes en los cursos de matemáticas de casi todos los niveles educativos en torno a la demostración se ha reducido de manera considerable y, en algunos casos, ha desaparecido del currículo realizado. Aunque este hecho depende de acciones del profesor como individuo, la didáctica de las matemáticas como disciplina científica nos impulsa a buscar sus causas en el marco de las organizaciones actuales de las matemáticas escolares propuestas en el ámbito internacional, más que en decisiones aisladas y locales de los profesores, quizás motivadas por el desconcierto y la incertidumbre que les produce abordar la problemática relativa a las dificultades de los estudiantes para comprender qué es una demostración y cómo realizarla. Vemos entonces el hecho en cuestión como uno más de los fenómenos didácticos (Gascón, 1998), producto de decisiones pedagógicas fallidas –tomadas en el ámbito institucional– que, en su pretensión de resolver el problema del fracaso escolar en matemáticas, lo que han logrado es una disminución significativa de la actividad matemática genuina en el aula escolar.

Desde la perspectiva de las matemáticas, eliminar la actividad de los alumnos en torno a la demostración no es una decisión acertada, pues implica desconocer que la demostración es una característica esencial de las matemáticas. Tampoco lo es desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, pues implica desconocer que la formación matemática de un individuo incluye no sólo el desarrollo de competencias específicas, sino también la consolidación de una concepción de lo que son las matemáticas y de cómo se validan sus construcciones, concepción que se logra mediante la experiencia del quehacer matemático.

Dar el papel protagónico que le corresponde a la demostración en los cursos de matemáticas requiere una serie de acciones de diversa índole cuidadosamente planeadas, realizadas de manera articulada y sistemática, y monitoreadas y evaluadas con cierta frecuencia, a fin de determinar su grado de eficacia y realizar los ajustes necesarios para lograr el resultado que se busca. Tales acciones conciernen a diversos actores de la comunidad educativa de las matemáticas: investigadores, profesionales responsables de políticas educativas, diseñadores de currículo, profesores en ejercicio y formadores de profesores.

En calidad de formadoras de profesores de matemáticas, llevamos a cabo una experiencia de investigación,[1] a fin de describir la actividad de los estudiantes

[1] La experiencia se realizó en el marco del proyecto Geometría dinámica en la formación del profesor de matemáticas, DMA 016-03, el cual contó con el apoyo financiero del Depar-

asociada a la realización de una tarea, experiencia que podría aportarnos información para apoyar la hipótesis, según la cual, es posible dar a la demostración su papel protagónico en un curso de geometría si:

- La actividad demostrativa se concibe desde una perspectiva amplia que vincula procesos previos a la producción de justificaciones con la producción de éstas.
- Las tareas propuestas a los estudiantes requieren que los estudiantes se involucren en una actividad demostrativa.
- El ambiente que se propicia en la clase estimula la actividad demostrativa en concordancia con la concepción propuesta.

La experiencia se desarrolló en el espacio académico Geometría Plana de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, Colombia, durante el primer semestre lectivo de 2004. El curso tenía dos intenciones generales: impulsar el desarrollo de la competencia demostrativa de los estudiantes en el marco de la constitución de un sistema axiomático de la geometría euclidiana, y contribuir a formar en ellos una concepción amplia de demostración que les permita ver el papel que ésta puede desempeñar en la formación matemática de estudiantes de secundaria, ámbito de su futuro desempeño profesional. Una de las profesoras investigadoras era la profesora responsable de la asignatura.

En una sesión de trabajo de dos horas durante la tercera semana del semestre académico, los estudiantes del curso, distribuidos en cinco grupos, se involucraron en una actividad para resolver una tarea preparada por el grupo de investigación. En realidad, se asignó una tarea diferente a cada grupo, pero las cuatro tareas estaban asociadas al mismo hecho geométrico. En este artículo, relatamos esa experiencia, explicitando inicialmente nuestra manera de concebir la actividad demostrativa; luego aludimos a tres factores importantes en la constitución de un ambiente favorable a la actividad demostrativa; posteriormente, presentamos algunas consideraciones que se tuvieron en cuenta en el diseño de las tareas propuestas; precisamos algunos aspectos metodológicos; y destacamos rasgos de la producción de los distintos grupos que nos dan indicios de una actividad demostrativa de parte de los estudiantes, actividad que, en todo caso, se percibe de mayor o menor riqueza, dependiendo de la tarea que se estaba resolviendo.

tamento de Matemáticas y del Centro de Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. El grupo de investigación estuvo constituido por las autoras del artículo y Clara Emilse Rojas Morales.

ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA: NUESTRA PERSPECTIVA PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

