Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

González, Victor H.; Rodríguez, Mabel A.
Un modelo para evaluar la validación matemática
Educación Matemática, vol. 18, núm. 3, diciembre, 2006, pp. 103-124
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Un modelo para evaluar la validación matemática

Víctor H. González y Mabel A. Rodríguez

Resumen: En este trabajo se presenta un modelo que permite evaluar el aprendizaje alcanzado por estudiantes sobre validación matemática para un contenido matemático prefijado. El modelo consta de criterios y un procedimiento para llevar a cabo esta evaluación. Presentamos aquí los criterios y el procedimiento, y mostramos un ejemplo en el que hemos utilizado el método para evaluar estudiantes de un curso preuniversitario en contenidos de álgebra y proporcionalidad directa.

Palabras clave: evaluación, validación matemática, estudiantes preuniversitarios.

Abstract: In this work we present a model that allows us to assess the knowledge about mathematical validation of students for a certain mathematical content. The model consists of criteria and a procedure to carry out this evaluation. We display here: the criteria, the procedure and we show an example in which we have used the method to evaluate students of a pre-university course in contents about algebra and direct proportionality.

Keywords: evaluation, mathematical validation.

1. PLANTEO DEL PROBLEMA

El problema que presentamos continúa la línea de estudio comenzada en Falsetti *et al.* (2004). En dicho artículo se inició un estudio de la validación en Matemática en situación de aprendizaje que contempló aspectos teóricos y un recorrido por el uso que han dado a la noción de validación diversos autores, tales como Balacheff (1987, 1999); Brousseau (1997), Godino y Recio (1997) y Herbst (1988), entre otros. La influencia de las teorías de estos autores en este trabajo se manifiesta a través del uso y ampliación del marco teórico de Falsetti *et al.* (2004) que tomamos como punto de partida para este artículo.

Adoptamos la definición que allí se elabora, considerando que

Fecha de recepción: 30 de junio de 2005.

> un sujeto en situación de aprendizaje valida un conocimiento matemático si es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido. Al manifestar sus razones debe hacer explícita la asignación de sentidos de los objetos matemáticos que manipula y ésta debe corresponderse con significados matemáticos aceptados por la Institución Matemática. (Para detalles sobre la *Institución Matemática,* véase por ejemplo Godino y Batanero, 1994).

Nos hemos planteado el problema de evaluar en un sujeto su estado en el aprendizaje de la validación matemática para un cierto contenido, que en este trabajo llamaremos para simplificar *estado en validación* de un estudiante (para dicho contenido). Consideramos que el problema tiene interés, ya que la validación matemática es una habilidad compleja, central en la Matemática, y que su dominio va permitiéndole a un estudiante adquirir paulatinamente autonomía en su aprendizaje, cuestión importante de tener en cuenta en cualquier proceso formativo. Además, consideramos que para la práctica docente es valioso contar con un instrumento que permita evaluar el estado en validación en el que se encuentran los estudiantes, así como identificar cambios en las habilidades vinculadas con la validación que ellos manifiestan en sus producciones de modo de poder orientar al estudiante, indicándole en cuáles aspectos debe mejorar o completar su aprendizaje.

A fin de permitirle al lector un acercamiento a los problemas con los que se enfrenta un evaluador (docente o investigador) al querer evaluar el estado en validación de un estudiante, incluimos a continuación dos ejemplos que siguen la línea de los desarrollados en Falsetti *et al*. (2004).

Ejemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$

Un alumno resuelve diciendo que *"es claro que* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$*"*. Si no explica sus razones, el docente puede admitir como correcta su respuesta. En el momento de exigirle la explicación, el alumno argumenta que *"0 sobre 0 es igual a 0"*. De manifestarse esta explicación, el profesor no tendría dudas de que el alumno no ha validado el conocimiento puesto en juego. Éste es un caso en el que se evidencia la necesidad de contar con la dimensión explicativa para evaluar a un alumno en validación matemática.

Cuando, como en este ejemplo, el resultado obtenido es correcto desde el punto de vista matemático, pero fue obtenido por un medio no válido desde la Matemática, es más difícil de ser detectado por el docente, pues no se hubiera manifestado de no incluirse la explicación.

En el caso en el que el resultado es matemáticamente incorrecto, es más simple para el docente detectar una falla en la validación. Mostramos a continuación un ejemplo de esto donde algunos estudiantes, seguros de la validez de sus afirmaciones, convencieron a otros estudiantes del curso con sus argumentos.

Ejemplo 2: El docente propone a un grupo de estudiantes (en el nivel secundario) comparar (respecto del orden) los racionales $0.\widehat{9}$ y 1, y justificar la decisión tomada.

