Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Muñoz Catalán, Ma. Cinta; Carrillo Yáñez, José
Conocimiento numérico de futuros maestros
Educación Matemática, vol. 19, núm. 1, abril, 2007, pp. 5-25
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40519102

Cómo citar el artículo
Número completo
Más información del artículo
Página de la revista en redalyc.org

Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Conocimiento numérico de futuros maestros

Ma. Cinta Muñoz-Catalán y José Carrillo Yáñez

Resumen: Esta investigación responde a nuestra preocupación por la formación de los futuros maestros en el área de matemáticas. Hemos explorado características de los conocimientos que nuestros alumnos de tercero poseen respecto al bloque de números, tras haberse impartido el contenido correspondiente. El análisis de tres problemas y de los protocolos de los alumnos ha permitido la elaboración de un instrumento de análisis, cuyos indicadores se hacen eco de las regularidades observadas, siguiendo de esta manera las pautas de la teoría emergente de los datos. Los resultados muestran carencias en contenidos conceptuales y procedimentales elementales, así como ausencia de justificaciones para las decisiones tomadas, lo que supone un punto de reflexión en relación con futuras orientaciones de la formación inicial.

Palabras clave: Conocimiento matemático (números), formación inicial de maestros, resolución de problemas.

Abstract: This research expresses our concern with prospective teacher education in the domain of mathematics. We have looked into features of our third course students' knowledge about numbers, after this topic being taught. The analysis of three problems and the students' protocols has lead to the elaboration of an analysis instrument, whose indicators reflect the observed regularities, following this way the model of the grounded theory. The outcomes show some deficiencies in relation to elementary conceptual and procedural contents, as well as lack of justification in the process of decision-making; it contributes an issue to reflect concerning future orientations of initial education.

Keywords: Mathematical (numerical) knowledge, pre-service primary teacher education, problem solving.

Fecha de recepción: 10 de enero de 2007.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento profesional de los profesores es uno de los objetos de estudio de especial interés en la investigación educativa (basta ver, por ejemplo, actas de simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y de la European Research in Mathematics Education). Resulta también de interés para la administración educativa y los propios profesores, y hoy día adquiere aún más relevancia, ya que la convergencia europea en materia educativa afectará al propio contenido y filosofía de la formación inicial.

En España, hablar de formación inicial de profesores conlleva inevitablemente la necesidad de diferenciar claramente la formación de maestros de la de profesores de enseñanza secundaria, la cual es muy reducida y está mal planteada.

Este artículo responde a nuestra preocupación por la formación de los futuros maestros respecto al área de matemáticas. Nos hemos centrado en la especialidad de Maestro de Educación Primaria, porque éste debería ser el principal responsable de la formación matemática de los alumnos. Los diversos planes de estudio de las universidades (Contreras y Blanco, 2002) ponen de relieve, además del perfil del conocimiento del futuro maestro que supuestamente se considera ideal, la existencia de escasos créditos para las materias de contenidos específicos y sus correspondientes didácticas. En la Universidad de Huelva, de los 206 créditos de la titulación 4.5 créditos corresponden a Matemáticas básicas (asignatura del área de Análisis Matemático, de contenidos formales) y 12 créditos a Matemáticas y su Didáctica (del área de Didáctica de la Matemática).

FUNDAMENTOS

Asumimos el carácter poliédrico del conocimiento profesional, de sus diversas fuentes de desarrollo (Porlán y Rivero, 1998) y de su diversa naturaleza (situado y contextualizado, social e individual, personal, dinámico, integrado y complejo, parcialmente tácito y práctico; Climent, 2005). Consideramos que la investigación en torno a él adquiere particular importancia cuando se concibe como parte del desarrollo profesional de los maestros en ejercicio, lo que a su vez es fuente privilegiada de información para organizar la formación inicial (Climent y Carrillo, 2002 y 2003). Estas dos últimas investigaciones (centradas en el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular) nos han confirmado la importancia del conocimiento del contenido matemático, convirtiéndolo en el objeto de la investigación presente. Este interés se halla en sintonía con trabajos de Ball (1990 y 2000) sobre la comprensión matemática de los estudiantes para maestro.

Al tratar el conocimiento matemático, hemos diferenciado el conocimiento *de* matemáticas y el conocimiento *sobre* matemáticas en la línea de Ball (1988), y siguiendo la caracterización de Climent (2005):

> En el conocimiento *de* matemáticas consideramos el conjunto de conceptos y procedimientos matemáticos, tanto los estructurantes de la materia... como los más específicos... de unos contenidos concretos; los hechos; las propiedades y relaciones; los significados que los sustentan; sus representaciones; y las relaciones entre los contenidos.
>
> En el conocimiento *sobre* matemáticas incluimos conocimiento conceptual, sobre las propias normas de sintaxis, y conocimiento procedimental, saber hacer matemáticas... (p. 89).