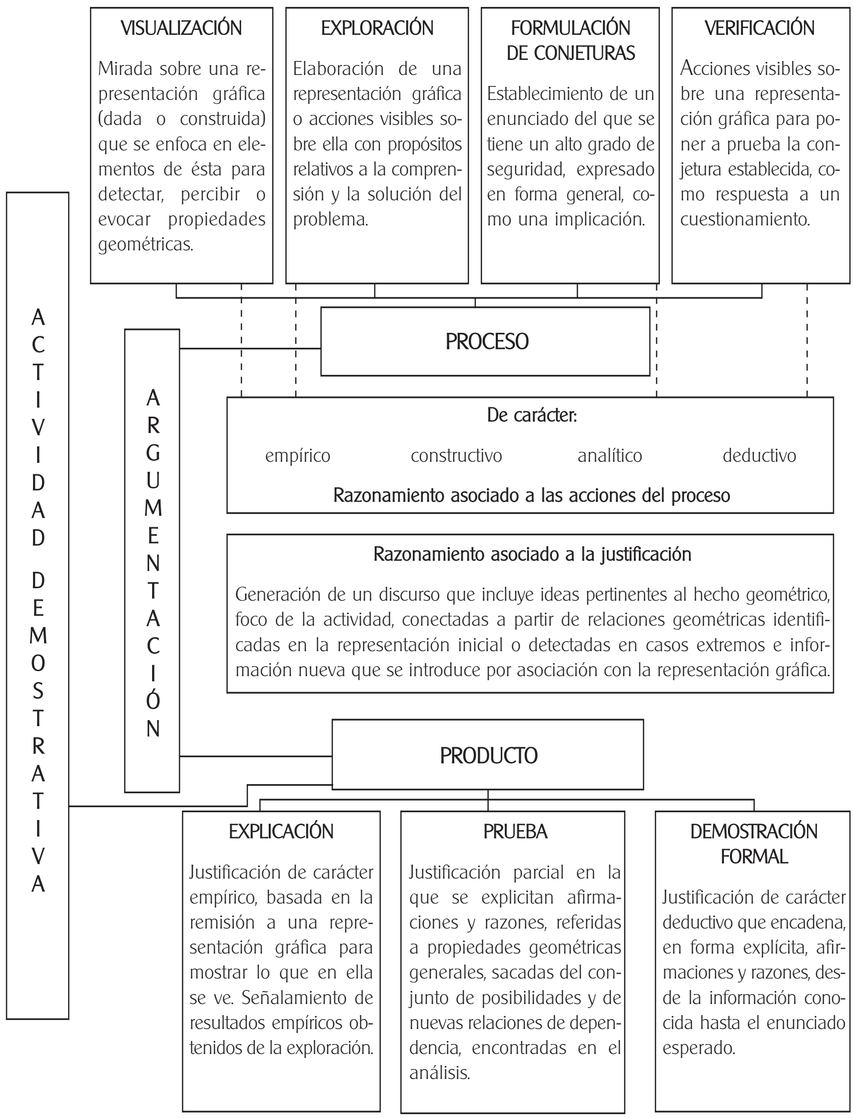
Una concepción restringida de demostración privilegia, como función primordial de ésta, la validación de enunciados matemáticos y hace énfasis en la producción de demostraciones formales, atendiendo a los cánones de la comunidad matemática. Esta visión es de poca utilidad para la didáctica por cuanto en la escuela la matemática en sí misma no es objeto de investigación, sino objeto de enseñanza. Está de por medio un estudiante que no forma parte de la comunidad de matemáticos y que, por su edad y su experiencia previa, valida el conocimiento de manera muy distinta a la empleada por los matemáticos, por lo cual esta última le resulta poco significativa.

Por el contrario, una perspectiva amplia reconoce que, a lo largo de la historia del desarrollo de las matemáticas, se encuentran pruebas de que la demostración ha cumplido otras funciones, como la de ser herramienta para la comprensión. Advertir esto sugiere la posibilidad y la conveniencia de redimensionar el papel que se le asigna a la demostración. Una concepción, con la que estamos de acuerdo, propone que la demostración tiene otras funciones. Al respecto, De Villiers (1993, pp. 15-30) identifica la demostración como medio de descubrimiento, comunicación, explicación y sistematización de resultados. Teniendo en cuenta propuestas de diversos autores (Bell, 1976; De Villiers, 1990, 1999; Hanna y Jahnke, 1996; citados en Hanna, 2001, pp. 5-23), afirmamos que dos propósitos de la demostración en matemáticas son: proporcionar comprensión y conocimiento, y ser un recurso para la validación. Es ahí donde debe buscarse el potencial didáctico de la actividad demostrativa en el contexto escolar.

Entendemos que en la actividad demostrativa se combinan dos aspectos estrechamente relacionados: el proceso y el producto. El proceso incluye acciones propias de la heurística, como visualizar, explorar, analizar, conjeturar y verificar, siempre y cuando movilicen el razonamiento hacia la búsqueda de validación, den significado a la tarea de argumentar para aceptar afirmaciones y provean los elementos para responsabilizarse de la verdad de dichas afirmaciones. El aspecto producto incluye acciones propias de la práctica de justificar, que movilizan el razonamiento argumentativo hacia la formulación de explicaciones, pruebas o demostraciones formales. El cuadro 1 presenta una descripción esquemática de lo que el grupo de investigación ha concebido como actividad demostrativa para la educación en matemática.

Ante un problema que despierte el interés, las acciones implicadas en el pro-

Cuadro 1 Descripción esquemática de la actividad demostrativa



ceso de la actividad demostrativa (véase parte superior del cuadro 1) activan el razonamiento, poniendo en juego conocimientos previos, ideas nuevas que surgen de la experiencia y argumentos de carácter diverso (*e.g.*, empírico, constructivo, conjetural, analítico o deductivo), que permiten recopilar elementos o ideas para construir un discurso, ante la necesidad de convencerse o convencer a otros de la validez de un enunciado que genere una explicación, una prueba o una demostración formal. De las acciones implicadas en el aspecto producto de la actividad demostrativa, la que se identifica como demostración formal (véase esquina inferior derecha del cuadro 1) es tan sólo una de las formas de justificación, quizás la más sofisticada y a la que no necesariamente todos los estudiantes deben llegar. Si se tiene una visión restringida de la demostración y sólo se la concibe de esta manera, se reduce mucho el universo de posibilidades de actividad matemática de nuestros alumnos.

Al ligar acciones de carácter heurístico con la necesidad de justificar y con la propia producción de una justificación, se busca establecer un equilibrio entre la lógica de la validación, que está vinculada a la manera como avanza la construcción del universo matemático, y la lógica del descubrimiento, que está en estrecha relación con la manera como aprenden lo seres humanos. De este modo, se pretende responder a un aspecto problemático de la didáctica: considerar y articular en la enseñanza dos formas distintas de producción de conocimiento. Una, centrada en la naturaleza de las matemáticas, que requiere y favorece actividades de aula, cuyo propósito principal es la construcción de aspectos estructurales de los conceptos y propiedades matemáticos y en las que el principal recurso de validación es la producción de una cadena deductiva de proposiciones. La otra, centrada en la naturaleza de la cognición del estudiante, que requiere y favorece actividades de clase, en las que se hace una inducción empírica de lo particular a lo general, como forma de buscar regularidades, y mediante las cuales se organiza la experiencia de los estudiantes, al establecer relaciones entre los conceptos y la realidad que éstos reflejan, atribuir significado a los conceptos y justificar afirmaciones.