Distintos estudiantes resolvieron el problema de diversas maneras. Entre ellas mencionamos las siguientes explicaciones elaboradas por distintos estudiantes del curso:

- *" $0.\widehat{9}$ es menor que 1 pues la parte entera de $0.\widehat{9}$ es cero, que es menor que la parte entera de 1, que es uno."*
- *" $0.\widehat{9}$ es el anterior a 1, que más allá de contar con infinitas cifras decimales, el $0.\widehat{9}$ no llega a ser el 1, no llega a 1."*

Otros estudiantes, que no habían podido resolver el ejercicio, quedaron convencidos ante las explicaciones de sus compañeros.

En cualquiera de los casos, los estudiantes que dieron estas explicaciones tienen un procedimiento que son capaces de manifestar y sostener en un ámbito social e incluso son capaces de convencer a otros estudiantes de la validez de sus afirmaciones.

Algunas de las preguntas que originaron el problema de la investigación que comunicamos aquí son: ¿cómo evaluar el aprendizaje de un alumno sobre validación matemática?, ¿cómo llevar a la práctica el modelo teórico descrito en Falsetti *et al*. (2004)?, ¿cómo determinar el estado en validación sobre un cierto contenido en un determinado momento de la enseñanza?, ¿a partir de qué instrumento se puede obtener información para saber cómo guiar a un estudiante para que evolucione en su estado de validación?, ¿se puede medir la evolución del aprendizaje en validación de un estudiante para distintos contenidos matemáticos?, entre otras.

Proponemos un modelo que permite identificar dicho estado y le brinda información al docente para orientar al estudiante en cómo avanzar en esta cuestión.

2. MARCO TEÓRICO

Como hemos anticipado, tomamos como punto de partida el trabajo de Falsetti *et al*. (2004) y adoptamos la definición que allí se elabora y que presentamos antes. En el mismo trabajo se presenta un cuadro que sintetiza la confluencia de, por un lado, la escritura matemática (significantes) con la explicación asociada a dicha escritura y, por el otro, el grado de corrección (en la producción) desde el punto de vista matemático. En ella los matices de grises indican el nivel de corrección matemática alcanzado junto con el nivel logrado en las elaboraciones, de modo que la conjunción de las dos celdas de la esquina inferior derecha, señalada por el color negro, indica una elaboración acabada en el sentido de que –por ejemplo en una tarea asignada– la resolución presentada es suficiente para garantizar la validez desde el punto de vista de lo matemáticamente correcto.

Tabla de grises

	Nivel inicial (intuiciones, creencias, sospechas, anticipaciones, etc.)		Nivel intermedio (primeras concreciones, producción incipiente, incompleta, etc.)		Nivel terminal (elaboraciones acabadas)	
	Significantes matemáticos[a]	Explicación[b]	Significantes matemáticos	Explicación	Significantes matemáticos	Explicación
N i v e l e s	Esta columna, en este nivel inicial, no puede evidenciarse					

[a] *Significantes matemáticos:* entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática.
[b] *Explicación:* escrita u oral en lengua estándar o en lenguaje matemático.

En la primera columna, denotada *niveles*, se elige la cantidad de niveles deseados para evaluar lo correcto (desde el punto de vista matemático). Por ejemplo, si se consideran tres niveles "incorrecto", "regular" y "bien", el cuadro resulta:

	Nivel inicial (intuiciones, creencias, sospechas, anticipaciones, etc.)		Nivel intermedio (primeras concreciones, producción incipiente, incompleta, etc.)		Nivel terminal (elaboraciones acabadas)	
	Significantes matemáticos[a]	Explicación[b]	Significantes matemáticos	Explicación	Significantes matemáticos	Explicación
Incorrecto						
Regular						
Bien						

[a] *Significantes matemáticos:* entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática.
[b] *Explicación:* escrita u oral en lengua estándar o en lenguaje matemático.

Para describir el aprendizaje de un sujeto sobre validación, debemos analizar:

a) las acciones que realiza el sujeto,
b) lo que comunica simbólica y coloquialmente, y
c) el grado de proximidad con lo matemáticamente correcto.