El propósito es explorar el conocimiento matemático que poseen nuestros alumnos de 3º tras haberse impartido el contenido de Números.[1] Para ello se han analizado los protocolos de los tres problemas (véase el siguiente apartado) que se propusieron sobre dicho bloque en el examen del primer parcial (que incluía además uno de Geometría y para el cual los alumnos dispusieron de 2 horas y de sus apuntes). Durante todo el cuatrimestre se trabajó desde la perspectiva de resolución de problemas, por lo que los alumnos sabían que no se daban por válidas aquellas respuestas que, aunque correctas, no habían sido justificadas. Podría decirse, pues, que una de las normas matemáticas del aula (en el sentido de Planas y Gorgorió, 2001) era la necesidad de la justificación para dar por concluida la resolución de cualquier problema o actividad en general. En cuanto al criterio de selección de los problemas, éstos se eligieron por su potencial para evaluar lo que consideramos más relevante y esencial de los contenidos del programa de formación que habían sido impartidos.

No pretendemos generalizar, ya que el estudio es local por tratarse de nuestros alumnos y referirse a unos problemas determinados (aunque seleccionados intencionadamente). Esto no es óbice para llevar a cabo un proceso de análisis en el que las categorías se van desarrollando progresivamente y en el que se van buscando rasgos

[1] La metodología incluye explicaciones magistrales, presentación de trabajos sobre dificultades de aprendizaje de alumnos de primaria, trabajo con recursos didácticos y resolución de problemas, los cuales constituyen el dinamizador general.

comunes entre los resultados que se van obteniendo, siguiendo así indicaciones de la teoría emergente de los datos ("data-grounded theory", Strauss y Corbin, 1998).

El estudio efectuado se ha basado en el análisis del contenido de los protocolos. Para ello hemos considerado las diferentes resoluciones posibles para cada uno de los problemas ("espacio ideal del problema", Newell y Simon (1972), Puig (1996)), incluidas las que surgieron de los resolutores del estudio. Como se detallará más adelante, los diferentes fragmentos en los que hemos dividido los protocolos y las estrategias empleadas han sido comparados con ese espacio del problema.

METODOLOGÍA

Los problemas se formularon para incluir lo esencial del contenido del primer cuatrimestre relativo a Números y permitir que los alumnos mostraran sus conocimientos, animándolos a expresar todo el proceso de su resolución. Los sujetos informantes son los 33 alumnos que realizaron la prueba.

Nuestro estudio comenzó con un análisis cualitativo pormenorizado de cada protocolo, en el que valoramos el proceso completo de resolución de los problemas, analizando el grado de comprensión y adquisición de los conocimientos puestos en juego a través de los elementos discursivos y los procedimientos utilizados, así como de las dificultades y errores manifestados.

Posteriormente, y teniendo en cuenta la realización de cada uno de los alumnos, fuimos extrayendo del análisis de cada problema aquellos elementos que consideramos representativos de dicho conocimiento y que eran susceptibles de ser analizados en el grupo de estudio. La elección de dichos elementos supuso revisar los protocolos en una constante y sistemática retroalimentación (procedimiento de *feed-back* cuya utilidad también está respaldada por la "grounded theory"). Estos elementos constituyen los indicadores de las variables (contenidos conceptuales, contenidos procedimentales, justificación) utilizadas para la elaboración de un instrumento de análisis (véase el formato en cuadro 1 al final del parágrafo "Resultados"), el cual nos permite realizar dos lecturas: vertical, para conocer el perfil de los conocimientos de números que cada alumno posee, y horizontal, para el establecimiento posterior de grupos de alumnos con perfil similar.

La codificación de las respuestas de cada alumno mediante este instrumento se ha realizado asignando en cada indicador un "no" si no está presente en el protocolo, un "sí" en el caso opuesto, o un espacio en blanco si no puede inferirse su presencia. La asignación del "sí" o del "no" no conlleva connotaciones positivas o negativas, respectivamente, pues depende del modo en el que han sido formulados los indicadores.

EL INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

La estructura del cuadro 1 muestra de manera simplificada los indicadores clasificados en función de si son contenidos conceptuales o procedimentales o si hacen referencia a aspectos argumentativos (justificación de las respuestas). La limitación de espacio nos obliga a seleccionar unos indicadores para explicar el significado asignado para la codificación de las respuestas (unidades de información) extraídas de los protocolos.

PROBLEMA 1

Divide el segmento 1-1.01 en 4 partes iguales.
a) Escribe las fracciones correspondientes a las marcas de las divisiones.
b) Calcula la fracción irreducible de la suma de las fracciones de *a*.

Contenido conceptual

Componentes decimales en una fracción: indica si el alumno escribe el numerador y el denominador como números decimales cuando expresa el resultado del problema en forma de fracción.

Fracción irreducible: hace referencia a si el sujeto conoce y utiliza este concepto para responder a las preguntas de los problemas.

Tamaño correcto del intervalo: si el alumno conoce el tamaño real del intervalo y no identifica su longitud con el extremo derecho.