UN ENTORNO FAVORABLE PARA LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Un primer factor en la búsqueda de un ambiente de aprendizaje para lograr el equilibrio descrito concierne a la constitución interactiva de unas normas que permitieron que la profesora y los alumnos del curso en el que se hizo la experimentación entraran en una dinámica colectiva asociada a la demostración. Algunas de tales normas tienen que ver con:

- Valorar y fomentar el cuestionamiento de las afirmaciones de la profesora, de los alumnos y del libro, como un mecanismo para enriquecer la comprensión del contenido estudiado.
- Usar, como mecanismo para el desarrollo del contenido del curso, la discusión matemática[2] (Bartolini, 1996, 1999, citados en Mariotti, 2001, pp. 25-53), apoyada en la preparación previa del tema en cuestión por parte de los alumnos.
- Establecer la demostración formal como la autoridad para aceptar e incluir un resultado dentro del sistema axiomático en vía de construcción.

Un segundo factor del entorno estuvo constituido por la presencia de la calculadora con el *software* Cabri de geometría dinámica, como recurso para comprobar o indagar hechos geométricos. Un tercer factor fue la implementación de situaciones especiales, diseñadas por el grupo de investigación, con las que se pretendía la revisión, consolidación y aplicación de los contenidos en juego y el uso de la geometría dinámica en el proceso de la actividad demostrativa.

LAS TAREAS PROPUESTAS: ALGUNAS CONSIDERACIONES

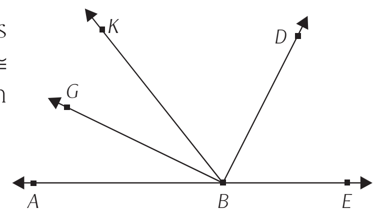
El contenido geométrico central, común a las tareas propuestas que conformaron la experiencia que estamos relatando, es la relación entre las bisectrices de ángulos que forman par lineal. Esta relación se estudia en el cuarto capítulo del texto[3] que se utilizó en el curso; en dicho capítulo, se enuncian los postulados relativos a ángulos, se formulan las definiciones y se trabajan los primeros resultados correspondientes. En el momento de la experimentación, los estudiantes conocían los elementos iniciales del sistema axiomático, estaban aprendiendo a manejar la calculadora con el programa de geometría dinámica y estaban asimilando lo que se esperaba que fuera su papel y el de la profesora en el ambiente de aprendizaje que se estaba constituyendo en el aula.

[2] Se refiere a la interacción verbal, guiada por la profesora, en el proceso de construcción social del conocimiento, con la cual se busca propiciar la evolución de un hecho matemático desde la percepción personal hacia la perspectiva teórica.

[3] E. Moise y F. Downs (1970), *Geometría moderna*, Massachussets, Addison-Wesley.

Cuadro 2 Formulación de la tarea 1 (tomada de Moise y Downs (1970, p. 94)

En el semiplano *H*, $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos, $\angle ABG \cong \angle KBG$ y $\angle KBD \cong \angle DBE$. Halle $m\angle GBD$. [Sugerencia: Sean $m\angle ABG = x$ y $m\angle DBE = y$.]



Una de las tareas propuestas en la experimentación, la tarea 1, se presenta en el cuadro 2; su formulación es la correspondiente al libro. Desde nuestra perspectiva, esta tarea pone en juego la aplicación de un proceso rutinario de cálculo algebraico, actividad matemática pobre con la cual no se estimula la actividad demostrativa; aun así, quisimos proponerla a un grupo para ver en qué consistía la actividad de los estudiantes para resolverla.

La formulación de las otras tres tareas estuvo guiada de manera general por las siguientes dos ideas. En primer lugar, decidimos que el enunciado de las demás tareas debía incluir instrucciones específicas que demandaran acciones de los alumnos encaminadas al aspecto producto de la demostración. Así, la instrucción para los estudiantes solicitaba, además de la pregunta central del problema, de manera explícita:

- Anticipar la respuesta, es decir, dar una idea intuitiva inicial de la solución para la situación presentada que no fuera resultado de una exploración o de un análisis, sino de los conocimientos y el razonamiento que evoca la lectura del problema.[4]
- Formular el teorema, es decir, expresar en forma de *si... entonces...* la conjetura obtenida al realizar las acciones del proceso de la actividad demostrativa, a fin de facilitar la producción de la justificación.
- Elaborar la justificación correspondiente, partiendo de los axiomas, definiciones y proposiciones del sistema en construcción.

[4] Pedir la anticipación es una estrategia didáctica que consideramos útil, ya que no sólo invita a una lectura comprensiva del enunciado del problema, sino que puede ser el motor que impulsa las acciones del proceso de la demostración. Mientras se invite de manera sistemática a los estudiantes a hacer uso de esta estrategia, ellos la irán convirtiendo en estrategia personal para el abordaje de situaciones, apropiándose así de un instrumento poderoso para el trabajo con las ideas que se ponen en marcha al leer el enunciado.

En segundo lugar, con referencia a la tarea 1, decidimos que las otras tres tareas, tanto en la descripción de la situación que delimita el asunto por tratar como en la pregunta que plantea la meta de la tarea, las acciones de los estudiantes debían conducir hacia el proceso de la actividad demostrativa y, por esta vía, lograr mayor riqueza en su quehacer matemático. En aras de explorar el efecto que pudieran tener en la actividad demostrativa de los estudiantes las diferencias en las formulaciones, surgieron tres reformulaciones del problema de la tarea 1, las cuales se presentan a continuación junto con las consideraciones que las determinaron.

En la tarea 1, al pedir que se halle la medida del ángulo formado por las bisectrices, se sugiere que ésta es siempre la misma, hecho que muy probablemente inhibe la necesidad de considerar varios casos para encontrar la respuesta. Esto, a su vez, limita mucho las acciones de visualización y exploración, centrales en la actividad demostrativa. Esta consideración nos hizo enfocar la atención en la búsqueda de una pregunta que impulsara tales acciones en el proceso de solución y nos condujo a eliminar la representación gráfica en la presentación de la situación. Esto último con dos propósitos: por un lado, obligar al estudiante a hacerla y tener así un mecanismo para verificar su interpretación de los objetos geométricos involucrados que mostrara su comprensión de ellos y, por otro lado, abrir las posibilidades de exploración. La reformulación que surgió de estas consideraciones se presenta en el cuadro 3; ella formó parte de la tarea 2, que se completó con las instrucciones antes mencionadas.