En el trabajo recién mencionado, se presenta un amplio recorrido de los distintos usos y acepciones del concepto *validación* que diversos autores han utilizado. Sintetizamos muy brevemente aquí algunos aspectos. La validación raramente se encuentra definida, suele ser tomada como noción primitiva, tiene múltiples acepciones y hace referencia a situaciones, procesos o herramientas de validación según el autor y el contexto. Una de las más difundidas es la conocida *situación de validación* enmarcada en la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1997), que forma parte de las situaciones adidácticas de la teoría. En ella, el estudiante debe manifestar las razones que justifican sus afirmaciones y debe estar dispuesto a defenderlas con intención de convencer al grupo de pares. Balacheff (1987, 1991, 1997) amplía las características de la situación de validación y la considera como una situación de decisión en la que se pone en juego una puesta en común donde se debaten las decisiones tomadas y se manifiesta la necesidad de garantizar su validez o la de denunciar que no se está de acuerdo con los argumentos del otro. El mismo autor propone una clasificación de tipos de pruebas. Las pruebas, la argumentación, la refutación y la toma de conciencia de la existencia de contradicciones son parte de lo que él llama *proceso de validación*. Herbst (1988) trabaja con *herramientas de validación* para estudiar cuáles actividades son usadas como pruebas en la clase de matemática. Aparte de los procedimientos deductivos, menciona otros no deductivos, tales como el ejemplo aislado, la ostensión, la analogía y la metáfora.

También destacamos que algunos autores resaltan una dimensión comunicacional de la validación, pues en algunos casos, se debe convencer al grupo de pares, en otros, no queda claro quién valida y, en otros, la interacción social es crucial en este proceso. No queda claro que lo validado deba ser matemáticamente correcto. Finalmente, otros autores resaltan el formato de "prueba matemática", como si la validación se circunscribiera a la elaboración de una demostración matemática. En este caso, elaborar conjeturas, discutir y comunicar no forman parte de la validación. La otra postura, más amplia, considera que elaborar conjeturas, discutir, etc., forma parte de la validación o del proceso de validación.

Tomamos de Falsetti (2004) el listado de acciones observables que intervienen en el proceso de aprendizaje de la validación y son parte de las cuestiones que darán pautas para conocer el estado en validación de un estudiante. Usamos para ellas la misma notación, es decir:

ACCIONES:

A1 Hacer ensayos o intentos.
A2. Usar fórmulas o procedimientos desconectados de la actividad por resolver.
A3 Usar fórmulas o procedimientos conectados a la actividad por resolver.
A4. Generalizar inductivamente (observar alguna regularidad).
A5. Enumerar ambigüedades.
A6. Ejemplificar.
A7. Anticipar, predecir.
A8. Elegir entre varias opciones dadas, justificando su elección.
A9. Encontrar analogías.
A10. Describir (mostrar pasos y procedimientos).
A11. Ejemplificar mostrando regularidades.
A12. Imitar (reproducir una estructura de razonamiento o procedimiento).
A13. Explicar (dar razones y relaciones).
A14. Comparar (establecer semejanzas y diferencias).
A15. Justificar por la "autoridad" (libro, docente, par experto).
A16. Reconocer contradicciones.
A17. Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen.

A18. Enunciar la negación de una regla, propiedad, etcétera.
A19. Identificar condiciones en las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas.
A20. Derivar conclusiones con premisas dadas.
A21. Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y derivar una conclusión).
A22. Reconocer qué le resulta suficiente para garantizar la validez de un conocimiento.
A23. Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez).

En Falsetti *et al.* (2004) se dan ejemplos de posibles manifestaciones de las acciones *A1-A23,* enmarcadas en la resolución de distintas actividades matemáticas. Cabe destacar que necesariamente se pondrán de manifiesto algunas de estas acciones ante la resolución de una actividad que atienda a la validación matemática para un cierto contenido específico. El uso de ellas depende, por un lado, de la estructura lógica de la proposición o cuestión que va a ser validada (no es lo mismo validar una proposición cuantificada con un cuantificador existencial que con el universal, las acciones por realizar son diferentes) y, por el otro, de las herramientas y el conocimiento que el estudiante dispone. En este caso, dependiendo de dicho contenido o de la actividad seleccionada, una u otra acción puede llegar a ser más o menos relevante para la validación y más o menos compleja. Por ejemplo, para la acción *A6* (*ejemplificar*) si el contenido es números racionales y la actividad matemática consiste en "encontrar números racionales entre 0.12 y 0.13", la complejidad es sin duda menor que si el contenido fuera el mismo, pero la actividad fuera "encontrar números racionales entre $\frac{\sqrt{0.12}}{7}$ y $\frac{\sqrt{0.13}}{6}$". Respecto de la relevancia, una acción puede o no ser suficiente, y luego relevante, para garantizar la validez del conocimiento. Si la validez de un enunciado se confirma mediante un ejemplo (proposición planteada con un cuantificador existencial), la aparición de la acción "ejemplificar" en la resolución propuesta por el estudiante es relevante, pues sin ella no validará el conocimiento. En cambio, si la validez de un enunciado debe probarse por otras vías, de manera genérica (pues el cuantificador involucrado es universal), el ejemplificar es un acercamiento a la validación, pero no es suficiente ni relevante en el sentido de que el estudiante no probará la validez del enunciado realizando esta acción. Para clarificar esto mencionamos:

a) Decidir si es verdadero o falso que existen números racionales entre 0.12 y 0.13 (relevante el uso de *A6*)
b) Decidir si es verdadero o falso que la suma de dos números pares es par (no relevante el uso de *A6*).

