Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Guillén, Gregoria; Puig, Luis

Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el contexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad entre poliedros. Estudio exploratorio

Educación Matemática, vol. 18, núm. 3, diciembre, 2006, pp. 65-102
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el contexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad entre poliedros.
Estudio exploratorio

Gregoria Guillén y Luis Puig

Resumen: En este trabajo mostramos una experiencia de transferencia de resultados de investigación a las aulas. La investigación versa sobre la enseñanza y el aprendizaje de los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir y demostrar, utilizando como contexto el estudio de las relaciones de inscripción y dualidad entre poliedros regulares. La transferencia se realiza a un curso de la Escuela de Magisterio, donde se forman futuros maestros de niños de 6 a 12 años.

Describimos, en primer lugar, el Modelo de Enseñanza elaborado a partir de investigaciones previas desarrolladas por nosotros. En segundo lugar, describimos el estudio exploratorio en el que pusimos a prueba ese Modelo de Enseñanza y la manera de organizar los datos obtenidos en él, a fin de reelaborar el Modelo de Enseñanza. Por último, esbozamos el planteamiento de la investigación en la que se pondrá a prueba el Modelo de Enseñanza reelaborado.

Palabras clave: procesos matemáticos, relaciones de inscripción y dualidad, poliedros regulares, formación del profesorado, transferencia de resultados de investigación.

Abstract: In this paper we show an experience of transference of results of research to the classrooms. This research deals with the teaching and learning of the mathematical processes of describing, classifying, defining and demonstrating, using as context the study of the relations of inscription and duality between regular polyhedrons. The transference is realized to a course of the Teacher Training School of the University of Valencia, where prospective teachers of 6-12-year-old children are taught.

We describe, first, the Teaching Model elaborated from previous investigations developed by us. Secondly, we describe the exploratory study in which we tested this Teaching Model, and the way of organizing the information obtained in it in order to re-elaborate the Teaching Model. Finally, we outline an investigation in which the new Teaching Model will be tested.

Fecha de recepción: 20 de mayo de 2005.

Keywords: mathematical processes, relations of inscription and duality, regular polyhedrons, teacher training, transference of results of research.

PRESENTACIÓN

Gran parte de la investigación realizada en educación matemática tiene un referente concreto donde aplicarse, ya que su objetivo es la transformación de las prácticas de clase. Filloy y sus colaboradores (1999), refiriéndose a la praxis de la teoría matemática educativa, hacen notar que "para poder utilizar lo que la investigación mundial ha logrado en los últimos años, tan rico y variado, es necesario crear un nuevo campo en el diseño y desarrollo curriculares, propio de esta nueva rama del saber, que aspira, en lo teórico, a utilizar todos aquellos saberes que puedan ponerse en juego; pero que, en contraparte, tiene su justificación en la posible transformación de los sistemas educativos actuales". Filloy destaca la necesidad de desarrollar nuevos materiales curriculares para el trabajo con profesores, a fin de poder utilizar lo que la investigación mundial ha logrado en los últimos años; introducir las nuevas problemáticas presentes en los nuevos acercamientos de quienes realizan investigación en el mundo, así como las nuevas metodologías para entender tales problemas, las nuevas técnicas experimentales, el procesamiento de los datos, etc. (Filloy y cols., 1999, pp.18-20).

Hay poca investigación en didáctica de la geometría en la que se haya utilizado las relaciones de inscripción y dualidad de los poliedros regulares como contexto para que los alumnos desarrollen actividad matemática. Ahora bien, se ha mostrado ya la riqueza matemática que conlleva su estudio (Darche y Pitou, 1984; Guillén, 1991, 1997; Mold, 1973); se ha planteado el problema como taller (Alsina y otros, 1997; Naylor, 1999; Scott, 1991); se ha centrado la atención en la determinación de las relaciones numéricas que hay entre las aristas de los poliedros implicados (Hopley, 1994); y se ha planteado el problema desde un análisis de pruebas que justifican que sólo existen cinco poliedros regulares convexos (Glidden y Fry, 1993).

En este trabajo se da cuenta de la transferencia que hemos hecho de resultados de la investigación a clases de la Escuela de Magisterio de la Universitat de València, de las observaciones subsiguientes en el salón de clase y de cómo éstas se abocan al diseño de una investigación posterior. En primer lugar exponemos cómo hemos elaborado un Modelo de Enseñanza para los estudiantes de Magisterio, en el que lo que se pretende enseñar son los procesos matemáticos[1] de describir, clasificar, definir y demostrar, y se utiliza como contexto el estudio de las relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares. En trabajos anteriores ya hemos explorado la enseñanza y el aprendizaje de estos procesos matemáticos utilizando como contexto las familias de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides (Guillén, 1997, 2001) y hemos elaborado modelos de enseñanza de la geometría (Puig y Guillén, 1983; Guillén, 1991, 1997; Guillén y Puig, 2001). En estos modelos de enseñanza hemos combinado diferentes enfoques para el estudio de esos procesos en el mundo de los poliedros: *1)* en un contexto de construcción, *2)* intentando convertir en rígidas las formas, *3)* buscando relaciones a partir de características de los poliedros regulares, o *4)* utilizando conocimientos sobre las simetrías de los poliedros mediante un análisis del contenido. Para cada uno de estos enfoques indicamos: *1)* las tareas que proponemos, *2)* las representaciones físicas que utilizamos en su desarrollo, *3)* las características de los modelos de pares de poliedros regulares que se subrayan, *4)* los aspectos de la geometría que se abordan, y *5)* los procesos matemáticos que se tratan.

La secuencia de tareas propuesta permite entonces trabajar: *i)* la introducción de objetos mentales[2] relacionados con conceptos que conllevan bastante dificultad (el concepto de dualidad) y la precisión de estos objetos mentales, que se introducen inicialmente a partir de un mundo reducido y muy específico de ejemplos; *ii)* la descripción de pares de poliedros inscritos uno en otro y de formas compuestas por varios poliedros regulares, en diferentes niveles, esto es, determinando el número de elementos y su disposición en el espacio de manera estructurada o hallando las simetrías comunes a varios poliedros; *iii)* las relaciones numéricas entre aristas de poliedros (para construir modelos), aplicando teoremas, como el de Pitágoras o el teorema del coseno; *iv)* el proceso de clasificar, bien enumerando elementos de algunas familias de poliedros (los poliedros arquimedianos y los poliedros de Catalan), o bien según sus simetrías (los poliedros regulares);[3] *v)* el proceso de definir, al tratar el problema que conlleva introducir

[1] Usamos el término “procesos matemáticos” para referirnos a analizar, clasificar, definir, demostrar, conjeturar, particularizar, generalizar y abstraer, y, al calificar esos procesos de “matemáticos”, subrayamos que lo que nos importa fundamentalmente son “las características que estas acciones tienen como componentes de la práctica matemática” (Puig, 1996b, p. 15).

[2] Usamos *“objeto mental”* en el sentido en el que lo utiliza Freudenthal (1983). En Puig (1997) se indica cómo, en una primera aproximación, la contraposición objeto mental/concepto que plantea Freudenthal puede verse como la consecuencia de considerar a las personas que conciben o usan las matemáticas frente a las matemáticas como disciplina o conjunto de saberes histórica, social o culturalmente establecidos.

[3] Los poliedros arquimedianos y los poliedros de Catalan son poliedros semirregulares,

conceptos en un mundo muy específico de ejemplos o con la extensión o reducción de nuestra idea de poliedro y de sus elementos; *vi)* el proceso de conjeturar, el proceso de demostrar y las formas que adoptan en la enseñanza de las matemáticas (Wain y Woodrow, 1980).

Gran parte de las ideas que fundamentan este estudio se derivan de trabajos de Freudenthal, en particular, su idea de fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983) –que uno de nosotros estudia en Puig (1997)– y su afirmación de que en la enseñanza de la geometría se centre la atención en la multitud de relaciones que existen entre contenidos geométricos (Freudenthal, 1973, p. 414).

También hemos utilizado, como marco teórico y metodológico, la idea de Modelo Teórico Local (MTL) de Eugenio Filloy. Según Filloy y sus colaboradores (1999), para poder tener en cuenta la complejidad de los fenómenos que se producen en los sistemas educativos, esos MTL integran varios componentes teóricos interrelacionados: *1)* componente de enseñanza del MTL o, de manera abreviada, Modelo de Enseñanza; *2)* componente de cognición del MTL o Modelo para los Procesos Cognitivos; *3)* componente de competencia formal del MTL o Modelo de Competencia, y *4)* componente de comunicación del MTL o Modelo de los Procesos de Comunicación. Lo que distingue a unos componentes de otros es, entre otras cosas, los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto del cual se realiza el análisis. En el Modelo de Enseñanza intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en la secuencia de enseñanza (Filloy y cols., 1999, p. 56). Además, estos modelos teóricos son locales en la medida en la que se elaboran para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseña en los sistemas educativos un contenido concreto a unos alumnos concretos, y sólo se pretende que sean adecuados para los fenómenos observados (Puig, 1996, p. 12).

En este trabajo, una vez elaborado el Modelo de Enseñanza a partir de investigaciones previas, se apunta cómo se organiza la gran variedad de observaciones que se hacen al experimentar el Modelo de Enseñanza con estudiantes de Magisterio, observaciones relativas a las actuaciones de los alumnos, que explican lo que hacen, cómo lo hacen, o corresponden a explicaciones que dan sobre sus dificultades, para que el nuevo Modelo de Enseñanza, reelaborado teniendo en cuenta los datos obtenidos en la experimentación, suponga el punto

porque dejan de cumplir alguna condición de los poliedros regulares. *Los poliedros regulares* tienen caras regulares, iguales y vértices iguales. *Los poliedros arquimedianos* son sólidos que tienen todas las caras regulares, pero son de más de una clase y tienen todos los vértices iguales. En *los poliedros de Catalan* las caras son iguales pero no son regulares y los vértices no son iguales.

de partida para una nueva investigación. Así, el trabajo que describimos aquí muestra una de las características fundamentales de los MTL: el esquema de la investigación es recursivo (Filloy y cols., 1999, p. 10), en el sentido de que los resultados tienen que ver con todos los componentes del modelo y producen, por tanto, un nuevo MTL. Lo que describimos aquí es, pues, una de estas vueltas de la recursividad. Por otro lado, se evidencia que, cuando el profesor, además de ser un conocedor de resultados de la investigación realizada sobre la enseñanza y el aprendizaje de los procesos matemáticos, conoce bien las teorías que se usan en la investigación en Didáctica de las Matemáticas y las técnicas de procesamiento e interpretación de las observaciones efectuadas en los salones de la clase, entonces puede reorganizar las observaciones y reflexiones que hace sobre su labor docente para que supongan el punto de partida de una investigación.