Con respecto a esta reformulación, se discutió si realmente induciría al uso del potencial dinámico de Cabri. Puesto que un objetivo del proyecto de investigación que enmarca el presente estudio es determinar si los alumnos ganan en herramientas para su actividad demostrativa al hacer uso del "arrastre"[5] de los objetos de la construcción, se decidió establecer otra reformulación del proble-

Cuadro 3 Problema reformulado para la tarea 2

Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices de los $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición del $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle GBD$ sea máxima?

[5] Herramienta que permite seleccionar los objetos de la construcción para moverlos por la pantalla con cierto grado de libertad, el cual se relaciona con la manera como fueron construidos y la dependencia que los objetos tengan unos con otros.

Cuadro 4 Problema reformulado para la tarea 3

Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices de los $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente. Determinen cómo varía la medida del $\angle GBD$ cuando varía la posición de $\overrightarrow{BK}$.

ma (véase el cuadro 4), en la que se puso el acento en el estudio de la variación de la medida del ángulo formado por las bisectrices, cuando la posición del $\overrightarrow{BK}$ varía; ésta se usó para constituir la tarea 3.

Al imaginar algunos de los experimentos que se podrían llevar a cabo para estudiar la variación de la medida del ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos cualesquiera (o por las rectas que las contienen), surgió una nueva reformulación del problema (véase el cuadro 5), encaminada a dejar en libertad a los alumnos para explorar cualquier par de ángulos cuyas bisectrices resultaran perpendiculares; ésta se utilizó en la tarea 4.

Cuadro 5 Problema reformulado para la tarea 4

En el tablero de una clase de geometría estaba escrito el enunciado incompleto de un teorema: *Si dos ángulos ________ entonces sus bisectrices son perpendiculares.*

Completen el enunciado.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Al quedar configuradas cuatro tareas diferentes, decidimos aplicarlas todas y contrastar las producciones de los estudiantes en relación con la actividad desplegada por cada grupo al realizar la tarea. En el momento de la experimentación, se distribuyeron los alumnos del curso en grupos de tres o cuatro personas, haciendo el esfuerzo de agrupar personas con desempeños académicos similares. Cada estudiante tenía a su disposición una calculadora graficadora con el programa Cabri, además de instrumentos de trazo como compás, regla y escuadra, de los que podían disponer a voluntad. En este artículo, se analiza el trabajo realizado por cinco grupos, de ahora en adelante referidos como GA, GB, GC, GD y GE, a los que se les asignó, respectivamente, las tareas 1, 2, 3, 4 y 4.

Para describir la actividad de los grupos, usamos como fuente de información las transcripciones de las grabaciones de audio realizadas durante el trabajo, las notas de campo de las observadoras –cuatro de los grupos contaron con la presencia de una persona del equipo de investigación en calidad de observadora, quien tenía el encargo de solicitar a los estudiantes, cuando lo creyera indispensable, que precisaran las ideas que estaban exponiendo; en el otro grupo se sustituyó la presencia de un observador por una grabación en video– y las producciones escritas de los grupos. Naturalmente, la descripción que hicimos de la actividad de los estudiantes se considera desde la perspectiva de lo que concebimos que es la actividad demostrativa y tiene en cuenta las acciones solicitadas por las instrucciones que se incluyeron en tres de las tareas.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DE LOS GRUPOS AL DESARROLLAR LA TAREA PROPUESTA

La descripción y el análisis se enfocan en cuatro asuntos: la anticipación de la respuesta, las acciones relacionadas con el aspecto proceso de la actividad demostrativa, las vías de construcción de la justificación y las producciones correspondientes al aspecto producto.

Anticipación de la respuesta

En el cuadro 6 se registra lo relativo a la anticipación de la respuesta en cada grupo. En dos de los grupos no hubo oportunidad para que al menos uno de los integrantes anticipara de manera espontánea una respuesta; este hecho está conectado con la tarea. En la tarea 1, al incluir una representación gráfica de la situación, que es muy improbable no tener en cuenta durante la lectura, se proporciona información visual que, además de ayudar a interpretar el problema,

Cuadro 6 Anticipación de la respuesta

GA	No se les pidió anticipar, ni lo hicieron.
GB	"La medida de éste $[\angle GBD]$ será máxima, si el $\overrightarrow{BK}$ está mucho más cerca a $\overrightarrow{BE}$".
GC	No hubo anticipación.
GD	"Los ángulos forman par lineal".
GE	Hicieron varias anticipaciones, producto de la adivinación.

sugiere relaciones geométricas. En particular, insinúa la respuesta al problema, ya que la medida que se pide es una muy especial,[6] susceptible de ser determinada a partir de una buena representación gráfica; es decir, la pregunta planteada, acompañada por una representación gráfica de la situación, resta sentido a la estrategia de anticipar una respuesta. En la tarea 3, a pesar de pedir explícitamente una anticipación, hay dos elementos que parecen influir en el proceder de los estudiantes. La palabra "variación", concepto no familiar para ellos, les impone la necesidad de explorar para entender el problema; además, la pregunta de cómo varía la medida de un ángulo al variar la posición de un rayo, los obliga a estudiar casos. Es decir, la necesidad y pertinencia de hacer una especie de experimento en el que se examine el comportamiento de una de las variables que entran en juego, cuando se hacen cambios sobre la otra variable, lejos de invitar a anticipar de manera espontánea una respuesta, invita más bien a un estudio detenido de la situación.

En los otros grupos, al menos uno de los integrantes anticipó una respuesta que efectivamente fue motor de las acciones posteriores, no sólo de quien la enunció, sino de sus compañeros. Tanto en la tarea 2 como en la tarea 4, el respectivo enunciado sugiere como aceptable anticipar una respuesta muy puntual, que bien puede corresponder a una intuición o a una adivinación. Específicamente, la tarea 2 propició que saliera a flote una idea intuitiva, a saber, que entre más se acerque el rayo a una determinada posición, mayor será la medida del ángulo. Lo que se pide en la tarea 4, completar un enunciado de tal manera que sea verdadero lo que éste afirma, al parecer constituyó un reto que impulsó a GE a adivinar más que a explicitar su intuición al respecto; esto se ve claramente en el siguiente fragmento del protocolo del grupo.