Nos interesa aquí fundamentar el uso que damos a estas acciones. En principio, consideramos que este listado se muestra lo suficientemente rico como para ser tenido en cuenta al evaluar el estado en validación matemática de un estudiante. Entendemos que la numeración dada a dichas acciones no presupone ni jerarquía ni gradualidad, ya que la forma de utilización de éstas siempre está ligada a un contenido matemático y a la actividad particular por resolver. Es claro también que su uso está vinculado a otros factores, como por ejemplo, el desarrollo intelectual o la capacidad de autonomía. No consideramos aquí estos otros condicionantes, ya que no son susceptibles de ser controlados por el docente, como sí lo son la elección del contenido y de la actividad matemática propuesta al estudiante.

Observamos que podría considerarse que *"ejemplificar"* es parte de *"usar fórmulas o procedimientos conectados a la actividad por resolver"* o bien que *"ejemplificar mostrando regularidades"* podría considerarse un caso de *"ejemplificar"*, pero lo valioso que resaltamos de este listado es justamente que permite pensar en estas acciones de manera más refinada y no englobada dentro de una categoría mucho más general que pierde información de lo que el estudiante es capaz de realizar.

3. MÉTODO UTILIZADO

De acuerdo con el marco teórico, para evaluar el estado en validación de los estudiantes, tenemos necesariamente que tener disponible una resolución escrita que dé cuenta del uso adecuado de simbología matemática, a lo que debe agregársele una explicación, ya sea escrita u oral, que informe sobre la asignación de significados llevada a cabo sobre los símbolos matemáticos.

Describimos a continuación lo que a nuestro criterio es el aporte fundamental de este trabajo: un modelo para analizar los resultados de una prueba matemática con el propósito de describir el estado en validación de un estudiante.

Diseño del instrumento de evaluación

La evaluación que se propone consta de una prueba escrita sobre cualquier contenido específico, que necesariamente debe contener ítems en los que se solicite explícitamente incluir las explicaciones, en lenguaje coloquial, de todas las resoluciones presentadas. La dimensión explicativa puede manifestarse tanto en forma escrita como oral, de modo que otra forma posible de evaluación es diseñar la prueba escrita y luego mantener una entrevista con el estudiante, con la que se puede tener información sobre esta dimensión. El modelo de análisis es independiente de la modalidad de explicación elegida, así como del contenido seleccionado. Para ejemplificar, en la sección 4 consideramos una prueba escrita según la primera opción.

Respecto del diseño de la prueba

Se diseña una prueba escrita con ciertos contenidos específicos. Cada ejercicio de la prueba tiene asociado lo que hemos llamado un *umbral de validación*, determinado por las acciones que mínimamente deben ser utilizadas para que ese ejercicio esté matemáticamente bien resuelto. Una acción puede aparecer *n* veces si se establece que es necesario que se evidencien *n* ocurrencias de ella para considerar que la resolución es correcta. Ejemplificamos esto en la sección 4.

Una manera de diseñar la prueba es involucrar intencionalmente los aspectos que se deseen evaluar, teniendo en cuenta que éstos deben ser requisito para la resolución correcta del ejercicio.

Respecto del análisis de la prueba

Para analizar las resoluciones de la prueba, lo primero que hacemos es determinar el puntaje que se le asignará a la ocurrencia y a la no ocurrencia de cada acción, valor tomado de una escala numérica que responde a ciertos criterios fijados por el evaluador. Nuestra escala y los criterios se presentan en "Criterios para determinar los puntajes de la tabla".

Este puntaje se presenta en un cuadro en el que quedan explícitos, al asignarle a cada celda un número, los puntos que el estudiante obtiene para cada una de las acciones del umbral de validación (en las actividades de la evaluación), atendiendo a las cuestiones referidas a la escritura y a la explicación, conjuntamente con el grado de lo matemáticamente correcto en cada una de ellas.

La tabla propuesta tiene el siguiente formato:

Cuadro 1. Formato de la tabla numérica propuesta

Escribe \ Explica	Bien	Regular	Mal	No hace
Bien				
Regular				
Mal				
No hace				

Por ejemplo, si en la corrección de una de las acciones del umbral de validación para un ejercicio, un estudiante escribe su resolución correctamente desde el punto de vista matemático pero la explicación que da es matemáticamente incorrecta, el estudiante tendrá el puntaje que se encuentre en el lugar "fila 1, columna 3" de la tabla.

Criterios para definir los puntajes de la tabla

Los criterios que hemos utilizado son los siguientes:

a) proponemos una escala de −10 a 10.