En textos anteriores (Puig, 1996a, 1996b), uno de nosotros ha subrayado que la función de investigador y la función de profesor son funciones distintas que, de hecho, ponen obstáculos la una a la otra; también ha precisado el tipo de relaciones que existen entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la docencia, considerando que la docencia de las matemáticas que nos interesa se realiza en el sistema escolar y la didáctica de las matemáticas estudia fundamentalmente los fenómenos que se producen cuando se enseña matemáticas en los sistemas escolares. Además, ha apuntado que estas relaciones no han de ser pensadas con el par teoría/práctica, sino con el par objeto de conocimiento/conocimiento elaborado sobre el objeto (Puig, 1996a, p. 108). En este trabajo pretendemos poner de relieve también estas relaciones. Al dirigir los análisis realizados sobre las tareas y sobre las observaciones de clase hacia la reelaboración de un nuevo Modelo de Enseñanza, mostramos cómo podemos traspasar lo que podría considerarse una buena tarea profesional de un profesor reflexivo. El conocimiento obtenido en la docencia no sólo permitirá mejorar las clases que se dan cada día; aquél se reorganiza y se tiene en cuenta para la reelaboración del Modelo de Enseñanza, uno de los cuatro componentes del MTL que se considera punto de partida para una nueva investigación, en la que se retoma el estudio de los procesos matemáticos en el contexto de las relaciones de inscripción y dualidad.

LAS INVESTIGACIONES PREVIAS Y EL MARCO TEÓRICO DEL MODELO DE ENSEÑANZA INICIAL

Una de las líneas de investigación en la que estamos implicados desde hace ya mucho tiempo se refiere a la enseñanza y al aprendizaje de la Geometría de los sólidos (Puig y Guillén, 1983; Guillén, 1991, 1997). Ahora bien, como hemos resaltado en repetidas ocasiones (por ejemplo, Guillén, 1991, 1997, 2000, 2001), nuestro objeto de estudio fundamental no ha sido los conceptos involucrados, por ejemplo el concepto de poliedro, sino los procesos matemáticos que se ponen en juego en secuencias de enseñanza en las que están involucrados esos objetos y conceptos geométricos. Por tanto, si bien las diferentes situaciones de enseñanza que presentamos se refieren a conceptos geométricos, la secuencia de actividades que se propone no está organizada con el fin de que se constituyan los objetos mentales relativos a estos conceptos, sino que tiene como propósito constituir los correspondientes a los procesos matemáticos ya mencionados. Así, por ejemplo, en Guillén (1991) se indica:

> La elección de una familia de poliedros tan particular –la de los poliedros regulares– como "mundo" para hacer el análisis de éstos por medio de la simetría, tampoco se ha hecho al azar. Nos han interesado los poliedros más simples, que tienen todas las caras, vértices y aristas iguales, que están muy organizados, que son muy armoniosos y simétricos. Desde luego, si nuestro propósito hubiera sido el "acceso al concepto" de simetría, el mundo elegido hubiera sido mucho más amplio y las actividades e investigaciones se hubieran planteado desde otro punto de vista. Pero esto es otro problema en el que no entramos de momento (Guillén, 1991, p. 61).

Con respecto a las relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros, en Guillén (1991) se hacen comentarios análogos. Se apunta que, si bien el principio de dualidad en el espacio proporciona un método general para el establecimiento de una correspondencia entre los puntos, líneas rectas y planos de una figura –vértices, aristas y caras de un poliedro– y los planos, líneas rectas y puntos de otra figura –caras, aristas y vértices de otro poliedro–, no se pretende el acceso al concepto de dualidad. La idea del concepto de dualidad se introduce sin definición, sólo con ejemplos, a partir de los poliedros platónicos, con lo que "la imagen del concepto de *dualidad* que puede uno formarse a partir de estos ejemplos contendrá, con toda seguridad, junto con los atributos críticos, otros atributos no críticos, es decir, propiedades que cumplen los poliedros duales que se han usado como ejemplos –los platónicos–, pero que no se cumplen en general" (Guillén, 1991, p. 89). En la lista de propiedades que se indican al definir *dualidad* en los poliedros regulares, no se separan los atributos críticos de los no críticos y se advierte que, cuando se hable de dualidad en un mundo de poliedros más amplio que el de los platónicos, será necesario hacerlo (Guillén, 1991, p. 98). Las tareas comentadas en el siguiente apartado dan cuenta de ello.

Aunque nuestro objeto de estudio fundamental sea los procesos matemáticos indicados, uno de nosotros ha estudiado también el aprendizaje de aspectos conceptuales. En Guillén (1997) indicamos dificultades que tuvieron alumnos de Magisterio al desarrollar en clase las situaciones didácticas a partir de las cuales introducíamos los conceptos de inscripción y de dualidad en el mundo de los poliedros regulares y describíamos o construíamos modelos de poliedros inscritos unos en otros, así como modelos de pares de poliedros regulares duales.

Al retomar en 1998 el hilo de la investigación sobre procesos, perfilamos el marco teórico, tomando como referencia el trabajo de Freudenthal (1973, 1983) y otros que desarrollan el punto de vista de la fenomenología didáctica (Puig, 1997; Treffers, 1987) para la organización de la enseñanza de las matemáticas. De ellos se desprende una concepción de la naturaleza de las matemáticas en la que los objetos matemáticos son medios de organización de objetos de nuestra experiencia (o "fenómenos"), que, objetivados por los sistemas matemáticos de signos en los que se producen, se convierten en objetos de nuestra experiencia, que son organizados a su vez por nuevos medios de organización, es decir, nuevos objetos matemáticos, y así reiteradamente (Puig, 1997). A la luz de esta concepción, reorganizamos las situaciones y secuencias de enseñanza ya experimentadas con anterioridad. En Guillén y Puig (2001) presentamos un avance del trabajo realizado, describiendo en concreto los enfoques mencionados en la presentación.

Las actividades que incluimos para cada enfoque, experimentadas con estudiantes de Magisterio, dan cuenta de la naturaleza más o menos abstracta de los fenómenos que requieren organización, que varía según el enfoque en que nos encontremos. En efecto, al menos podemos distinguir lo siguiente:

a) Situados en un mundo de fenómenos que tienen que ver con la percepción visual, los modelos de pares de poliedros inscritos uno en otro pueden surgir en un contexto de generar formas por diferentes procedimientos y al centrar la atención en las estructuras que son rígidas o que se deforman.

b) Cuando los fenómenos que requieren una organización son las características numéricas de los poliedros, también surge el estudio de relaciones de inscripción entre los pares de poliedros. Ahora tenemos fenómenos que tienen que ver con los números, que son de naturaleza más abstracta que los que vienen de la percepción visual.

c) Cuando el estudio se aborda utilizando los conocimientos sobre las simetrías de los poliedros, se pueden delimitar los pares de poliedros regulares que tienen relación de inscripción. En este caso, son los conceptos matemáticos los que se presentan para organizar fenómenos que, sin ellos, no se observarían.

En Puig (1997) se ha descrito una concepción de la naturaleza de las matemáticas y, en particular, de los procesos de elaboración de conceptos matemáticos a partir de la organización de fenómenos, es decir, de objetos de nuestra experiencia, que no separa a las matemáticas en un mundo distinto del "mundo real": los conceptos matemáticos pertenecen al mismo mundo que todos los objetos de nuestra experiencia. Sin ánimo, por tanto, de reflejar que los fenómenos de distinto nivel de abstracción pertenecen a mundos distintos y distintos del de las matemáticas, cabe subrayar que, con los dos enfoques que tienen como soporte representaciones físicas de modelos de poliedros, vamos de los contextos –el "mundo real"– a las matemáticas; al estudiar la descripción de los modelos en el nivel local, y en términos de simetrías que comparten,[4] proporcionamos conocimientos. En los otros dos enfoques, vamos de las matemáticas a los contextos, al mundo real, y organizamos los conocimientos adquiridos desde una nueva perspectiva; en este caso, los fenómenos situados en el contexto real se usarán como campo de aplicaciones.

[4] Se puede considerar que hay distintos niveles de análisis: de los elementos –análisis puntual– y de la estructura. En la estructura, el análisis puede ser local –por ejemplo, al fijarse en las caras que se juntan en los vértices o en las caras que bordean a otra– o global, que dice algo respecto de la estructura total.

LAS TAREAS DEL MODELO DE ENSEÑANZA INICIAL

El Modelo de Enseñanza que presentamos en este apartado precisa la información que ya aportamos en Puig y Guillén (2001). Considerando los diferentes enfoques que enumeramos en este trabajo y las características de los modelos de pares de poliedros regulares que se subrayan en cada enfoque, así como el tipo de problemas que podemos abordar con cada uno, en este apartado vamos a indicar las tareas que hemos delimitado para trabajar los diferentes enfoques. Para cada una señalamos las representaciones físicas que utilizamos en su desarrollo y las características de los modelos de pares de poliedros regulares que se subrayan con ellas. Asimismo, el análisis realizado de las secuencias de actividades propuestas para cada enfoque nos lleva a indicar los aspectos de la geometría que se abordan y los procesos matemáticos que se tratan.

"Construir o generar formas." "Formas rígidas y que se deforman"

La tarea 1 del cuadro 1 es un ejemplo del enfoque "Construir o generar formas".

Cuadro 1 Actividades propuestas para el enfoque "Construir o generar formas"

T–1 Con los puzzles siguientes:

- 4 tetraedros y un octaedro, que componen un tetraedro.
- Tetraedro y 4 pirámides, que componen un cubo.
- Tetraedro y 4 tetraedros, que componen una estrella octangular.
- Cubo y 6 casquetes, que componen un dodecaedro.
- 3 pirámides iguales, que componen un cubo.
- 6 pirámides iguales, que componen un cubo.

Se pide que:

a) Se juzguen relaciones entre determinados poliedros que se dan enunciadas por escrito en papel o se expresan verbalmente.
b) Se enuncien por escrito o verbalmente relaciones entre determinados poliedros.
c) Se juzguen descripciones que se dan, por escrito o verbalmente, de las piezas que forman determinados puzzles.
d) Se den descripciones, por escrito o verbalmente, de las piezas que forman determinados puzzles.
e) Se construyan algunos puzzles.