2	Jairo:	Tenemos que completar: Si dos ángulos son no se qué, sus bisectrices son perpendiculares. Tienen que ser suplementarios. [Dibujan ángulos que forman par lineal para ilustrar.]
3-6		[...]
7	Jairo:	Leamos a ver si dice: si dos ángulos de un triángulo...

[6] Para aclarar este punto, piénsese en cómo podría variar la demanda cognitiva que impone la tarea si ella se refiere a dos ángulos adyacentes que no forman par lineal; se da una representación gráfica y la pregunta sigue siendo determinar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los dos ángulos. En particular, piénsese en la posibilidad de obtener la respuesta con sólo mirar la gráfica.

8	Gabriel:	No. No dice eso; pero nosotros podríamos completarlo así. Por ejemplo: si dos ángulos de un triángulo son agudos entonces...
9		[...]
10	Gabriel:	Si tenemos un par lineal y los ángulos son congruentes, las bisectrices son perpendiculares.

Acciones relacionadas con el aspecto proceso de la actividad demostrativa

En el cuadro 7 se presenta una breve descripción de las acciones relacionadas con el proceso demostrativo de cada uno de los grupos.

Visualización

En los cinco grupos, la actividad de los estudiantes para desarrollar la tarea estuvo apoyada por la visualización y, aunque podría parecer que esta acción no estuvo vinculada de manera especial a la tarea propuesta, algunos elementos que ayudan a caracterizarla como parte del proceso demostrativo indican lo contrario. Al incluir una representación gráfica correspondiente a una descripción no sintética[7] de la situación, la tarea 1 indujo a GA a utilizar dicha representación. En efecto, a medida que iban leyendo el enunciado, con el propósito de comprender la situación que éste plantea, los estudiantes utilizaron la figura para visualizar, es decir, en términos de uno de los integrantes de GA, para "sacar conclusiones de lo que se puede observar en la figura". Por ejemplo, reconocieron la descripción hecha verbalmente (*e.g.*, la figura está constituida por rayos y ángulos; hay dos pares de ángulos adyacentes congruentes), sacaron información (*e.g.*, la suma de las medidas de los cuatro ángulos es 180°), determinaron relaciones geométricas (*e.g.*, el $\angle GBK$ es la mitad del $\angle KBD$), y percibieron el hecho que guió posteriormente el trabajo (*i.e.*, el $\angle GBD$ es recto). Cabe advertir que el enunciado, además de inducir a la visualización, la restringió al gráfico propuesto. Así, a

[7] Con tal calificativo pretendemos señalar la diferencia entre un enunciado expresado en términos de objetos y uno expresado en términos de las propiedades de dichos objetos. Una descripción sintética de la situación podría ser algo como: "Sean dos ángulos que forman par lineal. Hallen la medida del ángulo cuyos lados son las bisectrices de los ángulos dados". En la descripción dada por la tarea, es necesario desentrañar información y combinarla para poder llegar a la esencia de la situación, es decir, para advertir el hecho geométrico.

Cuadro 7 Descripción resumida de las acciones relacionadas con el aspecto proceso de la actividad demostrativa de los grupos A, B, C, D y E

	Visualización	Exploración	Conjetura	Verificación
GA	Limitada al gráfico propuesto.	De carácter algebraico.	"El ∠GBD es recto."	Algebraicamente, resolviendo ecuaciones.
GB	Estudio de dos tipos de bocetos: ángulos que forman par lineal y triángulo inscrito en una semicircunferencia.	De carácter geométrico a partir del estudio de casos en situaciones extremas: $\overrightarrow{BK}$ perpendicular a los rayos opuestos, el ∠BAK muy agudo o muy obtuso.	"No importa como coloquemos a $\overrightarrow{BK}$, la medida del ángulo formado por las bisectrices será 90°."	Construcción con regla y compás de la situación, asignación de medidas para la comprobación numérica y uso de la escuadra para verificar perpendicularidad.
GC	Uso de representaciones con regla y compás de ángulos que forman par lineal, con $\overrightarrow{BK}$ en posiciones cercanas a la perpendicular y en la calculadora, colocando los rayos opuestos en diferentes posiciones.	De carácter variacional. Con papel y lápiz, determinando dependencia entre la variación de las posiciones de las bisectrices y la de $\overrightarrow{BK}$. Con la calculadora, referida a la relación entre la posición de $\overrightarrow{BK}$ y la medida del ∠GBD.	"Independientemente de si se mueve $\overrightarrow{BK}$, la medida del ∠DBG no varía."	Con la calculadora, considerada como herramienta fiable, a través del arrastre de $\overrightarrow{BK}$.
GD	Uso de dos dibujos para comprobar la anticipación. En uno de los gráficos están las medidas de los ángulos.	De carácter geométrico sobre ángulos suplementarios no par lineal y par lineal, uno de los cuales es el caso de $\overrightarrow{BK}$ perpendicular.	"Si dos ángulos son par lineal, entonces sus bisectrices son perpendiculares."	No hubo.
GE	Construcción con regla y compás de un triángulo equilátero y sus bisectrices y de ángulos que forman par lineal, con rectas como bisectrices. Bocetos de ángulos suplementarios, no par lineal o par lineal.	De carácter geométrico. Con regla y compás, explorando triángulos especiales y ángulos suplementarios par lineal o no, además del caso especial en el que $\overrightarrow{BK}$ es perpendicular a los otros dos rayos. Con calculadora, para ver si las bisectrices son perpendiculares.	"Si dos ángulos son suplementarios, sus bisectrices son perpendiculares".	No hubo.

diferencia de los otros grupos, al no generar otras representaciones que ampliaran la imagen conceptual del grupo, GA se enfrentó a la problemática de definir cuál información leída del gráfico era válida y cuál no, como se puede ver en el siguiente fragmento del protocolo.

93	Yolanda:	El $\angle KBG$ es la mitad del $\angle KBE$.
94	Mariela:	De verdad, no me parece. Éste me parece más pequeño.
95	Observadora:	Pero, ¿por qué no te parece? ¿Por lo que estás viendo ahí?
96	Mariela:	Sí, por lo que estoy viendo ahí.
	Observadora:	¿Y tú crees que ese dibujo necesariamente te va a mostrar la realidad de la situación?
98	Yolanda:	Ah, ¡no! Así como decimos que ahí se ve un ángulo recto. No sabemos.