Contenido procedimental

Simplificación: hemos estructurado este indicador en tres subapartados en función del procedimiento que el alumno utilice para realizar la simplificación de las fracciones; si se realiza primero una factorización de los elementos de la fracción y después se simplifica, el indicador es “simplificación por factorización”. Si utiliza el máximo común divisor, el indicador es el que lleva el mismo nombre, y si va efectuando simplificaciones progresivas, entonces estará utilizando un “método informal”.

Representación de fracciones: también hemos dividido este indicador en tres subapartados, en función del procedimiento que el sujeto realice para hallar las fracciones que corresponden a cada una de las tres marcas en las que hay que dividir el segmento. El primer apartado, “punto medio de extremos”, indica si se realiza a través de la semisuma de las fracciones de las marcas equidistantes. La de “fracciones equivalentes” hace referencia a la búsqueda de fracciones equivalentes a las correspondientes a los extremos del segmento cuyos numeradores se diferencien en 4 unidades, y la posterior selección de las que están comprendidas entre ellas. Por último, “suma de distancia” se relaciona con la obtención de la longitud de la distancia entre las marcas y la posterior adición de ésta a la fracción correspondiente a cada una de las marcas.

PROBLEMA 2

Obtén un criterio de divisibilidad por 36.

Justificación

Descomposición factorial: los alumnos que tienen un “sí” en este indicador, significa que justifican la causa por la cual descomponen el número dado en factores para hallar su criterio de divisibilidad.

Selección del 4 y del 9: hace referencia a si el alumno explica el motivo por el cual, de entre todos los factores del 36, elige los criterios de divisibilidad del 4 y del 9 para hallar cuándo un número es divisible por 36.

CONTENIDOS CONCEPTUALES

Simultaneidad de criterios del 4 y del 9: hace referencia a si, en la resolución del problema, se indica que para que un número sea divisible por 36, necesariamente debe ser divisible por 4 y 9 de manera simultánea.

Consideración del exponente cuadrado: es correcto este indicador si no desprecia el exponente cuadrado del 2 y del 3 en la descomposición factorial del 36 para indicar el criterio de divisibilidad de éste.

Problema 3

Supón que tu calculadora redondea y que al introducirle $19 \div 13$ te aparece en pantalla 1.461538. Explica cómo obtener 3 cifras decimales más y el resto correspondiente a la cienmilésima.

Contenidos conceptuales

Concepto de redondeo: expresa si el alumno conoce las implicaciones del redondeo en las calculadoras en relación con la posible falsedad de la última cifra (lo que diferencia el redondeo de la aproximación –por truncamiento–, en la que todas las cifras que aparecen son fiables), para poder hallar el resto correspondiente a las cienmilésimas.

Posición de las cienmilésimas: hace referencia a si el alumno identifica correctamente, en el cociente (1.461538), la posición del decimal que coincide con las cienmilésimas.

Contenidos procedimentales

Despeja correctamente el resto: se trata de identificar si el alumno despeja de manera adecuada el resto siguiendo la regla fundamental de la división. En este indicador hay que considerar, además, que algunos alumnos, para aprovechar el resultado que ofrece la calculadora, realizan la operación dC-D para hallar el resto, aunque el resultado es interpretado e indicado como positivo.

Modo de hallar los decimales: se indica el modo a través del cual se resuelve la cuestión referente al cálculo del valor de los siguientes decimales del número decimal indicado en el problema. Puede realizarse utilizando la regla fundamental de la división o bien a través de un procedimiento que consiste en ir multiplicando el resultado que aparece en la pantalla por potencias de 10 y restarle posteriormente al nuevo valor su parte entera (de esta manera la calculadora va mostrando nuevos decimales).

Uso de la calculadora: indica si se respeta la restricción impuesta de utilizar la calculadora para hallar los decimales restantes al número decimal indicado en el enunciado.

Aunque es evidente que en los tres problemas se ven involucradas las tres variables que nos han permitido clasificar los indicadores, hemos decidido centrar nuestro análisis de cada problema en aquéllas de las que se tiene más y mejor información (problemas 1 y 3: contenidos conceptuales y procedimentales; problema 2: contenidos conceptuales y justificación).

RESULTADOS: FORMACIÓN DE LOS GRUPOS

Un primer análisis de los protocolos de resolución de los tres problemas nos permitió obtener el perfil correspondiente a cada alumno. Después agrupamos a los alumnos con perfiles similares, a fin de identificar la existencia de patrones comunes de conocimientos tanto conceptuales como procedimentales y argumentativos. Para ello, seleccionamos los indicadores más discriminantes y realizamos una lectura horizontal de los protocolos. El indicador que tomamos como referencia fue el procedimiento empleado para la simplificación de las fracciones en el problema 1, puesto que cada método implica distintos niveles de profundización en el conocimiento matemático (que se corresponden luego con el comportamiento en otros indicadores) y la mayoría de los alumnos aportaron información sobre él. De los tres subindicadores, "método informal" es el que mostraría un conocimiento sobre el procedimiento de simplificación más rudimentario (aunque pueda resultar menos largo y laborioso que la factorización de sus términos).