Las actividades planteadas en el contexto de convertir en rígidas las formas son del mismo tipo. Se pide también describir modelos, o se pide que se juzguen descripciones que se dan por escrito o se hacen verbalmente, pero ahora la descripción se hace en términos de los elementos de los poliedros implicados. Asimismo, hay tareas de construcción de modelos (véase el cuadro 2).

Las tareas y los aspectos de la geometría

Con las tareas T-1 y T-2 se tratan el tetraedro inscrito en el cubo y el cubo inscrito en el dodecaedro en términos de inscripción, composición y descomposición. Se conectan así los resultados obtenidos en un contexto de convertir formas en rígidas con los obtenidos en un contexto de puzzles.

Como indicamos en los enunciados de las tareas, como soporte para la actividad, se requieren los puzzles que se traten (para la tarea T-1) y representaciones físicas de los modelos que se trabajan cuando se presenta un modelo en un armazón y cuando el modelo de pares de poliedros consta de armazones para ambos poliedros (tarea T-2).

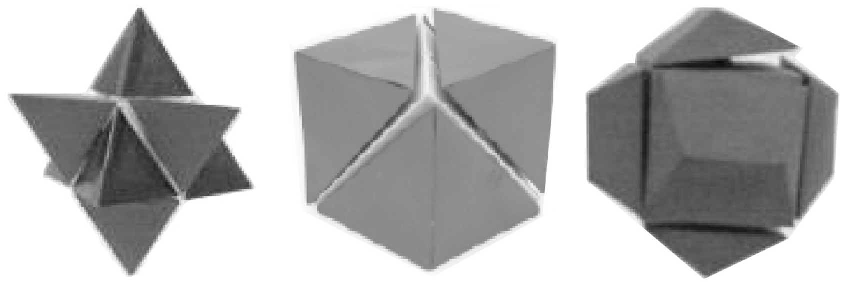
Cuadro 2 Actividades propuestas para el enfoque "Formas rígidas y que se deforman"

T-2 Como soporte para la actividad, se requieren representaciones físicas de los modelos que se trabajan cuando se presenta un modelo en un armazón y armazones para ambos poliedros.

Se pide que:

a) Se convierta en rígido un armazón del cubo añadiendo una diagonal a cada cara y se describa el modelo resultante. Luego se pide que se comparen los modelos obtenidos por los estudiantes de la clase.
b) Se intente convertir en rígido un armazón del cubo añadiendo todas las diagonales del cubo que salen de un vértice (tanto las diagonales de las caras como las que unen ese vértice con los que están en otras caras), y que se describa el modelo resultante.
c) Se intente convertir en rígido un armazón del cubo añadiendo todas las diagonales del espacio y que se describa el modelo resultante.
d) Se juzguen descripciones que se dan por escrito o verbalmente del tetraedro inscrito en el cubo (T–C) y del cubo inscrito en el dodecaedro (C–D).
e) Se construyan representaciones físicas de diferentes tipos: un modelo inscrito en un armazón o dos armazones.
f) El tetraedro inscrito en el cubo (T–C) y el cubo inscrito en el dodecaedro (C–D) se trabajan en términos de composición, descomposición e inscripción.

Figura 1 Algunos puzzles



Estas tareas inciden en diferentes aspectos de la geometría que se pueden abordar en el ámbito escolar (Treffers, 1987, pp. 310-311). Con ambas trabajamos *el aspecto de la forma,* al fijarnos en los nombres y en el reconocimiento y clasificación de los sólidos implicados, y el *aspecto constructivo,* con la obtención de los modelos y armazones (las representaciones físicas) con los que trabajamos (véase figura 1).

Asimismo, en ambas tareas se trata *el aspecto de relación* y *el aspecto de lenguaje,* al expresar las relaciones entre los objetos geométricos (sólidos, sus elementos, secciones planas, planos de simetrías, etc.) implicados en una representación física (puzzles, modelos de pares de poliedros, armazones, etc.) y al describir estas representaciones físicas utilizando enunciados verbales y signos de otra naturaleza (véase el siguiente ejemplo), así como representaciones planas y tridimensionales.

Por ejemplo, en un contexto de construcción de modelos (u otras representaciones físicas), podemos hacer algunas descripciones de los poliedros implicados y determinar las características numéricas de ellos con su disposición en el espacio, cuando presentamos los modelos apoyados en diferentes elementos. Por ejemplo, las aristas del octaedro apoyado en una cara se puede describir de manera estructurada como sigue: 3 formando triángulo, 6 en zig-zag, 3 formando triángulo:

Las aristas del cubo apoyado en un vértice las podemos describir como sigue: 3 en pico, 6 en zig-zag, 3 en pico:

Generar sólidos juntando sólidos y trabajar con determinados puzzles permite explorar relaciones entre el tetraedro y el cubo, el cubo y el dodecaedro, etc. Con la tarea T-1 podremos enunciar relaciones como: un tetraedro y 4 pirámides forman un cubo, o un cubo y 6 casquetes iguales forman un dodecaedro, etc. (véase figura 1). Se pueden seguir trabajando otras relaciones entre los poliedros implicados en un modelo y entre elementos de éstos, así como descripciones de esos poliedros en términos de sus elementos. Por ejemplo, una vez establecido que, cuando se añaden cuatro pirámides (de un manera particular) a las caras de un tetraedro, se obtiene el cubo, podemos centrar la atención en las 4 pirámides que se añaden y describir sus elementos en términos de los del tetraedro (modelo de partida) o del cubo (modelo obtenido). Asimismo, la tarea 2 propuesta para el enfoque "Formas rígidas y que se deforman" también incide en estos aspectos de relación y lingüísticos. Una vez que se ha llamado la atención sobre algunas formas que se presentan en la naturaleza (por ejemplo, los andamiajes, algunas cúpulas, etc.), a partir de actividades en las que se convierten en rígidas algunas estructuras de sólidos sencillos, se pueden introducir algunas relaciones entre sólidos: el tetraedro se puede inscribir en un cubo, o el cubo se puede descomponer en 3 (o 6) pirámides iguales. Estas observaciones nos conducirán a conjeturar otras inscripciones entre poliedros regulares (por ejemplo, podemos inscribir el cubo en el dodecaedro), y a plantearnos nuevas cuestiones: ¿podremos inscribir el tetraedro en el dodecaedro?, ¿y el tetraedro en el octaedro?

Con las actividades de la tarea T-2 se obtienen algunos resultados ya establecidos a partir de tareas de puzzles y truncamientos (tarea T-1) que remarcan los milagros del "encaje" en el estudio de los sólidos. Permiten que se relacionen los sólidos entre sí o con figuras planas (las que se obtienen como sección) y que se expresen estas relaciones de diferentes maneras y con mayor o menor precisión: un cubo puede descomponerse en un tetraedro y 4 pirámides, un tetraedro se puede inscribir en un cubo de manera que las aristas del tetraedro son diagonales de las caras del cubo, una por cada cara; entonces los 4 vértices del tetraedro están en 4 vértices del cubo que no son opuestos entre sí, y las caras del tetraedro se corresponden con los 4 vértices del cubo opuestos a los seleccionados para los vértices (véase la figura 1). Extendiendo la situación, también se puede precisar cómo inscribir un cubo en un dodecaedro.

Las tareas T-1 y T-2 inciden también en *el aspecto de cálculo* de la geometría, bien con problemas ligados a contar el número de elementos de los poliedros implicados en un modelo (u otra representación física) al describirlos, bien en conexión con la medida, hallando relaciones numéricas entre aristas de poliedros (para construir modelos). Podemos determinar estas relaciones numéricas utilizando diferentes estrategias, por ejemplo, para determinar la arista del tetraedro inscrito en un cubo (del cubo inscrito en el dodecaedro) cuando conocemos la arista del cubo (dodecaedro), podemos construir un cuadrado (pentágono) y medir su diagonal o podemos hallar esta diagonal aplicando el teorema de Pitágoras (el teorema del coseno) (véase Guillén, 1991, 1997).

Y si hacemos la descripción de los modelos de pares de poliedros inscrito uno en otro en el nivel global, esto es, fijándonos en las simetrías que comparten los poliedros implicados en el modelo, esto es, determinando sus simetrías comunes (véase la actividad T-4*c*), incidimos en *el aspecto de las transformaciones*. *El aspecto lógico* se aborda razonando sobre la base de evidencia visual dentro de un sistema organizado localmente.

Características de los poliedros regulares. Búsqueda de relaciones

Una vez determinadas las características numéricas (número de caras, vértices y aristas) de los poliedros regulares y su disposición en el espacio, así como el orden de sus vértices y el número de lados del polígono de las caras, y recopiladas en una tabla, podemos conjeturar relaciones de inscripción entre pares de poliedros regulares. Con este enfoque, abordamos en otro nivel de matematización la búsqueda de relaciones entre los poliedros regulares.

Delimitando problemas objeto de estudio

Para trabajar las relaciones de inscripción en el mundo de los poliedros regulares a partir de las características numéricas de éstos, la actividad que se desarrolla puede surgir de la tarea de investigación del cuadro 3.

Al desarrollar esta tarea en clase, no resulta difícil llegar a enunciar relaciones como las siguientes:

- El número de aristas del tetraedro coincide con el número de caras del cubo.

Cuadro 3 Una tarea de investigación

T-3

a) Recopilar en una tabla las características numéricas (relativas al número de elementos: C, V, A) de los poliedros regulares, así como el orden de los vértices y el número de lados del polígono de sus caras.
A continuación, enunciar relaciones entre el número de elementos de determinados pares de poliedros, entre el número de diferentes elementos de un mismo poliedro, y también otras relaciones numéricas que encuentren.

b) Agrupar los enunciados expresados en *a* que piensen que pueden corresponder a problemas análogos.
Tratar de delimitar así algunos problemas con los que podríamos continuar el estudio de los poliedros regulares.
Observar también si surgen problemas que hemos tratado ya en clases anteriores.

- El número de caras del cubo coincide con el de vértices del octaedro y a la inversa.
- El número de caras del dodecaedro coincide con el de vértices del icosaedro y a la inversa.
- El número de aristas del cubo y el del octaedro coinciden.
- El número de aristas del tetraedro coincide con el número de vértices del octaedro.
- El orden de los vértices del octaedro coincide con el número de lados de las caras del cubo.
- El número de aristas del dodecaedro y del icosaedro coinciden.
- En el tetraedro, el número de caras y el de vértices coinciden, y también el orden de los vértices y el número de lados de sus caras.