GB aprovechó la visualización más como recurso para buscar la justificación que para llegar a la conjetura, pues la estableció muy rápidamente y sentía seguridad respecto de ella. Como la tarea les exigió hacer la justificación, el trabajo se centró en la búsqueda de relaciones geométricas de los ángulos que se generan en las diferentes representaciones al modificar la posición de $\overrightarrow{BK}$, e incluso en la búsqueda de triángulos de los que pudieran extraer información para la justificación como, por ejemplo, un triángulo inscrito en una semicircunferencia. Esto último porque recordaban que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto y, como lo expresan dos estudiantes:

79	Fabio:	Tendríamos que hacer una demostración y yo estoy tratando de hacer una por medio de ángulos en triángulos.
80	Talía:	Yo apoyo a Fabio con lo del triángulo, porque eso es una buena forma de demostrarlo.

En el caso de GC es evidente que la tarea 3 determinó tanto la necesidad de visualizar como el resultado de tal acción. Puesto que el enunciado de la tarea invita a estudiar la variación de la medida del ángulo formado por las bisectrices, GC utilizó, como recurso de exploración, diversas representaciones obtenidas al modificar la posición de $\overrightarrow{BK}$ respecto de la perpendicular; además, por iniciativa propia, utilizaron el programa de geometría dinámica de la calculadora para hacer el estudio mencionado, con lo que lograron ver la generalidad del hecho geométrico en cuestión.[8] Esto los llevó a desviarse de su preocupación inicial, la cual era, en palabras de un estudiante:

27	Andrés:	Yo podría decir que si hago un movimiento positivo de $\overrightarrow{BK}$, el rayo de la bisectriz va a seguir ese movimiento, pero éste *[señalando la otra bisectriz]* también lo va a seguir [...] Lo que no me queda claro es que podamos mantener esa proporción...

Por su parte, GD, en primera instancia, hizo bocetos de la situación para validar la anticipación. Luego, a diferencia de los demás grupos, la visualización se convirtió en recurso para sugerir, y luego refutar, la condición adicional que uno de los integrantes del grupo quería añadir a la anticipación, como se muestra en el protocolo.

11	Juana:	Pero, pues sí son par lineal y además de la misma medida, ¿no?, de 90°.
12	James:	Pues no necesariamente.
13	Reinaldo:	No, con que sean par lineal.
14	James:	Si tienes... Mira este ejemplo. [Hace un boceto de dos ángulos que forman par lineal, pero no son rectos.]

En GE se aprecia una mayor amplitud en las representaciones visuales debido a la variedad de anticipaciones que formularon, al tener en cuenta ángulos suplementarios que no son un par lineal (condición que también surgió en el trabajo de GD, pero que fue desechada muy rápidamente) y hacer consideraciones relacionadas con las bisectrices de ángulos en diferentes tipos de triángulos. Tal como estaba previsto, la tarea 4 diferenció las acciones asociadas a la visualización de estos dos grupos de las del resto, ya que ambos buscaron relaciones entre bisectrices de ángulos suplementarios que no forman par lineal.

[8] Los programas de geometría dinámica se constituyen en herramientas poderosas de indagación que favorecen el estudio de elementos genéricos, al permitir captar las invariantes en un fenómeno de variación. Por desgracia, en el curso de esta situación problema, los estudiantes aún no contaban con suficientes conocimientos del programa de geometría dinámica que se les proporcionó y no lo aprovecharon en todo su potencial.

Exploración

Con respecto a la exploración, la diferencia más notoria en la actividad de los grupos se dio entre GA y los demás grupos. Al sugerir que se denominen *x* y *y* las medidas de dos de los ángulos, la tarea 1 indujo a abordar el problema con un enfoque algebraico. Entonces, es natural que los estudiantes no hubieran realizado acciones propias de la exploración geométrica, como medir y construir, sino acciones de índole algebraica, como establecer ecuaciones y buscar métodos de resolución de éstas que, pese a no ajustarse a la definición dada de exploración en este artículo, sí constituyen una exploración, porque llevaron al establecimiento de una conjetura.

Las exploraciones hechas por los demás grupos sí son de tipo geométrico. GB se encaminó a determinar la posición del $\overrightarrow{BK}$ para la cual la medida del ángulo fuera máxima, colocando el rayo en distintas posiciones. El trabajo de exploración los llevó a invalidar la anticipación e incluso a descalificar el enunciado, como lo muestra el siguiente fragmento del protocolo:

16	Talía:	La medida del ángulo que forman los rayos $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BG}$, que son las bisectrices, es de 90 grados.
17	Berta:	Entonces, la pregunta ¿cuál debe ser la posición de $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle$GBD sea máxima?... con respecto a eso, existe una sola. Como este ángulo no va a cambiar, no podemos hablar de máximo y mínimo, porque la medida va a ser la misma.

Las acciones de GC se enfocaron, inmediatamente después de terminar la lectura del enunciado de la tarea 3, en determinar el efecto que tiene variar la posición de $\overrightarrow{BK}$ sobre la posición de las bisectrices. Para ello, recurrieron a hacer una representación gráfica de un caso particular: $\overrightarrow{BK}$ muy cercano al rayo perpendicular a $\overrightarrow{AE}$ por B. Ante la sospecha de la invarianza de la medida del ángulo, usaron la calculadora para hacer un barrido de las posiciones de $\overrightarrow{BK}$.

En GD, el hecho de que la anticipación fuera inmediatamente aceptada por los miembros del grupo hizo que la exploración no tuviera como finalidad establecer una conjetura, sino determinar si ésta podía ampliarse. Para ello, analizaron dibujos de ángulos suplementarios no adyacentes, inicialmente con lados paralelos y luego sin esa condición, como se puede ver en el siguiente protocolo.

252 Carolina:	¿Será que sí se pueden prolongar *[las bisectrices]* así? ¿Sí da un ángulo *[recto]* también?
253 James:	Sí, recto.
254 Carolina:	¿En cualquier posición?
255 Reinaldo:	Sí, al prolongarlos, sí.
256 Carolina:	¿Será? Si hago aquí el ángulo y por acá hago el otro todo torcido, ¿sí da?