Así obtuvimos los siguientes grupos (véase la gráfica 1 para su distribución porcentual):

G1: simplifican a través de la factorización del numerador y denominador y la simplificación posterior. Alumnos 30 y 33.[2]

G2: utilizan el máximo común divisor para simplificar. (1, 21).

G3: simplifican los elementos de una fracción de una manera progresiva, según los divisores comunes que paulatinamente van observando. (4, 7, 8, 10, 13, 16, 17, 19, 22, 25).

G4: no ha sido posible observar el método utilizado para la simplificación, bien porque han presentado el resultado directamente, bien porque el resultado

[2] La numeración corresponde a la ordenación alfabética de los alumnos.

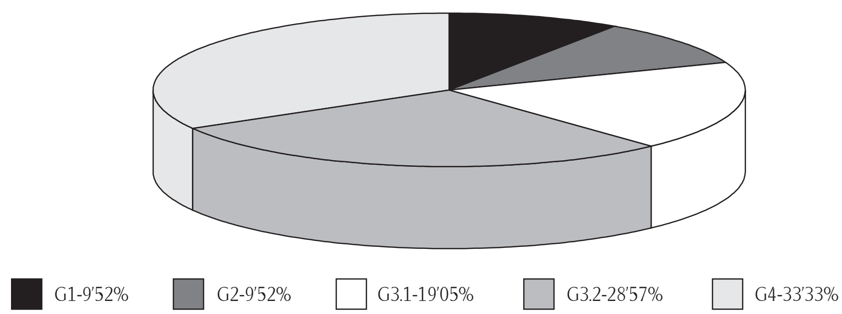
obtenido no es susceptible de ser simplificado, o bien porque no han realizado este apartado del problema. (5, 6, 12, 15, 20, 23, 24).

Puesto que el grupo 3 es muy numeroso, resulta interesante poder establecer un nuevo agrupamiento teniendo en cuenta otro elemento discriminante. Tras analizar los patrones de respuesta de la mayoría, hemos concluido que el indicador que más información proporciona es "simultaneidad de criterios" (problema 2). De esta manera se han conseguido dos subgrupos:

G3.1: utilizan un método informal para simplificar y no tienen en cuenta la simultaneidad de criterios del 4 y del 9 para responder al problema 2 (4, 7, 8, 13).

G3.2: simplifican por métodos informales, pero consideran la simultaneidad de criterios de divisibilidad del 4 y del 9 para hallar el del 36 (10, 16, 17, 19, 22, 25).

Los 12 sujetos restantes han sido eliminados para el análisis general (quedándonos finalmente con 21), porque no aportaban información ni suficiente ni relevante.



Gráfica 1 Distribución porcentual de alumnos por grupos

Perfil de los grupos

A continuación caracterizamos cada grupo de alumnos obtenidos en la fase anterior en función de los conocimientos conceptuales, procedimentales y de justificación puestos en juego durante la resolución de los problemas. Esta descripción no pretende ser exhaustiva, pues no existen alumnos iguales; lo que nos interesa son las regularidades observadas en cuanto a la comprensión y adquisición de conocimientos y a las dificultades manifestadas.

Grupo 1

Se caracteriza por tener un buen conocimiento de matemáticas. Muestran un buen dominio de los aspectos de la fracción que son evaluados. Conocen perfectamente el concepto de fracción, no expresando con decimales sus componentes, saben operar con ellas y simplificarlas, y transformar en fracción decimal un número decimal finito.

"Vamos a transformar 1.01 en fracción 1.01 = $\frac{101}{100}$" (sujeto 33).

Respecto al procedimiento utilizado para hallar esta fracción irreducible, utilizan la factorización para, posteriormente, proceder a su simplificación:

$$\text{“}\frac{401}{400}+\frac{402}{400}+\frac{403}{400}=\frac{1206}{400}=\frac{2\cdot 3^{2}\cdot 67}{2^{4\,3}\cdot 5^{4}}=\frac{603}{200}\text{”} \text{ (s 33).}$$

Saben hallar correctamente el tamaño del intervalo, identifican de manera adecuada el número de marcas necesarias para su división, y el procedimiento que utilizan para calcular la fracción correspondiente a cada una de las marcas consiste en el uso de fracciones equivalentes:

"Tenemos 1 y $\frac{101}{100}=\frac{100}{100}$ y $\frac{101}{100}=\frac{400}{400}$ y $\frac{404}{400}$. *Vamos jugando con las fracciones equivalentes para que podamos encontrar las que están entre ellas. Así, las fracciones serán:* $\frac{401}{400},\frac{402}{400},\frac{403}{400}$." (s 33)

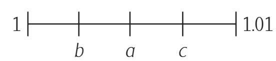
En relación con el problema 2, no justifican la causa por la que necesitan factorizar el número 36, ni por qué seleccionan, de entre los factores, el 4 y el 9. Tienen en cuenta, sin embargo, la simultaneidad de los criterios de estos factores para la obtención del criterio de divisibilidad del 36 y conocen los conceptos implicados en este problema, como los de divisor, múltiplo y criterio del 9; sin embargo, uno de ellos se equivoca en la formulación del criterio del 4:

"Criterio de divisibilidad del 4: la suma de las dos últimas cifras del número tiene que ser múltiplo de 4" (s 30).