Si representamos visualmente los elementos que implica cada relación y tenemos en cuenta también los poliedros a los que se refieren, tablas como las de la figura 2 facilitan llegar a delimitar tres problemas con los cuales continuar el estudio: nos centramos en relaciones que implican pares de poliedros para los que ya habíamos encontrado relaciones de inclusión entre ellos en otros contextos (véase figura 2*a*), problema que denominamos "Relaciones ya estudiadas", y los problemas que denominamos "Relaciones de dualidad" (véase la figura 2*b*).

Ahora bien, al desarrollar la investigación en clase (tarea T-3), se enuncian también otras relaciones, como, por ejemplo, los problemas que nombramos como "Nuevas relaciones de inscripción" (véase la figura 2*c*) y algunas relaciones numéricas entre los elementos de los poliedros implicados que, al verificarlas

Figura 2

	C	V	A	Ord. V	nª lad. caras
Tetraedro	4	4	6	3	3
Cubo	6	8	12	3	4
Octaedro	8	6	12	4	3
Dodecaedro	12	20	30	3	5
Icosaedro	20	12	30	5	3

a)

	C	V	A	Ord. V	nª lad. caras
Tetraedro	4	4	6	3	3
Cubo	6	8	12	3	4
Octaedro	8	6	12	4	3
Dodecaedro	12	20	30	3	5
Icosaedro	20	12	30	5	3

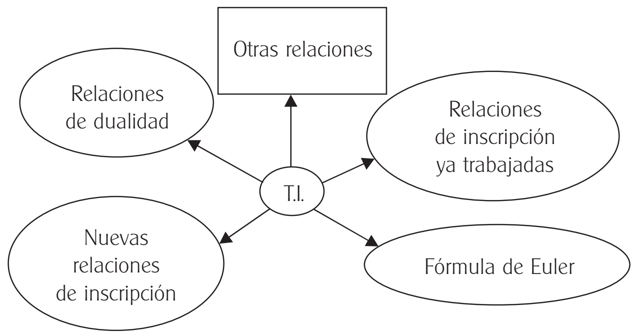
b)

	C	V	A	Ord. V	nª lad. caras
Tetraedro	4	4	6	3	3
Cubo	6	8	12	3	4
Octaedro	8	6	12	4	3
Dodecaedro	12	20	30	3	5
Icosaedro	20	12	30	5	3

c)

también otros poliedros, se enuncian de una manera más general. Por ejemplo, el número de aristas (*A*) del tetraedro es 3/2 de su número de caras, pero como también verifican esta relación el octaedro y el icosaedro, enunciamos la relación para los deltaedros: "El número de aristas de un deltaedro es 3/2 de su número de caras (*C*)". Al considerar también el cubo y el dodecaedro, se puede verificar que, en los poliedros regulares, $A = Cn/2$, donde n es el número de lados de las caras del poliedro correspondiente. También es usual que algún estudiante elabore la fórmula de Euler. Por lo que, a partir de esta tarea de investigación, se pueden delimitar cinco problemas con los cuales continuar el estudio (véase la figura 3), si bien en este trabajo sólo vamos a considerar los dos problemas que se plantean a partir de las relaciones reflejadas en las tablas *a* y *b* de la figura 2.

Figura 3 Problemas que surgen a partir de la tarea de investigación



Las tareas sobre relaciones ya estudiadas

Al considerar las relaciones que se visualizan en la tabla de la figura 2*a*, que implican igualdad entre el número de caras y el número de aristas del tetraedro y el cubo (T-C), y del cubo y el dodecaedro (C-D), se puede dar la oportunidad a los estudiantes para que conecten estos resultados con otros que se han encontrado en otros contextos y que implican a los mismos pares de poliedros. Con las tareas T-4 y T-5 (véase el cuadro 4), propuestas para tratar el problema que hemos denominado como "Relaciones de inscripción ya trabajadas", se pueden subrayar los diferentes enfoques para abordar las relaciones de inscripción T-C y C-D, así como sus dificultades en el ámbito escolar.

En Guillén (1991, pp. 62-77) pueden encontrarse sugerencias para desarrollar en clase la actividad T-4*c*. En este trabajo se determinan los planos de simetría (PS) y los ejes de rotación (ER) de cada uno de los poliedros regulares y se establecen relaciones entre ellos. Como indicamos al hablar de la metodología de clase, el profesor, después de hacer un resumen de lo visto hasta entonces, resuelve uno de los problemas planteados, expresando su proceso de resolución. Así, al desarrollar en clase esta actividad, el profesor realizará la descripción de los PS y de los ER del cubo en términos de los elementos de los poliedros correspondientes y los estudiantes la harán para los otros poliedros regulares con la ayuda de las sugerencias que se dan en el enunciado de la actividad y otras, si fuera necesario, que aportaría el profesor.

Siguiendo la metodología indicada, también se trabajarán las relaciones entre

Cuadro 4 Actividades propuestas para "Relaciones de inscripción ya trabajadas"

T-4

a) Las inscripciones del tetraedro en el cubo y del cubo en el dodecaedro también las hemos abordado en otros dos contextos diferentes. Recopilar las relaciones delimitadas al abordar este estudio, relaciones que existen entre estos pares de poliedros y entre sus elementos.

b) Mirar de nuevo la tabla y tratar de explicar si los números que coinciden se podrían haber explicado desde el principio.

¿Cuáles otros números podríamos explicar con lo que sabemos del tetraedro y el cubo?

¿Cuáles otros resultados podemos subrayar al fijarnos en las caras del cubo y las aristas del dodecaedro?

c) Un *plano de simetría* de un poliedro es un espejo que un trozo del poliedro lo refleja exactamente en el otro trozo. Un *eje de rotación* de un poliedro es una recta que, si se gira el poliedro alrededor de ésta, antes de dar la vuelta completa el poliedro presenta el mismo aspecto que en la posición inicial. Por ejemplo, un eje de rotación del cubo es el que pasa por centros de caras opuestas. El *orden de rotación* de este eje es 4, porque hay un giro (en este caso el de 90º) que si se hace 4 veces se llega a la posición inicial.

Hallar las simetrías (planos de simetría y ejes de rotación) de cada uno de los poliedros regulares. Describir los planos de simetría (PS) en términos de los elementos del poliedro y razonar cuántos hay de cada tipo.

Determinar para los ejes de rotación (ER) de qué tipos hay y razonar cuántos hay de cada tipo. Describirlos de la siguiente manera: indicar cuántos hay, el orden, por dónde pasan. Para simplificar puedes utilizar abreviaturas.

Para cada poliedro regular, hallar las relaciones que existen entre sus ejes de rotación y sus caras, entre sus planos de simetría y sus ejes de rotación, etcétera.

T-5

a) Puesto que las inscripciones del tetraedro en el cubo y del cubo en el dodecaedro se pueden conjeturar a partir de la tabla, ¿te parece una buena manera de introducir el problema en el nivel escolar?

b) Reflexionar sobre la dificultad que conlleva poder describir el modelo de estas inscripciones:
- cuando se introduce con puzzles,
- cuando se introduce por el intento de dar rigidez al cubo, o
- cuando se conjetura a partir de datos numéricos.

c) Reflexionar sobre la dificultad que conlleva describir un modelo localmente, esto es, en términos de los elementos de los poliedros implicados (caras, vértices, aristas, diagonales de las caras, altura de las caras...) y cuando la descripción se hace globalmente, esto es, en términos de sus simetrías (planos de simetría y ejes de rotación).

los ER y las caras, o entre los ER y los PS de un poliedro regular. Después de enunciar las relaciones para cada poliedro regular se pueden establecer enunciados más generales, esto es, para todos los poliedros regulares. Por ejemplo, podremos establecer que el orden de los ER que pasan por el centro de las caras coincide con el número de lados de las caras y esos ER son perpendiculares a las caras, mientras que el orden de los ER que pasan por vértices opuestos coincide con el orden del vértice (además, el polígono que se obtiene como sección cortando el poliedro perpendicularmente a este eje a una distancia suficientemente pequeña del vértice, que recibe el nombre de "polígono verticial", tiene el mismo número de lados que el orden del vértice); finalmente, los ER que pasan por los puntos medios de aristas de un poliedro regular son perpendiculares a la arista y son de orden 2. Podemos observar también que dos PS se intersecan siempre en un ER e incluso se puede conjeturar que el orden de un ER coincide con el número de planos que se intersecan en él.

Ahora bien, aunque es posible que algunos estudiantes concluyan ya en esta actividad que el cubo y el octaedro tienen las mismas simetrías (planos de simetría y ejes de rotación), así como el dodecaedro e icosaedro, si los estudiantes no lo observan, será con las actividades T-7*c* y T-9*c*, en las que se describen globalmente los modelos de pares de poliedros regulares duales, con las que nos centraremos en estos resultados.

Sobre el concepto de dualidad. Las tareas

Las tareas propuestas para tratar este problema, diseñadas teniendo en cuenta las dificultades reflejadas por estudiantes y los errores que cometen con frecuencia, van a permitir introducir el concepto de dualidad en el mundo de los poliedros regulares y describir algunos modelos de pares de poliedros regulares duales: modelos de un poliedro inscrito en su dual y los modelos compuestos (formados por intersecciones de pares de poliedros duales).

A partir de la tarea T-6, nos centramos en las relaciones que cumplen los elementos del tetraedro, los del cubo y octaedro y los del dodecaedro e icosaedro. Centrando la atención en estas relaciones, se introduce el concepto de poliedros duales o recíprocos[5] y se subrayan las características de este concepto: en los poliedros duales se intercambia el número de caras y de vértices y el número de aristas coincide. Además el orden de los vértices de uno de ellos es igual al nú-

[5] En las experimentaciones realizadas, casi siempre ha sido necesario prestar una atención especial al caso del tetraedro: como las relaciones seleccionadas implican pares de poliedros (cubo con octaedro y dodecaedro con icosaedro), para que se note que los elementos del tetraedro también verifican estas relaciones, a menudo fue necesario dar alguna sugerencia o plantear alguna cuestión. De ahí la actividad T-6*c*.