GE realizó exploraciones con base en las diferentes representaciones visuales logradas, producto de sus anticipaciones. La exploración se redujo a invalidar todas las anticipaciones excepto la que establecieron como conjetura.

Conjeturación

Las conjeturas formuladas por los grupos se recogen en el cuadro 7. En ellas se usan los mismos términos del respectivo enunciado, pues responden de manera directa al problema propuesto. Este hecho tiene relevancia especial en el caso de las tareas 2 y 3, trabajadas por GB y GC, respectivamente, ya que se emplean términos que no son usuales en geometría. Así, por ejemplo, la formulación de la conjetura de GB hace referencia a la colocación de $\overrightarrow{BK}$, ya que se preguntaba por la posición de éste; la formulación correspondiente de GC menciona el movimiento de $\overrightarrow{BK}$, puesto que la tarea demandaba considerarlo en relación con la variación de la medida de un ángulo.

Al pedir en la tarea que se enunciara el teorema que se pretendía justificar, los estudiantes se vieron obligados a la reformulación de sus conjeturas. En el cuadro 8 se presentan los teoremas que escribieron.

GB y GC vivieron una experiencia especial porque tuvieron que transformar su conjetura, que establecía un teorema de la geometría dinámica, en un teorema expresado en términos propios de la geometría euclidiana. En el protocolo que se presenta a continuación, se puede entrever el proceso que siguió GC hasta llegar al teorema que escribieron.

Cuadro 8 Teorema formulado por cada grupo*

GA	No se les solicitó ni intentaron hacerlo.
GB	"Las bisectrices de dos ángulos suplementarios forman un par de ángulos congruentes y los ángulos formados por el $\overrightarrow{BK}$ y las bisectrices de los dos ángulos forman un ángulo recto."
GC	"Dados dos ángulos que forman un par lineal, si variamos el lado común a ellos, la medida del ángulo formado con las bisectrices de dichos ángulos es recto."
GD[a]	Coincide con la conjetura.
GE	Coincide con la conjetura.

* GD y GE no tuvieron necesidad de reformular la conjetura, puesto que con la tarea 4 quedaba establecido el teorema cuando completaran la proposición.

94	Observadora:	Traten de enunciar el teorema.
95-96		...
97	Andrés:	La medida del ángulo es constante.
98	Observadora:	Ésa es la solución. Traten de enunciar eso como un teorema.
99-100		...
101	Andrés:	Dados dos ángulos que forman un par lineal, si variamos el lado común a ellos, la medida del ángulo formado con las bisectrices de dichos ángulos no varía.
102-117		*[Los estudiantes intentan desarrollar la justificación para la afirmación enunciada por Andrés, pero tienen mucha dificultad.]*
118	Observadora:	Si quieren, dejen el espacio para las justificaciones y traten de generar el enunciado del teorema.
119-121		...
122	Andrés:	Dados dos ángulos, par lineal, y construimos las respectivas bisectrices...
123-124		...
125	Observadora:	Sí, porque en el enunciado de un teorema se dice: si tal cosa... entonces tal otra.
126	Andrés:	Entonces, coloquemos: si rotamos el lado común...
127		...
128	Observadora:	Sí, sin introducir lo de rotar. ¿Qué fue lo que ustedes encontraron?

129 Andrés: Que sin importar el movimiento, la medida del ángulo es la misma. Entonces decimos: la medida del ángulo es de 90°. A ver si les gusta: dados dos ángulos que forman par lineal, *DBK* y *KBA*, y construimos las respectivas bisectrices, *BD* y *BG*, la medida del ángulo *DBG* es de 90°.

Verificación

GD y GE no hicieron verificaciones de la conjetura, pues ninguno de los integrantes del grupo la puso en duda. En los otros grupos, ante inquietudes suscitadas por alguno de sus integrantes, se realizaron verificaciones de diversa naturaleza, mencionadas en el cuadro 7.

Aspectos asociados al producto de la actividad demostrativa

La vía de construcción de la justificación seguida por cada grupo se concreta, al menos parcialmente, a través del proceso de la demostración. Por tanto, su relación con la tarea existe, ya que, como hemos visto, ésta afecta la actividad de los estudiantes en las distintas acciones que realizaron antes de centrarse en la elaboración de una justificación. Sin embargo, la vía depende principalmente de los sujetos que la están buscando y consolidando, es decir, depende de las herramientas[9] conceptuales y procedimentales de que disponen los estudiantes, relativas, por un lado, al contenido matemático implicado y, por el otro, al trabajo dentro de un sistema axiomático. Por esta razón, la misma tarea con grupos diferentes puede seguir vías distintas. En el cuadro 9 se presentan los elementos utilizados o los caminos seguidos por los grupos para producir una justificación del teorema.

Clasificamos las justificaciones elaboradas por los grupos de acuerdo con la caracterización presentada en el cuadro 1. En el cuadro 10 exponemos una descripción global de ellas.

La producción de una justificación por parte de los grupos de trabajo y, en

[9] Herramientas que, a su vez, están determinadas por las experiencias escolares de los estudiantes, derivadas de los condicionantes del contrato didáctico establecido con ellos. Particularmente, el asignar al docente la responsabilidad absoluta de la validación, es una de las fuertes restricciones asociadas con las posibilidades de que los estudiantes se involucren con la práctica de la justificación.

Cuadro 9 Vías de construcción hacia la justificación

GA	• No se les solicitó pero intentaron hacerla, aun sin haber explicitado el teorema. • Hacen una justificación algebraica de la medida del ángulo. • Tratan de encontrar teoremas alusivos en el texto. • Usan las ideas encontradas en la exploración sobre las relaciones entre los ángulos presentes en la representación.
GB	• Buscan relaciones entre los ángulos tratando de ubicarlos en triángulos específicos. • Intentan ubicar los ángulos en un triángulo inscrito en una circunferencia. • Encuentran relaciones entre pares de ángulos en la representación gráfica y relacionan la medida de cada par de ellos con la suma de las medidas de todos.
GC	• Hacen consideraciones en casos específicos. • Tratan de encontrar teoremas alusivos en el texto. • Buscan relaciones entre las sumas de pares de ángulos en la representación gráfica.
GD	• Desarrollan un ejemplo numérico, asignando medidas a los ángulos en la representación. • Relacionan propiedades geométricas con los pasos de la verificación numérica. • Hacen afirmaciones generales asociando a cada afirmación una propiedad geométrica.
GE	• No es posible evidenciar en la transcripción una vía clara de justificación.