Consideramos que un valor positivo refleja un buen estado en validación, incluidos el nivel *medio,* que corresponde a valores no negativos y menores que 5, y el nivel *avanzado,* indicado por valores a partir del 5. Asimismo, un valor negativo refleja un estado desfavorable en validación, es decir, que el estudiante todavía no ha logrado un aprendizaje sólido sobre la validación. El rango de valores entre −5 y 0 lo llamamos nivel *bajo,* mientras que los menores que −5 corresponden al nivel *incipiente,* en el que el estudiante responde de manera incorrecta tanto en su escritura matemática como en la explicación que asocia.

De este modo consideramos la graduación del cuadro 2:

Cuadro 2. Determinación de los niveles de validación asociados a la escala numérica

Nivel / Rango	Incipiente	Bajo	Medio	Avanzado
	[–10, –5)	[–5, 0)	[0, 5)	[5, 10]

b) *la asignación de valores numéricos no es simétrica, en particular* $a_{ij} > a_{ji}$ *para* $i > j$ siendo a_{ij} la celda correspondiente a la fila i y columna j de la tabla numérica.

Como hemos señalado en uno de los ejemplos presentados, nos preocupa el hecho de que, teniendo la resolución simbólica correcta desde el punto de vista matemático, la explicación dada no sea adecuada y se evidencie una falla conceptual. Por otra parte, si el estudiante es capaz de explicar una resolución y no puede expresarla simbólicamente, él puede dejar sentado coloquialmente su razonamiento y presentaría así una buena aproximación a la resolución acabada del ejercicio planteado. Por estas razones, se asigna mayor puntaje a la explicación respecto de la resolución simbólica.

Como el hecho de "no explicar" no nos da información que nos permita con cierta certeza describir su estado en validación, *en la tabla se verá como una situación* no favorable, por ello:

c) la columna y la fila "no hace" tienen valores negativos, así como también cuando escriba o explique bien, asignándose cada vez un valor menor si la escritura es regular, mal o no escribe.

El caso "escribe y explica bien" tiene asignado el mayor valor, así como el caso en que "no escribe y no explica" tiene el menor valor, porque no se tienen datos para poder interpretar su estado en validación. De este modo:

d) la celda a_{11} tiene 10 puntos y la celda a_{44} tiene asignado -10 puntos.

Por otra parte, es razonable considerar que cada fila tenga asignado un valor correspondiente mayor que la siguiente fila, ya que se evalúa de manera ordenada de "bien" a "no hace" de manera decreciente, de modo que:

e) *vale en todos los casos* $a_{ij} > a_{i+1\,j}$.

Consideramos que, si un alumno resuelve una diversidad de ejercicios y obtiene una nota de cada celda de la tabla, su aprendizaje sobre validación es inestable, en el sentido de que en algunos casos resuelve correctamente –en su escritura y explicación–, en otros lo hace mal –en ambas dimensiones– y en otros combina buena escritura/explicación con mala explicación/escritura. Por esta razón:

f) la suma de todos los valores de la tabla numérica da 0.

Finalmente, para facilitar la interpretación posterior de los resultados, decidimos que:

g) no se repitan los valores numéricos asignados entre distintas celdas.

Consideramos que sería adecuado que los valores de la tabla tengan una clara correspondencia con los niveles del cuadro 2, de modo que:

h) en la tabla quedan determinadas regiones que responden a cada uno de estos niveles, correspondiéndose el promedio de la región con un valor de cada nivel.

La distribución de valores se dará en las siguientes regiones (cuyos tonos de gris corresponden a los del cuadro 2), como se muestra en el cuadro 3:

Cuadro 3 Regiones correspondientes a los distintos niveles de validación

Escribe / Explica	Bien	Regular	Mal	No hace
Bien				
Regular				
Mal				
No hace				

Una distribución posible de valores, que es la que hemos utilizado, se vuelca en la tabla numérica siguiente:

Tabla numérica

Explica \ Escribe	Bien	Regular	Mal	No hace
Bien	10	7	3	–3
Regular	9	5	1	–4
Mal	4	2	–5	–9
No hace	–1	–2	–7	–10

Con la tabla numérica establecida, el evaluador corrige las pruebas llevando registro de los puntajes obtenidos. Para ello resulta práctico establecer una tabla de corrección (véase ejemplo en la sección 4), en la que se vuelquen los puntajes por aspecto y por ejercicio.

Respecto de la interpretación de los resultados del análisis para evaluar el estado en validación de un estudiante

El análisis que proponemos para determinar el estado en validación de cada alumno consiste en hacer una lectura conjunta del promedio y el desvío obtenidos en la prueba. Estos promedios y desvíos se obtienen a partir de las notas asignadas, usando la tabla numérica para cada uno de los aspectos del umbral mínimo para cada ejercicio. Para hacer esta lectura conjunta volvemos a considerar la escala del cuadro 2.