Cuadro 5 Actividades propuestas para "Relaciones de dualidad"

T–6

a) Representar visualmente en la tabla las relaciones que obtuvimos entre elementos del cubo y del octaedro.
b) Revisar los enunciados que construimos para este par de poliedros.
c) ¿Para qué otro par de poliedros podemos construir enunciados análogos? ¿Qué ocurre con el tetraedro?
d) Decimos que el cubo es el dual del octaedro y a la inversa; el dodecaedro y el icosaedro también son duales; y el tetraedro es dual de sí mismo. Enumerar las características que tiene el concepto de dualidad en el mundo de los poliedros regulares.

T-7

a) ¿Puedes imaginar un modelo con estos dos poliedros regulares, el cubo y el octaedro, de manera que el octaedro quede inscrito en el cubo (O–C)? ¿Cómo quedan los elementos del octaedro con respecto a los del cubo?
b) Intentar describir también el cubo inscrito en el octaedro (C–O); luego, al igual que hicimos con el tetraedro y el cubo, o el cubo y el dodecaedro, precisar cómo quedan los elementos del cubo con respecto a los del octaedro.
c) Hacer una descripción de los modelos O–C y C–O en el nivel global, esto es, hallar las simetrías (planos de simetría y ejes de rotación) de cada uno de estos modelos. Describe los planos de simetría (PS) y los ejes de rotación (ER) de estos modelos en términos de los elementos del cubo. Después, describe los PS y los ER en términos de los elementos del octaedro. Puedes utilizar los modelos correspondientes como soporte para realizar estas actividades.
¿Qué podemos decir acerca de las simetrías del cubo y del octaedro y de su disposición en el espacio?
Indica los PS y los ER del cubo y del octaedro que se corresponden.
d) Repetir las actividades *a*, *b* y *c* para el dodecaedro e icosaedro y para el tetraedro consigo mismo.
e) Clasificar los poliedros regulares según sus simetrías. ¿Cuántos grupos pueden establecerse? Compara el grupo de las simetrías del tetraedro con el grupo de las simetrías del cubo (o del octaedro).

mero de lados del polígono de las caras del otro y a la inversa. Los poliedros regulares convexos se pueden agrupar como sigue: el cubo y el octaedro son duales; el dodecaedro y el icosaedro son duales. El tetraedro es el dual de sí mismo.

Con las tareas T-7 y T-8 se refleja que consideramos varios modelos formados por los pares de poliedros platónicos duales: los modelos de pares de poliedros duales inscrito uno en otro y los modelos compuestos (formados por pares de poliedros duales intersecados entre sí). Se enuncian otras características de los poliedros regulares duales que posteriormente, a partir de la tarea T-11 del cuadro 7, se considerarán de nuevo para discutir sobre si son atributos críticos del concepto de dualidad de poliedros o sólo se verifican en esta familia específica (los poliedros regulares).

Con las tareas anteriores (relativas al estudio de las relaciones de inscripción con otros enfoques) se han construido modelos del tetraedro en el cubo (T-C) y del cubo en el dodecaedro (C-D) y se han descrito estos modelos. Con la actividad T-7*a* se puede verificar si los estudiantes sospechan que podría haber también modelos de poliedros inscritos para los pares de poliedros duales y si pueden predecir cómo se van a corresponder los elementos de ambos poliedros. El profesor resuelve la primera actividad planteada en la que se describe el modelo del octaedro inscrito en el cubo, expresando verbalmente su propio proceso de resolución.

Para las cuestiones siguientes de la tarea T-7, que se plantean para que los estudiantes las resuelvan con las sugerencias que aporta el profesor, algunos estudiantes pueden conjeturar cómo quedará el modelo resultante sin trabajar con sus representaciones físicas. Ahora bien, aunque sean los estudiantes los que han conjeturado los modelos, consideramos necesario el uso de sus representaciones físicas para describirlos.

Llegar a utilizar con precisión el lenguaje geométrico, si además hay que tener en cuenta modelos que conllevan grandes dificultades de visión espacial, implica bastante dificultad, de modo que los estudiantes quieren practicar en varias tareas los descubrimientos que se hacen. Además, aunque en el nivel de la expresión no hay apenas variación entre las tareas, y de eso se dan cuenta los estudiantes cuando han comprendido lo que hacen, el aspecto tan diferente de los poliedros implicados hace que las tareas nuevas conlleven la dificultad necesaria para no resultar meras tareas repetitivas.

En el resumen final (véase la metodología de clase), cabe hacer notar cómo la descripción de los ejemplos particulares (T-T, C-O, O-C, D-I, I-D) facilita considerablemente que los estudiantes puedan establecer enunciados más generales, que corresponden a descripciones de modelos de pares de poliedros regulares duales, y que se añada una nueva característica a las ya enumeradas para el concepto de dualidad en el mundo de los poliedros regulares (tarea T-11). Esa característica es que los poliedros regulares duales o recíprocos están relacionados de manera que se pueden construir modelos de uno de ellos inscrito en el otro donde:

Cuadro 6 Actividades propuestas para "Relaciones de dualidad"

Utilizar los modelos correspondientes como soporte para realizar las siguientes actividades.

T-8 Intentar construir modelos de los pares de poliedros duales de manera que uno de ellos quede inscrito en el otro. Para ello, determinar la relación que existe entre las longitudes de las aristas de los poliedros implicados. Hallar previamente el ángulo diedro del poliedro circunscrito.

T-9

a) Tomar un modelo de un poliedro inscrito en su dual e imaginar que se va aumentando el tamaño del poliedro inscrito; notar que las aristas de éste se convierten en aristas paralelas que se van acercando a las aristas del poliedro circunscrito. Llegará un momento en que las aristas se cortarán. Al modelo resultante se le llama modelo compuesto del correspondiente par de poliedros duales.

Una vez descrita la estrella octangular, tomar modelos compuestos del cubo y octaedro y del dodecaedro y el icosaedro y, para cada modelo, determinar las características numéricas y su disposición en el espacio a partir de las características de los dos poliedros regulares implicados en el modelo.

b) Determinar la disposición en el espacio de los elementos de un poliedro a partir de la disposición en el espacio de los elementos de su dual.

Para el modelo compuesto correspondiente, determinar las características numéricas y su disposición en el espacio a partir de las características de uno de los dos poliedros regulares implicados en el modelo.

c) Para el modelo compuesto correspondiente, hacer una descripción en el nivel global, esto es, hallar las simetrías (planos de simetría y ejes de rotación) de cada uno de los modelos compuestos. Para resolver esta actividad, puedes utilizar resultados que ya has obtenido en una actividad previa. Razona tu respuesta.

d) Determinar las características de las pirámides que se tienen que añadir a un poliedro regular para obtener el modelo compuesto.

e) Intentar construir los modelos compuestos del cubo y octaedro y del dodecaedro y el icosaedro. Intentar determinar la estrategia más fácil: ¿añadir pirámides al cubo y al dodecaedro o añadir pirámides al octaedro e icosaedro?

T-10

a) A partir del modelo de la estrella octangular, se puede deducir que la forma del sólido intersección de los dos tetraedros es el octaedro y que el sólido que contiene a la estrella octangular –el sólido envolvente– es el cubo. Trata de justificar que los poliedros intersección y envolvente en la estrella octangular son los indicados. Para ello, encuentra primero las características numéricas de los poliedros intersección y envolvente y compara estas características entre sí.

b) Explica cómo se puede obtener el sólido intersección de la estrella octangular a partir del tetraedro y cómo se puede obtener el sólido envolvente a partir de la estrella octangular.

c) Halla las relaciones entre las longitudes de las aristas del octaedro, tetraedro y cubo.

Cuadro 6 (continuación)

d) Como en la estrella octangular, para los modelos compuestos del cubo y octaedro y del dodecaedro e icosaedro se tiene un sólido intersección y un sólido envolvente. Para cada modelo compuesto:

Explicar cómo se puede obtener el poliedro intersección a partir de uno de los dos poliedros regulares que forman el modelo compuesto y cómo se puede obtener el modelo envolvente a partir del modelo compuesto.

Determinar la forma de las caras y las características numéricas de los modelos envolvente e intersección.

e) Para cada modelo compuesto de pares de poliedros regulares duales, comparar las características de los poliedros intersección y envolvente. ¿Qué relación tienen estos poliedros?

- Por cada vértice del poliedro inscrito aparece una cara del poliedro circunscrito, perpendicular al eje de rotación que pasa por ese vértice.
- Cada vértice del poliedro circunscrito se corresponde con una cara del poliedro inscrito, perpendicular al eje de rotación que pasa por ese vértice.
- Por cada arista del poliedro inscrito aparece una arista en el poliedro circunscrito. Éstas se cruzan perpendicularmente y el eje de rotación que pasa por los puntos medios de las aristas del poliedro inscrito pasa también por los puntos medios de las aristas del poliedro circunscrito.
- El número de lados de las caras de un poliedro coincide con el orden de los vértices del otro poliedro.

Con estas actividades de la tarea T-7 también cabe subrayar (en el resumen final) que los pares de poliedros duales tienen las mismas simetrías y que los modelos de pares de poliedros regulares duales inscrito uno en otro las mantienen. Puesto que los poliedros regulares pueden clasificarse en función de sus simetrías, con este criterio encontramos tres grandes grupos: el del tetraedro, el del octaedro y cubo, y el del dodecaedro e icosaedro, de manera que uno puede verse como parte de otro, pues el grupo de simetrías del tetraedro es un subgrupo del grupo de simetrías del octaedro.

La tarea T-8, relativa a la construcción de los modelos, incide en el aspecto del cálculo en la geometría hallando relaciones numéricas entre las aristas de los poliedros implicados en un modelo. En Guillén (1991, pp. 98-101) ampliamos las sugerencias que damos en esta tarea.

Todo lo visto hasta ahora surge a partir de los modelos de poliedros regulares inscrito uno en otro. Otra manera de desarrollar la actividad a partir de una

Figura 4 Modelos compuestos de pares de poliedros regulares duales

situación de clase es con la tarea T-9; en ella, en vez de considerar el tamaño adecuado de los pares de poliedros para que uno quede inscrito en el otro, se hace aumentar el poliedro inscrito hasta que queda de un tamaño que las aristas de ambos poliedros se cortan perpendicularmente en el punto medio (véase la figura 4).