El problema 3 es realizado correctamente, por lo que en todos los indicadores tienen asignados el correspondiente "sí". Sólo se diferencian en el que hace alusión a la manera de hallar los decimales, porque utilizan tanto la regla de la división como el procedimiento de multiplicar el cociente (1.461538) por potencias de 10 y restar posteriormente su parte entera, mediante la calculadora.

Grupo 2

Lo más característico de este grupo, respecto al problema 1, es que realiza el proceso de simplificación utilizando el máximo común divisor. Además, ambos alumnos tienen un buen conocimiento de las fracciones, puesto que operan adecuadamente con ellas, no expresan sus componentes con números decimales y el procedimiento que utilizan para calcular las fracciones correspondientes a cada una de las marcas es mediante su consideración como punto medio de dos extremos, o a través de la suma a cada marca de la distancia que existe entre ellas.



"*Semisuma:* $a = \dfrac{1+1.01}{2} = \dfrac{2.01}{2} = \dfrac{\frac{201}{100}}{2} = \dfrac{201}{200}$" (s. 21).

Un aspecto que hay que resaltar es que uno de los dos alumnos expresa incorrectamente el tamaño del intervalo al considerar 0.1 y no 0.01 como longitud del segmento.

Respecto al problema 2, ninguno justifica la causa por la que han descompuesto en factores el 36, ni por qué han seleccionado los factores 4 y 9, de entre todos ellos, para hallar el criterio de divisibilidad del 36. Ambos poseen un buen conocimiento sobre conceptos como divisibilidad, divisor y múltiplo y tienen en cuenta el exponente cuadrado de la descomposición factorial del 4 y del 9 para dar solución al problema. Sin embargo, sólo uno de ellos expone correctamente los criterios de divisibilidad de ambos factores y tiene en cuenta la necesidad de la simultaneidad de estos criterios.

En el problema 3, los alumnos tienen un patrón de respuesta muy similar, en el cual puede destacarse, como elemento caracterizador, el modo de hallar los decimales, en el que ambos coinciden en la utilización de la regla fundamental de la división:

"Necesitamos saber qué resto quedaba cuando el cociente estaba en 1.46153. Para ello aplicaremos la fórmula: $D = dC + R$; $R = D - dC$" (s 1).

Respecto a los demás indicadores de este problema, los dos alumnos conocen el concepto de redondeo y sus implicaciones, identifican de manera correcta la posición correspondiente a las cienmilésimas y cuando hallan el valor del resto utilizando la regla fundamental de la división, éste es expresado como un número natural.

Si realizamos una comparación con el grupo anterior, observamos que ambos tienen perfiles muy similares de conocimiento, diferenciándose esencialmente en el procedimiento utilizado para la simplificación (indicador discriminante), en el problema 1, y en la posibilidad de que un individuo no considere la simultaneidad de criterios del 4 y del 9 para hallar el criterio de divisibilidad del 36, en el segundo. En el problema 3 sólo se diferencian en que los dos alumnos calculan las tres cifras decimales siguientes mediante la regla fundamental de la división, mientras que en el grupo 1 hay una mayor diversidad.

Grupo 3.1

Este grupo se caracteriza por realizar la simplificación a través de métodos informales.

"Ahora simplificamos:

$$1206 / 400 \xrightarrow{\div 2} 603 / 200$$

Fracción irreducible porque el denominador sólo se puede dividir por números que no dividan al denominador" (s 19).

Como podemos observar, este método corresponde a un procedimiento para hallar las fracciones correspondientes a las marcas como la semisuma de los puntos extremos o como suma de distancia. Este método difiere del de la utilización de fracciones equivalentes, el cual implica un conocimiento matemático formal que podría relacionarse con cualquiera de los métodos formales de simplificación de fracciones (factorización o máximo común divisor). La mayoría de los integrantes conoce el concepto de fracción y sabe utilizarla correctamente, ya que opera con ellas con normalidad; conoce el concepto de fracción irreducible y halla la fracción decimal de un número decimal finito dado. Asimismo, establecen un número adecuado de marcas para poder dividir el intervalo en cuatro partes iguales.

En relación con el problema 2, ninguno considera la simultaneidad de criterios del 4 y del 9 para establecer el criterio de divisibilidad del 36. Éste es el indicador utilizado para distinguir este grupo del 3.2. Tampoco justifican la causa de la descomposición factorial del 36 ni por qué seleccionan el 4 y el 9 entre esos factores. Sin embargo, y aunque dominan los conceptos de división y divisibilidad, existen alumnos que no expresan correctamente los criterios de estos números o simplemente no los conocen:

$$36 = 4 \times 9$$

*Criterio de divisibilidad de 4 es que todo número cuyas dos últimas cifras sean múltiplo de 4 es divisible por 4.