A partir de ella se hace una primera distinción de "regiones" según el promedio, como indica la tabla 1 siguiente.

En función del promedio del estudiante en la prueba, se lo ubica transitoriamente en una celda de esta tabla. Se ajusta la posición en la tabla, tanto de grado como de nivel, según el valor del desvío. Consideramos que si el desvío tiene un valor "bajo", su nota promedio es un valor confiable en el sentido de que representa "fielmente" su estado en validación. En este caso, la ubicación en la tabla 1, dada por el promedio, es la definitiva. Si, en cambio, el valor del desvío es "grande", consideramos que su estado en validación no está representado por el prome-

Tabla 1 Tabla de ubicación según el promedio obtenido en la prueba

Grados de lo matemáticamente correcto	Nivel incipiente $-10 \leq$ Prom* < -5	Nivel bajo $-5 \leq$ Prom < 0	Nivel medio $0 \leq$ Prom < 5	Nivel avanzado $5 \leq$ Prom ≤ 10
Incorrecto	Que un estudiante esté ubicado en esta columna es suficiente información respecto de su estado en validación, por ello no se hace mayor distinción de rangos.	[-5; -4)	[0; 1)	[5; 6)
Regular		[-4; -2)	[1; 3)	[6; 8)
Bastante bien		[-2; -1)	[3; 4)	[8; 9)
Bien		[-1; 0)	[4; 5)	[9; 10]

* Con Prom nos referimos al promedio obtenido en la prueba.

dio. En este caso, proponemos ajustar la ubicación en la tabla 1, haciéndola decaer un nivel o un grado de la posición transitoria. En el cuadro que sigue se hace explícito el criterio utilizado asignándose valores para los rangos del desvío.

Cuadro 4 Criterio para ajustar la posición que determina el estado en validación de un estudiante, en función del desvío obtenido en la prueba

Rango para el desvío	Interpretación: la posición dada por el promedio
[0 ; 4)	es confiable.
[4 ; 6)	decae en un grado
Más de 6	decae en un nivel manteniendo el grado

De esta manera, se tiene para cada estudiante una posición definitiva en una celda de la tabla 1.

4. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Incluimos aquí, a modo de ejemplo, la evaluación de un grupo de once estudiantes de un curso preuniversitario de Matemática.[1] Se diseñó una prueba sobre

[1] Curso de Aprestamiento Universitario de la Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

contenidos de álgebra y proporcionalidad directa. Ésta consta de cuatro ejercicios (véase anexo) y la explicación fue parte de ella. El criterio de selección de los ejercicios fue que éstos admitieran distintos abordajes posibles, de modo que, para resolverlos, el estudiante pudiera poner en práctica variada cantidad de acciones de las referidas a validación.

Hemos determinado el umbral de validación de cada ejercicio según se indica a continuación.

Para ilustrar el método hacemos explícito el umbral de validación para el ejercicio *1* ítem *a*.

Ejercicio 1 (véase ejercicio completo en el anexo)

Se tiene un recipiente cilíndrico vacío. Se sabe que, por cada dos vasitos de agua vertida en él, la altura asciende 10 cm. Responder:

a) Las magnitudes cantidad de vasitos y altura del líquido, ¿son directamente proporcionales? ¿Por qué?

El umbral de validación para el ejercicio *1.a* es la acción *A20*: *Derivar conclusiones con premisas dadas*, ya que se considera que el ejercicio está matemáticamente bien si los estudiantes son capaces de concluir que el comportamiento de la relación funcional dada por la altura del líquido en función de la cantidad de vasitos vertida es de proporcionalidad directa a partir de los datos (premisas) dados. Por ejemplo, establecen como premisas que: el recipiente es cilíndrico, que al no agregarse agua, la altura del líquido es nula, y que cada vez que agregue dos vasitos de agua, la altura ascenderá 10 cm. Con tales premisas, el estudiante deriva, como conclusión, que las magnitudes cantidad de vasitos y altura del líquido son directamente proporcionales.

Para cada uno de los ítems *b.i, b.ii* y *b.iii*, el umbral de validación es *A3* (usar fórmulas o procedimientos conectados a la actividad por resolver). De modo que se evalúan tres ocurrencias de la acción *A3*.

Para los ejercicios siguientes, mencionamos, sin mayor detalle, el umbral de validación.

EJERCICIO 2

a) *A3*. Usar fórmulas o procedimientos conectados a la actividad por resolver.
b) *A6*. Ejemplificar.

EJERCICIO 3

A19. Identificar condiciones en las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas.
A21. Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y derivar una conclusión).