Para estos otros modelos de pares de poliedros duales proponemos actividades análogas a las ya realizadas con los otros (de descripción y construcción de modelos) y también introducimos otras nuevas, ya que en los modelos compuestos podemos considerar también los modelos intersección y envolvente (véase la tarea T-10). En Guillén (1991, pp. 101-108) pueden encontrarse sugerencias para desarrollar en clase las actividades de las tareas T-9 y T-10 y respuestas para ellas. Siguiendo lo indicado en la metodología de clase, para las tareas T-9 y T-10 el profesor resuelve las actividades relativas a la estrella octangular y los estudiantes lo hacen para los otros dos modelos compuestos. En la reflexión, se

Cuadro 7 Actividades propuestas para "Relaciones de dualidad"

T-11

a) Enumerar todas las características que tiene el concepto de dualidad en el mundo de los poliedros regulares. A las enumeradas en la tarea T-6 añadir las que pueden enunciarse considerando que se pueden construir modelos de los pares de poliedros regulares duales.

b) Considerar el concepto de dualidad de poliedros en un mundo más amplio, esto es, además de considerar los poliedros regulares, incluir también los obtenidos como modelo intersección y envolvente en la tarea T-9. Delimitar las propiedades del concepto de dualidad que dejan de cumplirse y las que se mantienen.

pueden dar enunciados generales para los modelos compuestos, elaborados a partir de las actividades resueltas por el profesor para la estrella octangular y las resueltas en los grupos a partir de los modelos compuestos del cubo y octaedro y del dodecaedro e icosaedro.

Otro punto para discutir, que ya hemos adelantado al hablar de las tareas T-7 y T-8, se refiere a la idea de dualidad de poliedros (tarea T-11). Si continuamos el estudio considerando los poliedros intersección (que son poliedros arquimedianos) y envolventes (que son poliedros de Catalan), esto es, ampliando el mundo de poliedros donde se define el concepto de dualidad, podremos reflejar que algunos atributos críticos de los poliedros regulares duales no son atributos críticos del concepto de dualidad de poliedros; como por ejemplo, que los poliedros duales se puedan inscribir uno en otro *indistintamente*, o que podamos colocar los poliedros duales de manera que las aristas de *ambos* sólidos se corten en el punto medio.

Bastan estos dos ejemplos para ver también que, a diferencia de lo que sucede con los poliedros regulares, el poliedro dual de un poliedro arquimediano no es un poliedro de esa misma clase. De hecho, si la dualidad intercambia vértices y caras, de manera que el orden de cada vértice es igual al número de lados de la cara correspondiente, como un poliedro arquimediano tiene caras de distinto número de lados, su dual tendrá vértices de distintos órdenes, con lo que no puede ser arquimediano. Por otro lado, la propia idea de dualidad nos permite ver que, como todos los vértices de un poliedro arquimediano tienen el mismo orden, las caras de su dual serán todas iguales, pero que no serán regulares porque no lo son los polígonos verticiales del arquimediano. De manera que el dual de un poliedro arquimediano tendrá todas las caras iguales, pero no regulares, y vértices de varios órdenes, propiedades que son duales de las que caracterizan a la familia de los poliedros arquimedianos.

En la síntesis que se hace en clase, cabe destacar que, cuando el concepto de dualidad de poliedros se considera en la familia específica de los poliedros regulares, hay atributos críticos que no se cumplen cuando se amplía el mundo con poliedros arquimedianos, por lo que son atributos no críticos del concepto de dualidad en el mundo de los poliedros; son propiedades que no se verifican en todos los poliedros duales, sólo las verifica una subfamilia de éstos: los poliedros regulares duales (véase Guillén, 1991, pp. 135-139).

Análisis del contenido. Búsqueda de relaciones de inscripción entre los poliedros regulares convexos

Como hemos señalado en la presentación, con este enfoque vamos a desarrollar actividad matemática utilizando los conocimientos sobre las simetrías de los poliedros, es decir, vamos a usar en la exploración fenomenológica conceptos matemáticos ya elaborados.

A partir de este enfoque, intentamos determinar diferentes relaciones de inscripción que existen entre los poliedros regulares convexos. Puesto que, de todas las relaciones de inscripción posibles, nos van a interesar aquellas en las que los poliedros están colocados de manera que las simetrías comunes coincidan, si se conocen las simetrías que comparten los pares de poliedros regulares, se pueden establecer de manera sistemática los pares de poliedros platónicos que pueden introducirse uno en otro de manera que las simetrías comunes coincidan (véase el capítulo 5 de Guillén, 1991).

Esto es, como el cubo y el octaedro tienen las mismas simetrías, se podrán inscribir en los mismos poliedros, y también podrán inscribirse en ellos los mismos poliedros. Lo mismo ocurre con el dodecaedro e icosaedro. Además, teniendo en cuenta que el conjunto de las simetrías del tetraedro es un subgrupo del conjunto de las simetrías del cubo y que hay simetrías comunes al cubo y dodecaedro, tetraedro y dodecaedro, se concluye que los siguientes pares de poliedros pueden introducirse uno en otro porque tienen simetrías comunes:

- El octaedro en el cubo y viceversa. El dodecaedro en el icosaedro y viceversa.
- El tetraedro en el cubo y en el octaedro.
- El tetraedro en el dodecaedro y en el icosaedro.
- El cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro en el tetraedro.
- El cubo en el dodecaedro y en el icosaedro.
- El octaedro en el dodecaedro y en el icosaedro.
- El dodecaedro y el icosaedro en el cubo y en el octaedro.

Y si queremos ampliar el problema, podemos plantearnos otras inscripciones de pares de poliedros regulares (véase Guillén, 1991, pp. 90-97), pero este problema está fuera de nuestros propósitos.

EXPERIMENTACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA. ESTUDIO EXPLORATORIO

Como hemos señalado en la presentación, el Modelo de Enseñanza descrito en el apartado anterior lo experimentamos con estudiantes de Magisterio de la Universitat de València. En este apartado comentamos el contexto en el que se realizó la experimentación; asimismo, señalamos cómo se han obtenido los datos en este estudio exploratorio y cómo se han organizado.

Los estudiantes. El desarrollo de las clases

El estudio se desarrolló durante el curso de 1999-2000, tomando como medio un grupo de estudiantes de Magisterio que cursaron la asignatura optativa de 4 créditos "Geometría del espacio", del plan de estudios de la Diplomatura de Maestro de la Universitat de València, de los que una de nosotros era profesora. El número de estudiantes del grupo que asistían regularmente a clase era 20. Los estudiantes estaban organizados en grupos, con 3, 4 o 5 estudiantes por grupo, a elección de los estudiantes.

Al comenzar las clases, para situar el trabajo, presentábamos un resumen acentuando lo que ya se había trabajado en clases anteriores que tenía relación con los problemas que se iban a tratar. En el desarrollo de la clase: *i)* la profesora resolvía algunos problemas expresando verbalmente el proceso de resolución que estaba realizando; *ii)* los alumnos respondían a cuestiones que planteaba la profesora y resolvían algunos problemas que se les planteaba, con la ayuda de sugerencias que les aportaba la profesora; *iii)* las respuestas y las soluciones se discutían en común; *iv)* se hacía una síntesis y un debate de reflexión.

Los estudiantes disponían de los modelos para que pudieran utilizarlos y se implicaran con mayor facilidad en el desarrollo de la indagación. También distribuíamos láminas con dibujos de los modelos estudiados para facilitar que en casa los estudiantes pudieran recordar, comprender, registrar y comunicar lo que se trabajó en clase.

La secuencia de actividades que hemos comentado en el apartado anterior contiene el tipo de actividades que resolvía la profesora y las que se proponen a los estudiantes para que las resuelvan con la ayuda de sugerencias que les aportaba la profesora. Enumerar las sugerencias que se aportaban para cada una de ellas va más allá de los propósitos de este informe. En el anexo 1, indicamos como ejemplo sugerencias que se aportaban cuando los estudiantes lo requerían, al resolver el apartado *b* de la tarea de investigación T-3 del cuadro 3, y la transcripción de un protocolo que refleja cómo se desarrolló una discusión de clase tratando esta actividad.

La recogida de datos

Los instrumentos que se han diseñado en este estudio exploratorio son de varios tipos. Por un lado, se tienen tareas, cuestiones, reflexiones, que se plantean a estudiantes para averiguar cómo responden y con cuáles dificultades se encuentran. También se tienen algunas entrevistas clínicas con enseñanza y se han preparado algunos mecanismos de análisis y clasificación de observaciones.

Así, para averiguar la mayor cantidad posible de información sobre lo que aprenden los estudiantes cuando se utilizan como contexto las relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros, realizamos un análisis de: *i)* las respuestas que dieron por escrito diferentes estudiantes (de los que participaron en la experimentación) a determinadas actividades que se plantearon para que se resolvieran en casa antes de tratarlas en clase; *ii)* las observaciones de clase y las discusiones; *iii)* las sesiones de trabajo; *iv)* las respuestas que dieron los estudiantes de la experiencia a cuestiones que se plantearon después de experimentar una unidad de enseñanza, y *v)* las entrevistas individuales realizadas a algunos estudiantes.

Las actividades que se realizaron en clase se grabaron en video o en cassette. Las que se resolvían en los grupos eran las propuestas para que se trabajaran antes de clase y, cuando los estudiantes ya las habían resuelto, las comparaban con las de sus compañeros.

Las entrevistas realizadas fueron en su mayoría individuales, sólo en algunas los estudiantes intervinieron por parejas, y fueron grabadas en video o en cassette. El estilo era de entrevista semidirigida o dirigida. En general, su objetivo era aclarar respuestas pobres o respuestas que podían tener interpretaciones diferentes. En algunas entrevistas, se pretendía averiguar lo persistentes que son relaciones erróneas que se habían indicado, el lenguaje que se utilizaba para expresarlas y la fluidez y problemas de lenguaje que se tenían para expresar las relaciones. Una vez determinadas algunas dificultades, se diseñaban entonces entrevistas con enseñanza en las que se daban sugerencias.

La selección de los estudiantes para realizar las entrevistas dependió simplemente de circunstancias como si habían resuelto la tarea en casa antes de tratarla en clase o no, si tenían problemas al resolverla en clase o si daban respuestas que nos interesa examinar. Para la determinación del momento de recoger las actividades resueltas por los alumnos, tuvimos en cuenta simplemente que aún no se hubieran resuelto en clase o que se hubieran resuelto con posterioridad a que determinadas actividades sí se hubieran abordado en clase.

Para registrar la información dada en las respuestas de los estudiantes a las tareas o cuestiones planteadas, procedimos de la siguiente manera: cada estudiante tenía asignada una carpeta en la que, por un lado, se depositaban las actividades que el alumno resolvía por escrito antes de que el estudio de éstas fuera tratado en clase y, por otro, se incluían aquellas observaciones que el profesor había escrito al final de algunas clases sobre las respuestas dadas por el alumno en el desarrollo de estas clases.