**Criterio de divisibilidad del 9..."* (s13)

"abcd $= \dot{2}^2 = \dot{4}$ *cuando las dos últimas cifras sean par.*
abcd $= \dot{3}^2 = \dot{9}$ *cuando la suma de sus cifras sea 9 o múltiplo de 9"* (s 4).

En el problema 3, resulta llamativo que ninguno de los integrantes identifica adecuadamente la posición de las cienmilésimas a la hora de hallar el resto; tampoco conocen el concepto de redondeo ni sus implicaciones, puesto que en las operaciones utilizan el último decimal del número que aparece en el enunciado (1.461538), es decir, el 8:

"Lo que tendríamos que hacer para ir obteniendo sucesivos decimales sería: Cociente × divisor − resto (se considera que el resto es el último decimal). 1.461538 × 13 − 8 = 10.999994 Éstos serían los siguientes decimales de la operación" (s 19).

Hallan los decimales a través de la regla fundamental de la división, la cual es utilizada correctamente, a excepción del ejemplo anterior, cuando despejan el valor del resto. Donde existe una mayor variabilidad es en los conceptos de resto y cociente y en la conversión del resto decimal obtenido en número natural.

Grupo 3.2

Al igual que el grupo anterior, éste se caracteriza por realizar la simplificación mediante un método informal, esto es, mediante simplificaciones progresivas:

$$\text{“}\frac{10025}{10000}+\frac{1005}{1000}+\frac{10075}{10000}=\frac{10025+10050+10075}{10000}=\frac{30150}{10000}=\frac{3015}{1000}=\frac{603}{200}\text{”}$$

(s 22).

El modo de calcular las fracciones correspondientes a las tres marcas del intervalo es el de la semisuma de los valores extremos o a través de la suma, a la fracción de cada marca, de la distancia que existe entre ellas. Los componentes de este grupo operan perfectamente con fracciones, conocen y saben hallar las fracciones irreducibles y, excepto uno, establecen el número correcto de las marcas necesarias para dividir el intervalo en cuatro partes.

Respecto al problema 2, estos alumnos no explican por qué tienen que descomponer en factores el 36 para hallar el criterio de divisibilidad, ni tampoco justifican la causa por la cual es necesario seleccionar el 4 y el 9 de entre todos los factores posibles (excepto uno). Tampoco suelen saber el criterio de divisibilidad del 4, pero sí el del 9:

“El número tiene que ser par por el criterio del 4 y que la suma de sus cifras sea $\dot{9}$*”* (s 22).

Un aspecto que lo diferencia respecto del grupo anterior es la consideración de la necesidad de que se cumplan simultáneamente los criterios del 4 y del 9 para hallar el criterio de divisibilidad del 36. Dominan los conceptos de divisor, división y múltiplo, pero sólo la mitad tiene en cuenta el exponente cuadrado del 4 y del 9 en su factorización.

En el problema 3 resulta difícil extraer elementos comunes, porque existe una mayor variabilidad en las respuestas a los indicadores. No obstante, podemos resaltar que la mayoría no comprende las implicaciones del concepto de redondeo e identifican de manera incorrecta la posición de las cienmilésimas, despejan correctamente el resto y hallan los decimales aplicando la regla fundamental de la división.

Grupo 4

A este grupo pertenecen aquellos alumnos de los que no se obtiene información acerca del modo de simplificación de las fracciones. Respecto al problema 1, algunos exponen erróneamente que los componentes de una fracción pueden ser números decimales:

$$\text{“}\frac{1+1.01}{2} = 1.005\,(\text{1er. núm.}) \Rightarrow \frac{2.01}{2} \Rightarrow \text{la. Fracción”}\ (\text{s } 5).$$

Hallan las fracciones correspondientes a cada una de las marcas que dividen al segmento preferentemente a través de la semisuma de los puntos equidistantes y suelen establecer de manera correcta el tamaño del intervalo, así como el número de marcas necesarias para dividir el segmento en cuatro partes iguales. En el resto de indicadores existe escasa información, lo cual impide la extracción de regularidades.

En el problema 2 no justifican la causa por la que descomponen en factores el 36 para hallar su criterio de divisibilidad, ni por qué seleccionan el 4 y el 9 entre ellos para tal fin y no otras posibles combinaciones (a excepción de un sujeto, que lo justifica con los factores inadecuados 13 y 2). Dominan los conceptos de divisor y múltiplo; diferencian entre división y divisibilidad (excepto un alumno), y suelen tener en cuenta la simultaneidad de los criterios del 4 y del 9 para la resolución del problema. Existe escasa información sobre el conocimiento que poseen los alumnos acerca de los criterios de divisibilidad del 4 y del 9, aunque presentan un mayor desconocimiento sobre el primero:

“...Otro criterio sería el del 4, que son aquellos números que acaben en cero o en cifra par” (s 20).