EJERCICIO 4

A17. Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen.
A6. Ejemplificar.

La tabla de corrección quedó determinada como se indica en el cuadro 5:

Cuadro 5 Tabla de corrección de la prueba que evidencia las acciones que conforman el umbral mínimo de cada ejercicio

Acciones de validación	Ejercicio	Prueba	
		Álgebra	Proporcionalidad directa
A17	4		
A21	3		
A19	3		
A6	4		
A3	2.b		
	1.b.i		
	1.b.ii		
	1.b.iii		
	2.a		
A20	1.a		

Los trabajos de los estudiantes se corrigieron utilizando la tabla numérica y se volcaron los resultados para cada alumno en la tabla de corrección.

Luego, se calcularon los promedios y desvíos de cada estudiante y se obtuvieron los resultados indicados en el cuadro 6:

Cuadro 6 Valores de los promedios y desvíos obtenidos en la prueba para cada alumno

Alumno 1 (AL 1)	
Promedio	6.2
Desvío	5.8275209
Alumno 2 (AL 2)	
Promedio	4.2
Desvío	7.6
Alumno 3 (AL 3)	
Promedio	8.5
Desvío	2.90688837
Alumno 4 (AL 4)	
Promedio	–0.1
Desvío	8.3958323
Alumno 5 (AL 5)	
Promedio	4.6
Desvío	7.6183988
Alumno 6 (AL 6)	
Promedio	6.2
Desvío	6.0794737
Alumno 7 (AL 7)	
Promedio	3.2
Desvío	6.19354503
Alumno 8 (AL 8)	
Promedio	5
Desvío	7.74596669
Alumno 9 (AL 9)	
Promedio	–0.1
Desvío	8.15414005
Alumno 10 (AL 10)	
Promedio	9.8
Desvío	0.4
Alumno 11 (AL 11)	
Promedio	6.5
Desvío	5.93717104

De este modo, el cuadro 7 refleja la ubicación de cada alumno en un nivel y grado, en función de los valores del promedio y desvío, según lo explicado antes.

Cuadro 7. Ubicación de los alumnos en nivel y grado, en función de los puntajes obtenidos en la prueba

Grados de lo matemáticamente correcto	Nivel incipiente $-10 \leq \text{Prom} < -5$	Nivel bajo $-5 \leq \text{Prom} < 0$	Nivel medio $0 \leq \text{Prom} < 5$	Nivel avanzado $5 \leq \text{Prom} < 10$
Incorrecto			AL 8	AL 1, AL 11
Regular			AL 6	
Bastante bien	AL9	AL 7		AL 3
Bien	AL4	AL 2, AL 5		AL 10

El siguiente cuadro brinda el estado en validación de cada estudiante según la interpretación de los resultados de la prueba.

Cuadro 8 Estados en validación de los estudiantes según resultados de la prueba

	Alumnos	Nivel incipiente	Nivel bajo	Nivel intermedio	Nivel avanzado
Grupo 1	AL 2		X		
	AL 4	X			
	AL 5		X		
	AL 7		X		
	AL 9	X			
Grupo 2	AL 6			X	
	AL 8			X	
Grupo 3	AL 3				X
	AL 1				X
	AL 10				X
	AL 11				X

De la lectura del cuadro, se tiene que los integrantes del grupo 1 poseen un estado en validación que corresponde a un nivel incipiente o bajo. Los integrantes del grupo 2 poseen un estado en validación intermedio y los del grupo 3 un estado en validación avanzado.

Características del grupo 1: los estudiantes poseen una escritura o explicación escasa o nula. Cuando hay registro escrito de lo realizado, está matemáticamente incorrecto.

Características del grupo 2: los estudiantes dejan registro de su resolución en símbolos y de la explicación de lo realizado. En sus registros se evidencia un dominio bueno o regular de la escritura matemática, acompañado con una explicación matemática incorrecta. Otra característica posible es que, en sus registros, se evidencie una escritura en símbolos matemáticamente incorrecta, pero con una explicación buena o regular.

Características del grupo 3: los estudiantes dejan registro, en su resolución, de un manejo bueno o regular tanto de la escritura en símbolos como en la explicación de lo realizado.

5. CONCLUSIONES

El hecho de conocer el estado en validación de un estudiante vía el modelo propuesto nos permite, además, reconstruir el origen de sus dificultades, analizando para cada aspecto la nota obtenida (pues se dispone de dicha información en el cuadro 7). De este modo, el docente dispone de una herramienta que le permite tener en claro cómo orientar al estudiante en su proceso de aprendizaje de la validación matemática, pudiendo indicarle en cuáles dimensiones –simbólica o explicativa– tiene mayores dificultades, lo que, a su vez, le permite reorganizar su trabajo de enseñanza de la Matemática. Consideramos que el modelo aquí expuesto puede ser utilizado con cualquier contenido matemático, ya que según nuestra concepción de la Matemática, la validación es constitutiva de esta ciencia. Este hecho da flexibilidad al docente, quien puede adaptar el modelo a los contenidos de su curso.