Cuadro 10 Aspecto producto de la demostración

	Explicación	Prueba	Demostración formal
GA		Secuencia de afirmaciones y razones asociadas con las relaciones numéricas en juego.	
GB		Secuencia de afirmaciones con razones que no hacen referencia a definiciones ni postulados.	
GC		Secuencia de afirmaciones y razones que aluden a definiciones y postulados pero de una manera poco sistemática. Hay muchos pasos sin justificación.	
GD		Presentación de un caso particular en el que encadenan el proceso algebraico con razones de carácter geométrico.	Presentación de afirmaciones y razones atendiendo a detalles rigurosos del encadenamiento de proposiciones.
GE	No hay suficiente información para describir el producto obtenido.		

particular, que ésta sea una prueba o una demostración formal, son hechos que están mucho más en relación con el entorno de aprendizaje que se estaba configurando en el curso que con la tarea propuesta. Esto puede corroborarse, por ejemplo, si se advierte que la tarea 1 no pedía explícitamente justificar la respuesta y, sin embargo, GA, *motu proprio*, adelantó acciones para producir una justificación. Cuando en la clase no hay normas de trabajo que exijan de manera sistemática justificar lo que se afirma y requieran cierta rigurosidad en la producción de las justificaciones dadas, los estudiantes pueden quedar conformes con llegar a la solución del problema y, en el mejor de los casos, producir una explicación; muy probablemente no se ven impelidos a dar una prueba.

CONSIDERACIONES FINALES

Es bien sabido que las tareas con instrucciones que el profesor propone a los estudiantes constituyen uno de los componentes fundamentales del aprendizaje, pues ellas definen de manera general el rango de las acciones que han de realizar los estudiantes y, además, transmiten mensajes de lo que son las matemáticas y lo que significa hacer matemáticas (NCTM, 1991). La actividad en la que terminan involucrándose los estudiantes para desarrollar una tarea se puede diferenciar cualitativamente según las acciones que ésta requiera. Así, las tareas que demandan acciones relacionadas con los aspectos proceso y producto de la demostración abarcan dos caras inseparables de la actividad matemática: la heurística, basada en el razonamiento plausible, por un lado, y por el otro, la basada en la práctica de la justificación que, articuladas, recubren gran parte de lo que se considera como actividad matemática escolar.

Aun cuando la experiencia relatada se llevó a cabo en un curso de geometría con estudiantes que se preparan para ser futuros profesores de matemáticas, consideramos que los resultados de esta experiencia son alentadores para la educación básica y media, en la medida en que se constituyen en pruebas que apoyan la hipótesis de que es posible lograr que la actividad demostrativa desempeñe un papel protagónico en la clase de geometría y, por tanto, en la formación matemática de los estudiantes de cualquier nivel. Obviamente, no estamos insinuando que la demostración formal tenga que ser la meta de la actividad matemática en la escuela, pero sí queremos hacer énfasis en la necesidad de hacer esfuerzos para diseñar tareas que propicien la actividad demostrativa que culmine en algún tipo de justificación, según el nivel y las posibilidades de los alumnos.

La descripción y el análisis sobre las producciones de los cinco grupos de estudiantes nos permiten afirmar que, efectivamente, hubo diferencias ocasionadas por las distintas tareas. La influencia de la descripción del enunciado de la situación que delimita el objeto de la tarea y la formulación de la pregunta o la demanda solicitada influyeron en la posibilidad de que los estudiantes se involucraran o no en una actividad matemática genuina. Así, aun cuando el hecho geométrico que se puso en juego fue el mismo para todas las tareas, cada una de ellas requirió acciones diferentes de parte de los estudiantes en su proceso por comprender, resolver el problema y validar su solución, las cuales favorecieron en mayor o menor grado las distintas acciones de la actividad demostrativa. Se puso de manifiesto hasta qué punto la inclusión de instrucciones, como anticipar, formular una conjetura en forma de enunciado de teorema e intentar producir una justificación, constituyen un poderoso motor para articular los diferentes aspectos de la actividad matemática asociada a la resolución de un problema y, por tanto, se convierten en una estrategia apropiada para superar la trivialización de la actividad matemática escolar actual, que suele separar las diferentes dimensiones de la actividad matemática en acciones independientes.

El papel protagónico de la actividad demostrativa en la experiencia relatada se concretó, naturalmente, en ser el medio utilizado para obtener y validar, o por lo menos para intentar validar, un resultado. Frente a esto, somos conscientes de que, además del valor intrínseco de la tarea propuesta, fue la norma establecida en el curso –de justificar cuanta afirmación se haga– la que los movió a embarcarse en la producción de una justificación, aun si no sentían la necesidad de hacerlo. Realmente no basta con descubrir un resultado que sorprenda para que los estudiantes sientan la necesidad lógica de producir una demostración; lograr que los estudiantes actúen matemáticamente requiere también construir un entorno de aprendizaje en el cual el alumno se responsabilice por la verdad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Villiers, M. (1993), "El papel de la demostración en matemáticas", *Epsilon*, vol. 26, pp. 15-30.

Gascón, J. (1998), "Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18/1, núm. 52, pp. 7-33.

Hanna, G. (2001), "Proof, Explanation and Exploration: An Overview", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 44, pp. 5-23.

Mariotti, M.A. (2001), "Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 44, pp. 25-53.

National Council of Teachers of Mathematics (1991), *Professional Standards for Teaching Mathematics,* Reston, VA, NCTM.

DATOS DE LAS AUTORAS

Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Colombia
lcamargo@uni.pedagogica.edu.co

Patricia Perry
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Colombia
pperryc@yahoo.com.mx

Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, Colombia
csamper@uni.pedagogica.edu.co

www.santillana.com.mx/educacionmatematica