Respecto al problema 3, de nuevo existe una gran diversidad en las respuestas, aunque el indicador en el que hay una mayor coincidencia es el del concepto de redondeo, del que la mayoría de los alumnos desconocen sus implicaciones, puesto que en las operaciones siguen considerando el 8 (último decimal).

$$\text{“}19 \div 13 = 1.461538;\ 1.461538 \times 13 - 19 = -0.000006\text{”}\ (\text{s } 12).$$

También coinciden en el modo de hallar los decimales siguientes al número dado, utilizando la regla fundamental de la división, y conocen los conceptos de resto y cociente.

El cuadro 1 representa de manera resumida el perfil de los grupos.

Cuadro 1 Perfil de los grupos

			Alumnos analizados				
			G1	G2	G3.1	G3.2	G4
Problema número 1							
Contenido conceptual	Componentes decimales en una fracción		NO	NO	no	NO	
	Fracción irreducible						
	Tamaño correcto del intervalo						
	Número correcto de marcas						
Contenido procedimental	Opera con fracciones						
	Simplificación	Factorización					
		mcd					
		Mét. informal					
	Representación de fracciones	Punto medio de extremos			no		
		Fracciones equivalentes		NO	NO	NO	NO
		Suma distancia			no		no
	Fracción decimal a partir del número decimal						
Problema número 2							
Justificación	Descomposición factorial		NO	NO	NO	NO	NO
	Selección del 4 y del 9		NO	NO	NO	no	NO
Contenido conceptual	Criterio de divisibilidad del 4		NO			no	no
	Criterio de divisibilidad del 9						
	Simultaneidad de criterios 4 y 9				NO		
	Concepto de divisor y múltiplo						
	Concepto de división y divisibilidad						
	Consideración exponente cuadrado						

Cuadro 1 Perfil de los grupos (conclusión)

			Alumnos analizados				
			G1	**G2**	**G3.1**	**G3.2**	**G4**
Problema número 3							
Contenido conceptual	Concepto de redondeo				NO		no
	Regla fundamental de la división						
	Posición de cienmilésimas				NO	no	
	Conceptos de resto y cociente						
Contenido procedimental	Despeja correctamente el resto						
	Convierte el resto decimal en número entero						no
	Modo de hallar los decimales	Regla fundamental					
		Extraerlos en calculadora				no	no
	Uso de calculadora						

Nota: NO: ninguno de los sujetos de los que se tiene información ha realizado lo que corresponde al indicador.
no: sólo uno de los sujetos del grupo lo ha realizado.

	indicadores discriminantes
	todos los sujetos lo han realizado
	sólo un sujeto no lo ha realizado
	en los demás casos

DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El cuadro 1 pone de manifiesto gráficamente algunos de los aspectos comentados en el apartado anterior.

- El G4 presenta más celdas de color gris tenue que los otros grupos, al tiempo que posee menos celdas de color gris medio que éstos, lo que pone de relieve la dificultad de encontrar regularidades en este grupo.

- Todos los alumnos menos uno conocen la fracción irreducible y hacen un uso generalmente correcto de ella.
- Los alumnos poseen los conceptos de divisor y múltiplo, división y divisibilidad.
- Muchos alumnos desconocen el concepto de redondeo.
- La mayoría conoce y utiliza adecuadamente la regla fundamental de la división.
- Los alumnos operan bien con fracciones.
- El método más usual de simplificación es el informal.
- Es escaso el uso de las fracciones equivalentes para la obtención de puntos intermedios.
- Se suele conocer el número de marcas necesario para dividir un segmento en partes iguales.
- Suelen despejar correctamente el resto a través de la regla fundamental de la división.

Estos aspectos, junto con las deficiencias comentadas en los resultados, pueden articularse como sigue (entiéndase el empleo de expresiones generales, pues el objetivo de este estudio, lejos de establecer generalizaciones a partir de unos cuantos casos, es el de aumentar nuestra comprensión del conocimiento del alumno):

Respecto a los contenidos conceptuales, existen importantes deficiencias, como la inclusión de números decimales en los miembros de una fracción y la dificultad para diferenciar redondeo de aproximación. Asimismo, existe un número considerable de alumnos que no tienen en cuenta la simultaneidad de criterios de divisibilidad de los factores de un número dado, ni consideran el exponente cuadrado del 2 y del 3 para hallar el criterio de divisibilidad del 36.

Respecto de los contenidos procedimentales, el método preferido para simplificar es el informal, muchos alumnos saben convertir un número decimal finito a una fracción decimal, pero al mismo tiempo existen dificultades para entender en profundidad los pasos ocultos de la división, puestos de manifiesto a partir de la necesidad de obtener más cifras decimales de las que ofrece la calculadora en una primera instancia.