Para cada actividad, las respuestas de varios alumnos se utilizaban en plan exploratorio y servían además para corroborar lo que ya se había observado con las experiencias previas que realizamos los años anteriores con otros cursos. Para cada uno de estos alumnos y para cada tipo de actividades, en hojas que diseñamos para ello, anotábamos lo más característico de sus respuestas. Las observaciones que hacíamos sobre las respuestas a las actividades y sobre las actuaciones en clase de los estudiantes intentaban responder a las preguntas: ¿Qué hacen? ¿Cómo? ¿Qué posible explicación podemos encontrar para la respuesta dada? ¿En qué tienen dificultades que les llevan a mostrar conductas no competentes? ¿Cuáles sugerencias cabe dar para la enseñanza?

Para los datos recopilados en cintas de video o de cassette, o bien hicimos transcripciones literales (para algunas entrevistas), o bien resúmenes (para las sesiones de clase) que contenían lo destacable de cada sesión. Así pues, conseguimos varios protocolos que constituían el objeto de análisis y también varios resúmenes en los que apuntamos lo que se consideraba relevante (también intentábamos responder a las preguntas anteriores), bien porque confirmaban lo que ya se había observado con las experimentaciones con otros estudiantes, bien porque podían introducirse como algo nuevo que tenía que ser objeto de experimentación.

El esquema de organización de los datos

Para el examen de los datos hemos elaborado una batería de preguntas y de respuestas posibles a ellas. Podemos dividir las preguntas en cuatro grandes grupos, según con respecto a qué se esté interrogando fundamentalmente la actuación de los alumnos.

En el primer grupo, las preguntas se refieren fundamentalmente a las competencias de los alumnos y a sus procesos cognitivos, y son las siguientes:

- ¿Pueden realizar una tarea después de que el profesor ha resuelto una tarea análoga? ¿Pueden resolver las tareas después de haber abordado en clase tareas análogas?
- ¿Con cuáles dificultades se enfrentan al resolver las tareas en grupo o individualmente?
- ¿Cuáles relaciones expresan con fluidez entre sólidos o entre los elementos de los poliedros implicados en el modelo? ¿Cuáles relaciones indican que no son correctas? ¿Cuáles son más usuales? ¿Cuáles persisten a pesar de la instrucción? ¿Cuáles relaciones que existen no mencionan? ¿Pueden hallar relaciones numéricas entre los elementos de los poliedros implicados?
- ¿En cuál nivel (puntual, local o global) realizan la descripción del modelo?
- ¿Para cuáles modelos su descripción en un determinado nivel presenta dificultades? En caso de dificultades, ¿cuáles modelos se han estudiado en el enfoque correspondiente antes que el que se está considerando?
- Si expresan con fluidez una relación entre poliedros o entre sus elementos, ¿se ha trabajado previamente con un enfoque diferente?
- ¿Reconocen que una relación entre poliedros, o entre sus elementos, se ha estudiado ya desde un enfoque diferente?
- Las relaciones que expresan teniendo modelos físicos como soporte, ¿qué ideas reflejan sobre los sólidos o sobre relaciones de inscripción o dualidad de poliedros?
- ¿Ven los poliedros como "partes que se juntan"? ¿Ven los poliedros descompuestos en otros? ¿Ven los modelos inscritos unos en otros? ¿Ven los poliedros relacionados por dualidad?

En el segundo grupo, las preguntas se refieren fundamentalmente a la influencia del contenido y son las siguientes:

¿Para qué tipo de elementos la descripción de un modelo presenta más errores? ¿Cuáles problemas análogos quieren resolver los estudiantes hasta considerar que "Estos problemas todos son iguales"? ¿Qué tipo de descripción, clasificación o prueba presenta más dificultad? ¿Qué tipo de prueba se usa más?

En el tercer grupo, las preguntas se refieren fundamentalmente a los efectos de la actuación del profesor y son las siguientes:

¿Cómo afecta cuando el profesor no actúa resolviendo una tarea expresando su proceso de resolución? ¿Cuáles sugerencias del profesor han ayudado al alumno en la resolución de la tarea y en qué sentido? ¿De qué manera influyen las diferentes representaciones físicas? ¿Qué ocurre al presentar dibujos sin que antes se hayan mostrado los modelos? ¿Siguen teniendo dificultades con los dibujos al no tener los modelos delante?

En el cuarto grupo, las preguntas se refieren fundamentalmente a la transferencia de los procedimientos y son las siguientes:

¿Adaptan el procedimiento utilizado por el profesor a las actividades análogas planteadas para resolverlas? ¿Aplican procedimientos análogos a los estudiados en clase para otras tareas análogas? ¿Son capaces de precisar lo que cambia y lo que permanece en la resolución de tareas análogas? ¿Se aplican los resultados ya obtenidos para encontrar resultados nuevos que se piden o se resuelven las tareas de nuevo sin recurrir a ellos?

Hemos categorizado las respuestas posibles a estas preguntas de una manera que nos permita la organización y análisis de los datos. Mostramos a continuación un ejemplo de esa categorización, a propósito de las preguntas referidas a las actuaciones de los alumnos en las tareas en las que hay que encontrar y expresar relaciones entre pares de poliedros. Mostramos también a continuación, para el mismo ejemplo, la manera de organizar la descripción de los errores.

Categorización de las respuestas:

- No se enuncian las relaciones que existen entre los sólidos correspondientes.
- No se enuncian las relaciones que existen entre los elementos de los sólidos correspondientes.
- Se enuncian de manera muy imprecisa, con fallos o sin fallos, las relaciones que existen entre los sólidos (o entre los elementos) correspondientes. En este caso, anotamos también si la imprecisión proviene de una incorrecta utilización de los sólidos implicados, de los elementos, de otros términos que reflejen relaciones, o de otra fuente.
- Se enuncia de manera incompleta, con fallos o sin fallos. En este caso, anotamos qué es lo que falta. Por ejemplo, en la descripción que un alum-

no hace del tetraedro inscrito en el cubo, anotamos si no ha indicado la relación que existe entre las aristas del tetraedro y las diagonales de las caras del cubo.
- Se enuncia de manera completa, con fallos o sin fallos (o, equivalentemente, en las tareas de juzgar relaciones o descripciones, razona la respuesta de manera completa, con fallos o sin fallos).

Organización de la descripción de los errores:

Una vez anotadas las respuestas erróneas tal y como las enuncian los alumnos, las clasificamos de acuerdo con alguno de los siguientes tipos:

- El papel de los poliedros se ha intercambiado (inscrito por circunscrito, por ejemplo).
- Se refiere a las relaciones que existen entre características de los poliedros implicados. En este caso, anotamos si corresponde a caras, vértices o aristas del poliedro inscrito y con cuál característica del poliedro circunscrito se ha relacionado de manera incorrecta.
- Tiene que ver con datos numéricos.
- Se utilizan de manera imprecisa términos que describen relaciones de posición relativa o incidencia como "sobre", "yace", "se cruzan", "se cortan", "se corresponde" y similares.
- Se utiliza terminología del plano para el espacio o a la inversa.
- Se determina un camino incorrecto de relaciones entre poliedros (también anotamos si el camino es correcto, pero más largo de lo necesario, o si es incorrecto y más largo de lo necesario).
- No se indica el enunciado final que se elabora a partir de una tabla para explicar de qué manera se inscribe un poliedro en otro indicando los elementos que se corresponden.
- Se expresan de manera imprecisa o incorrecta los planos de simetría o los ejes de rotación de alguno de los poliedros implicados. En ese caso, anotamos también los poliedros correspondientes.
- Las relaciones que se indican entre planos de simetría y ejes de rotación de un mismo poliedro contienen errores. En ese caso, anotamos los poliedros correspondientes.
- La determinación de los PS y ER que comparten pares de poliedros contiene errores o es imprecisa. En ese caso, anotamos los pares de poliedros implicados.

Reelaboración del modelo de enseñanza inicial

En este subapartado indicamos de qué manera inciden en el Modelo de Enseñanza inicial los datos de la experimentación.

- La experimentación permite organizar las actividades en diferentes tareas y en diferentes niveles, así como verificar la ordenación propuesta para las actividades que se incluyen en las tareas y el orden en el que se presentan las tareas correspondientes a los diferentes enfoques desde los que se puede tratar el problema.
- La lectura que los estudiantes hacen de las diferentes representaciones de los sólidos y sus ideas erróneas se pueden tener en cuenta sugiriendo en los enunciados de las tareas que se consideren diferentes representaciones físicas y, en algunos casos, indicando el orden en el que se deben introducir las diferentes representaciones.
- La información obtenida sobre los ejemplos, las propiedades y las relaciones que tienen más o menos peso en los objetos mentales de los estudiantes se pueden considerar sugiriendo en las actividades que se consideren unos ejemplos, propiedades o relaciones, u otros.
- Las dificultades y los errores se pueden utilizar para:
  - seleccionar los modelos que se proponen como objeto de descripción o construcción y el orden en el que se hace;
  - seleccionar las propiedades y relaciones entre familias que se incluyen en las tareas propuestas;
  - basar en ellos las sugerencias que se dan para las actividades propuestas.
- Las actividades que resuelve el profesor se pueden incorporar en algunos casos como actividades en cuyos enunciados se indican varias sugerencias; en otros casos, en los comentarios que acompañan a las tareas, se pueden dar referencias que aportan sugerencias para desarrollar en clase la actividad propuesta, y por último, en otros, las sugerencias se pueden indicar en estos comentarios.
- Las discusiones de clase pueden incorporarse como actividad.
- Las actividades que algunos estudiantes no entienden se enunciarán de manera más precisa.
- Diferentes respuestas para las actividades se verán reflejadas:
  - En la manera como se organizan algunos problemas que se plantean como objeto de estudio en diferentes tareas.

- ♦ En modelos de respuesta que se aportan en los comentarios de las tareas.
- ♦ Como soporte de afirmaciones que se señalan, bien conectando resultados obtenidos a partir de diferentes tareas, bien indicando cómo puede desarrollarse en clase la actividad y cómo puede continuarse.
- ♦ En la actividad matemática y en los aspectos de la geometría que se delimitan como que pueden desarrollarse a partir de las tareas propuestas.