A nuestro entender, quedó expuesta la viabilidad del modelo, ya que fue utilizado en el transcurso de un curso preuniversitario de Matemática, el cual no sufrió ninguna alteración respecto de la organización previa (contenidos, metodología de enseñanza, forma de evaluación, cronograma, etc.). Respecto de la aplicabilidad, por una parte, contamos, con los resultados para el curso presentado y, por la otra, actualmente este modelo está siendo utilizado en el desarrollo de otro proyecto de investigación como instrumento para comparar estados en validación de estudiantes en distintos momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje. En dicho proyecto, se ha planteado como objetivo tener información sobre la evolución en el aprendizaje de esta competencia –la validación matemática– según diferentes modalidades de enseñanza implementadas.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos las sugerencias de los árbitros, con las cuales consideramos que se ha logrado una mayor claridad en la presentación del trabajo.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (1987), "Processus de preuves et situations de validation", *Educational Studies in Mathematics*, Francia, vol. 18, núm. 2, pp. 147-176.

—— (1991), *Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Teaching Mathematical Proof. Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Dordrecht, Kluwer Academic Publisher, pp. 175-192.

—— (1999), "Treatment of Refutations: Aspects of the Complexity of a Constructivist Approach of Mathematics Learning", en E. von Glasersfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publisher, pp. 89-110.

Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathématiques*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, Mathematics Education Library, vol. 19.

Falsetti, M., T. Marino y M. Rodríguez (2004), "Validación en Matemática en situación de aprendizaje", *Memorias del VI Simposio de Educación Matemática*, Buenos Aires, Argentina.

Godino, J. y M.C. Batanero (1994), "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, núm. 3, pp. 325-355.

Godino, J. y A. Recio (1997), "Significado de la demostración en educación matemática" [Meaning of proofs in mathematics education], en E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21th International Conference of PME*, Lahti, Finlandia, vol. 2, pp. 313-321.

Herbst, P. (1988), *What Works as Proof in the Mathematic Class?*, tesis de Doctorado, University of Georgia, Athens.

ANEXO: LA PRUEBA MATEMÁTICA

CONSIGNA GENERAL

Para cada uno de los cuatro ejercicios que se dan a continuación, responde a las siguientes consignas:

- Resuelve la actividad como si fuera un ejercicio de un parcial. Incluye las justificaciones que consideres necesarias.
- Explica lo que hiciste para resolverlo y por qué lo hiciste, como si fuera una explicación dada a un compañero que no entiende.
- Si no te salió el ejercicio:
  a) Por favor indica las razones: si no te resulta claro el enunciado, si hay alguna fórmula que necesitas y no recuerdas, etcétera.
  b) Por favor, escribe lo que pensaste, aunque sepas que no es la resolución del ejercicio.

1. Se tiene un recipiente cilíndrico vacío. Se sabe que por cada dos vasitos de agua vertida en él, la altura asciende 10 cm. Responde:
   a) Las magnitudes cantidad de vasitos y altura del líquido ¿son directamente proporcionales? ¿Por qué?
   b) Considerando los pares (x, y), donde x es la cantidad de vasitos e y es la altura del líquido en el recipiente, decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente.
      i) Al echar medio vaso de agua, la altura del agua en el recipiente asciende 2.5 cm.
      ii) El par ordenado (7, 35) pertenece al gráfico que representa esta situación.
      iii) Al valor 30 de la variable independiente le corresponde el valor 150 de la variable dependiente.

2. Responde cada una de las siguientes preguntas, justificando adecuadamente.

a) En una relación de proporcionalidad directa en la que a x le corresponde y, ¿se puede asegurar que siempre a $2x$ le corresponde $2y$?
b) ¿Existen relaciones que no son de proporcionalidad directa?

3. ¿Es cierto que, si se suman dos números naturales consecutivos, la suma siempre da un número impar? Justifica adecuadamente.

4. Un mago le hace a Mirta el siguiente truco: "piensa en un número cualquiera. El cubo de tu número más el duplo de tu número es igual al triple del cuadrado de tu número". Mirta dice que pensó el 1 y que el truco le funcionó. Ella está dispuesta a invertir $10 000 en hacer una gira con él mostrando su magia. ¿Qué consejo le darías a Mirta?

DATOS DE LOS AUTORES

Víctor H. González
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina
vgonzale@ungs.edu.ar

Mabel A. Rodríguez
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina
mrodri@ungs.edu.ar