Y si hay un resultado contundente, ése es la ausencia de justificaciones o argumentos de las decisiones tomadas. En particular, nadie da razones por las que debe descomponer factorialmente el número, y sólo uno argumenta por qué el 4 y el 9 son los números elegidos. Interpretamos que esta ausencia se debe al predominio de los hábitos adquiridos a lo largo de toda su historia de aprendizaje sobre lo exigido en el desarrollo de la asignatura.

Para poder realizar el estudio de la información obtenida, hemos formado grupos de alumnos con diferentes grados de conocimiento, cada uno de los cuales engloba a sujetos con perfiles similares. Somos conscientes de que todo intento de buscar regularidades supone una simplificación de la realidad y de la diversidad, pero nuestra intención ha sido buscar cuáles son las características (y con ellas las carencias y los obstáculos) más frecuentes y comunes, a fin de poder organizar procesos de instrucción adecuados y mejorar así la formación de los futuros maestros. Tomando como ejemplo el uso mayoritario del método informal de simplificación de fracciones entre los alumnos, propondríamos desarrollar actividades de análisis didáctico del contenido matemático con nuestros alumnos sobre la base del análisis de dificultades y obstáculos de los alumnos de primaria y sobre la base de sus propias dificultades, reflexionando sobre las limitaciones impuestas por su conocimiento.

En los comentarios relativos al problema 1 hemos señalado que, si se emplea un método informal al simplificar, cabe esperar que se emplee un método informal en la realización de marcas. Naturalmente, esto no es una implicación lógica, sino algo dependiente del análisis que el sujeto realice de la adecuación de los métodos que conoce a los requerimientos de la tarea a la que se enfrenta. Esta reflexión trasciende al problema 1 y conduce al estudio del conocimiento metacognitivo en general; sería preciso ampliar el estudio para su detección, pues los protocolos de resolución se muestran insuficientes para indagar en este dominio.

Nos han interesado asuntos que se enmarcan tanto en el conocimiento *de*, como en el conocimiento *sobre* matemáticas, y hemos querido extraer la información en un contexto habitual de examen, del cual, como docentes, recogemos esa información para convertirla en calificación. Con este modo de proceder, pretendemos ir más allá del informe que una calificación puede aportar e indagar en las características de lo aprendido por los alumnos. Esto puede ser un buen punto de partida para cuestionar nuestra docencia dentro de las limitaciones (ya comentadas, respecto a la escasa presencia en créditos) actuales y para cuestionar, asimismo, tales limitaciones.

Por otra parte, el lector debe contextualizar este estudio en el marco más amplio del acercamiento al conocimiento matemático de los futuros maestros. Está en proceso de análisis un estudio similar relativo al bloque de geometría, que confiamos en acabar y difundir próximamente.

Por último, queremos insistir en el carácter local de esta investigación, pero al mismo tiempo en su potencial aplicación en la orientación a los docentes que trabajan en la formación inicial de maestros en el área de matemáticas. Verificar de manera detallada el desconocimiento por parte de nuestros alumnos de contenidos conceptuales y procedimentales, así como la ausencia de argumentos (y la escasa capacidad argumentativa), incrementa nuestro conocimiento didáctico del contenido (en nuestro caso, relativo a matemáticas y su didáctica) por enseñar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D.L. (1988), "Unlearning to teach mathematics", *For the learning of mathematics*, vol. 8, núm. 1, pp. 40-48.

——— (1990), "The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education", *Elementary School Journal*, vol. 90, pp. 449-466.

——— (2000), "Bridging practices: intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach", *Journal of Teacher Education*, vol. 51, núm. 3, pp. 241-247.

Climent, N. (2005), *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*, Tesis doctoral, Michigan, Proquest Michigan University, www.proquest.co.uk

Climent, N. y J. Carrillo (2002), "Una propuesta para la formación inicial de maestros. Ejemplificación: los triángulos, una situación de primaria", *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, vol. 7, núm. 2, pp. 171-205.

——— (2003), "El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 21, núm. 3, pp. 387-404.

Contreras, L.C. y L.J. Blanco (2002), "Introducción", en L.C. Contreras y L.J. Blanco (eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: una mirada a la práctica docente*, Cáceres (España), Universidad de Extremadura, pp. 9-18.

Newell, A. y H. Simon (1972), *Human problem solving*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.

Planas, N. y N. Gorgorió (2001), "Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en un aula multicultural", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 19, núm. 1, pp. 135-150.

Porlán, R. y A. Rivero (1998), *El conocimiento de los profesores*, Sevilla, Díada.
Puig, L. (1996), *Elementos de resolución de problemas*, Granada, Comares.
Strauss, A. y J. Corbin (1998), *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*, Thousand Oakes, CA, Sage.

DATOS DE LOS AUTORES

Ma. Cinta Muñoz-Catalán
Universidad de Huelva, España
maria.cinta@ddcc.uhu.es

José Carrillo Yáñez
Universidad de Huelva, España
carrillo@uhu.es