- En algunos casos, pueden incluirse como actividad las discusiones que surgen en clase sobre diferentes niveles de análisis y sobre la mayor o menor precisión que implica la construcción de los modelos por los procedimientos señalados.
- Por último, los análisis de las respuestas de estudiantes a las actividades pueden sustentar las hipótesis previas que indicamos en el apartado siguiente.

CONCLUSIONES FINALES: INICIO DE UNA INVESTIGACIÓN POSTERIOR

HIPÓTESIS DE PARTIDA

Indicamos a continuación algunas conclusiones al analizar respuestas de estudiantes a las actividades de los cuadros 1 y 2 (ya avanzadas en Guillén y Puig, 2001), que pueden considerarse como hipótesis de partida de una investigación posterior. Esas hipótesis las referimos a los enfoques "Construir o generar formas", "Formas rígidas y que se deforman" y "Utilizar las conocimientos sobre las simetrías de los poliedros". El uso de este tercer enfoque lo justificamos especialmente por el hecho de que los alumnos con los que se realiza la experimentación estudian para ser docentes.

1. El estudio de las relaciones desde el enfoque de "Construir o generar formas" permite:
   - Precisar y comprender propiedades de determinados sólidos y relaciones entre ellos o entre sus elementos. Así, generar sólidos juntando sólidos y trabajar con determinados puzzles permite explorar relaciones entre el tetraedro y el cubo, el cubo y el dodecaedro, el cubo y determinadas pirámides, etcétera.
   - El intento de describir las formas obtenidas puede ser un incentivo para

desarrollar medios lingüísticos y puede constituir la base para determinar algunas relaciones entre familias de sólidos, entre determinados sólidos o entre elementos del plano y del espacio.
   - Dichas construcciones constituirán también la base para la formación de "ideas ingenuas" de estos sólidos.
2. El estudio de las relaciones desde el enfoque "Formas rígidas y que se deforman" permite:
   - Introducir algunas relaciones entre sólidos o entre sus elementos.
   - Conjeturar otras inscripciones entre poliedros regulares.
   - Plantear nuevas cuestiones sobre inscripción de pares de poliedros.
   - Subrayar la cantidad de relaciones que existen entre contenidos geométricos en el estudio de los sólidos, relacionando los sólidos entre sí o con figuras planas.
   - Expresar estas relaciones de diferentes maneras.
3. Establecer de manera sistemática los pares de poliedros platónicos que pueden introducirse uno en otro de manera que las simetrías comunes coincidan permite comprender la elección que se ha hecho de los modelos soporte para desarrollar la actividad con los otros enfoques. Esto redundará en la competencia de los futuros profesores en la selección sistemática de los modelos adecuados para que en su enseñanza constituyan el soporte para trabajar los procesos matemáticos.

Elementos para un nuevo Modelo de Enseñanza

Un Modelo de enseñanza para los procesos matemáticos en el contexto de las relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares, coherente con los datos obtenidos y con los estudios teóricos anteriores, ha de tener en cuenta, por tanto:

- Los diferentes usos y contextos que dotan a las relaciones de pares de poliedros regulares de sus significados.
- Las representaciones físicas que se pueden utilizar en la enseñanza de las relaciones de inscripción y dualidad de poliedros como soporte para la enseñanza de procesos matemáticos.
- Las características numéricas de los poliedros como fenómenos que requieren una organización.

- Las simetrías de los poliedros regulares como elementos sobre los cuales comenzar el estudio.
- Los diferentes significados que se pueden encontrar en los textos matemáticos sobre conceptos relativos a relaciones de inscripción y dualidad.
- Los diferentes aspectos de la geometría que se pueden abordar con su estudio en los diferentes niveles: el aspecto de la forma, el aspecto constructivo, el aspecto de relación, el aspecto de cálculo, el aspecto de las transformaciones, el aspecto de lenguaje y el aspecto lógico.
- La actividad matemática relativa a procesos matemáticos, resolución de problemas, al estudio de conceptos, de relaciones, sobre el lenguaje geométrico y la utilización de recursos, que puede estar ligada al estudio de relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros.
- Los estudios sobre dificultades y errores que se han determinado con respecto al estudio de relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros.
- Los estudios que se han realizado que aportan información sobre aquellos puntos o aspectos sobre los que se ha de prestar atención cuando se lleva a cabo la instrucción.
- Las sugerencias que se han dado en trabajos previos sobre cómo llevar a cabo la instrucción.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., J.M. Fortuny y R. Pérez (1997), *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Madrid, Síntesis.

Darche, M. y F. Pitou (1984), *Polyèdres dans l'espace*, Col. Les dossiers du Plot, Orléans, Régionale d'Orléans-Tours de l'APMEP.

Filloy, E. y cols. (1999), *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht, D. Reidel.

—— (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, D. Reidel.

Glidden, P.L. y E.K. Fry (1993), "Illustrating Mathematical Connections: Two Proofs That Only Five Regular Polyhedra Exist", *Mathematics Teacher*, vol. 86, núm. 8, pp. 657-661.

Guillén, G. (1991), *El mundo de los poliedros*, Madrid, Síntesis.

Guillén, G. (1997), *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*, tesis doctoral, Valencia, Universitat de València. (Publicada en 1999 en la Collecció: Tesis doctorals en Microfitxes. Valencia, Universitat de València.)

—— (2000), "Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 18, núm. 1, pp. 35-53.

—— (2001), "Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 19, núm. 3, pp. 415-431.

Guillén, G. y L. Puig (2001), "Diferentes enfoques para el estudio de algunas relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares", en F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J.D. Godino (eds.) (2001), *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Almería, SEIEM, pp. 183-188.

Hopley, R.B. (1994), "Nested Platonic Solids: A Class Project in Solid Geometry", *Mathematics Teacher*, vol. 87, núm. 5, pp. 312-318.

Mold, J. (1973), *Solid Models* (de la serie "Topics from Mathematics"), Londres, Cambridge U.P.

Naylor, M. (1999), "The Amazing Octacube", *Mathematics Teacher*, vol. 92, núm. 2, pp. 102-104.

Puig, L. (1996a), "La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora", en L. Puig y J. Calderón (eds.), *Investigación y didáctica de las matemáticas*, Madrid, CIDE, pp. 103-117.

—— (1996b), *Elementos de resolución de problemas*, Granada, Comares.

—— (1997), "Análisis fenomenológico", en L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona, Horsori, pp. 61-94.

Puig, L. y G. Guillén (1983), *Necesidad y experimentación de un nuevo modelo para el estudio de la geometría en la EGB y Escuelas de Magisterio*, Valencia, ICE de la U. Literaria.

Scott, P. (1991), "Model Making without Pain", *Australian Mathematics Teacher*, vol. 47, núm. 3, pp. 10-12.

Treffers, A. (1987), *Three Dimensions (A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction –the Wiskobas Project)*, Dordrecht, D. Reidel.

Wain, G.T. y D. Woodrow (eds.) (1980), *Mathematics Teacher Education Project*, Londres, Blackie.

ANEXO 1

Cuando a los estudiantes se les plantea la actividad "Enunciar relaciones entre el número de elementos de determinados pares de poliedros, entre el número de diferentes elementos de un mismo poliedro, u otras relaciones numéricas que encuentren", después de haber recopilado en una tabla las características numéricas de los poliedros regulares, algunos estudiantes requieren sugerencias que centren la atención en:

i) la representación visual y verbal de relaciones que se observan;
ii) que se enuncien verbalmente las relaciones que se han indicado;
iii) que se señalen o enuncien otras relaciones para el mismo par de poliedros, o relaciones entre otros pares de poliedros.

Ejemplos de este tipo de sugerencias son:

- Unir los números que son iguales.
- Fijarse en los pares de poliedros (o en el poliedro) implicados.
- Hacer enunciados indicando los poliedros y los elementos a los que corresponden los números subrayados.
- Hacer enunciados del tipo: "Los... del poliedro tal... coinciden con las... del poliedro tal..."
- Seguir con ese par de poliedros y tratar de encontrar otras relaciones entre los elementos o entre el tipo de caras y el orden de los vértices.

Transcripción de clase

E1: El seis también está en el tetraedro. En las aristas.
E2 o E3: Las aristas de ellos son las mismas también. Del cubo y del octaedro.
P: Fíjense sólo en el cubo y el octaedro, junten con un segmento los elementos que sean iguales y después den enunciados que indiquen todo lo que podemos apuntar. (La sugerencia que se da se refiere a que se representen las relaciones visualmente y luego que se enuncie verbalmente.)
E4: Sale una cruz y una raya. Las caras son los vértices y al revés. Las aristas son las mismas.
P: Vale, en el cubo y octaedro el número de caras y de vértices se inter-

cambia y el número de aristas coincide. ¿Se puede decir algo sobre el orden de los vértices y el número de lados del polígono de las caras? (El profesor enuncia la relación de manera precisa y dirige hacia relaciones entre el orden de los vértices y el número de lados de las caras.)

E2: También sale en cruz. También se cambia.

E1: En el dodecaedro y el icosaedro también salen dos cruces y una raya para las aristas. Sale lo mismo. Las caras son iguales que los vértices y las aristas las mismas y las caras y los vértices de orden también. (Quiero señalar que en las intervenciones que hacen los estudiantes en las puestas en común, en muchas ocasiones no corrijo la expresión; quiero que la expresión precisa no perturbe otras ideas interesantes que puedan expresar. Es cuando trabajan en las mesas cuando centro atención especial en ello y les aconsejo que una vez que tengan expresada una relación o una propiedad la revisen de nuevo prestando atención ahora en enunciarla de manera precisa.)

P: Fíjense en otro par de poliedros. (Dirijo a relaciones que implican otros poliedros.)

E4: En el tetraedro y en el cubo el 6 está en... Las aristas del tetraedro y las caras del cubo... son las mismas.

P: El número de aristas del tetraedro coincide con el número de caras del cubo. ¿Habíamos visto ya este resultado? (Dirijo ya a que relacionen lo que se hace ahora con lo trabajado en otras clases.)

E4: En el cubo y el dodecaedro también, las aristas del cubo y las caras del dodecaedro... Si ya lo hemos visto en otra clase y al final lo veía, pero yo ahora no me acuerdo. Si no nos lo enseñas otra vez... (Respuesta muy representativa de lo que responden muchos estudiantes.)

DATOS DE LOS AUTORES

Gregoria Guillén
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València, España
Gregoria.guillen@uv.es

Luis Puig
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València, España
luis.puig@uv.es