# Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales

Fernando Cerdán y M. Pedro Huerta

**Resumen:** En este trabajo, con la ayuda de lo grafos trinomiales, analizamos un mundo particular de problemas ternarios que implican la probabilidad condicional. Construimos el grafo trinomial que representa a este mundo particular de problemas, por lo que es posible disponer, a la vez, de este mundo. Usando el grafo trinomial realizamos la lectura de dos problemas y mediante el método de análisis-síntesis discutimos si la solución del problema es aritmética o algebraica. En este último caso, podemos determinar todas las ecuaciones que resuelven el problema. Por último, discutimos también cuál submundo de problemas ternarios de probabilidad condicional puede resolverse mediante tablas de contingencia o diagramas de árbol, mostrando así el potencial de los grafos trinomiales para el análisis de estos problemas.

*Palabras clave:* Probabilidad condicional, problema de probabilidad condicional, resolución de problemas de probabilidad condicional, problema ternario, grafo trinomial.

**Abstract:** In this paper, with the help of trinomial graphs, we analyze a particular world of ternary problems that involve conditional probabilities. We construct the trinomial graph that represents that world. This graph contains all ternary problems of conditional probability we can consider. Using the trinomial graph, we read two problems and discuss if they have an arithmetical or algebraical expression as solution of the problem. If the solution is an algebraical expression we determine the set of equations that solve the problem. Finally, we also discus what sub-world of ternary problems can be solved using either contingency tables or tree diagrams and finish this paper reflecting the potential of the trinomial graph on teaching conditional probability problems.

*Keywords*: Conditional probability, conditional probability problems, conditional probability problem solving, ternary problems, trinomial graphs.

Fecha de recepción: 8 de junio de 2006.

## INTRODUCCIÓN

No vemos mejor manera de introducir nuestro trabajo que expresar a cuáles intereses sirve. Éste no es otro que el de abordar la problemática señalada hace algún tiempo por Shaughnessy (1992, pp. 466-467) sobre las dificultades de la práctica de la investigación y la enseñanza de la probabilidad en las escuelas, problemática que abarca tanto a la probabilidad como a la resolución de problemas: *teaching stochastics is teaching problem solving* (p. 467).

En la educación secundaria (nos referimos al periodo escolar de 14 a 18 años), la probabilidad condicional es un tema que normalmente se enseña en un contexto de resolución de problemas. Estos problemas escolares, a los que queremos llamar problemas de probabilidad condicional, son problemas generalmente de enunciado verbal en los que, en el texto del problema, hay al menos una probabilidad condicional implicada. Ahora bien, el potencial que tienen estos problemas no se conoce bien por lo general, como lo demuestra el hecho de que en los libros de texto escolares suelen presentarse problemas que responden casi siempre a las mismas estructuras de datos y de relaciones, omitiendo –habría que suponer que por desconocimiento– problemas que responden a otras estructuras de datos tan ricas o más que las propuestas (Huerta y Lonjedo, 2005). Una enseñanza así es entonces parcial, pues deja familias de problemas sin resolver.

En este trabajo consideraremos el mundo particular de los problemas de probabilidad condicionada con dos sucesos: *A* el suceso condicionado y *B* el suceso condicionante, y unos objetos matemáticos los grafos trinomiales (GT) para estudiar estos problemas. Los GT ya han sido usados por Cerdán (2005) para estudiar algunas cuestiones relativas a los problemas aritmético-algebraicos. Los GT reducen un problema a un mundo de cantidades conocidas, desconocidas y relaciones entre éstas. Por tanto, los análisis que aquí se presentan apuntarán en esa dirección, pero dejarán de lado otros aspectos que se sabe que también son relevantes en la resolución de problemas, como pueden ser los aspectos semánticos, semióticos y de contexto (por ejemplo en Lonjedo y Huerta, 2005; Girotto y González, 2001; Evans y otros, 2000; Hoffrage, Gigerenzer, Graus y Martignon, 2002).

## PROBABILIDAD CONDICIONAL, PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL, RELACIONES TERNARIAS Y PROBLEMAS TERNARIOS

### Probabilidad condicional y problemas de probabilidad condicional

Dados dos sucesos $A$ y $B$, con $p(B) \neq 0$, se define la probabilidad condicional del suceso $A$, el suceso condicionado, puesto que el suceso $B$, el condicionante, ha ocurrido, y se expresa por $p(A|B)$, mediante la fórmula:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad (1)$$

Esta definición reduce el concepto teórico de la probabilidad condicional a la fórmula 1, escondiendo sin embargo otros posibles significados del concepto.

A veces, la fórmula 1 se rescribe en la forma de la expresión 2:

$$p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \qquad (2),$$

en donde $p(A|B)$ se obtiene mediante dos cantidades $n(A \cap B)$ y $n(B)$ diferentes en su naturaleza de las cantidades $p(A \cap B)$ y $p(B)$. La primera fórmula es una relación entre tres cantidades de la misma naturaleza, pero la segunda fórmula relaciona tres cantidades de diferentes naturalezas. En efecto, la fórmula 1 *calcula* la probabilidad del suceso $A$, condicionada por la ocurrencia del suceso $B$ mediante las probabilidades de los sucesos $A \cap B$ y $B$, pero la fórmula 2 puede verse como una forma de *asignar* una probabilidad al suceso $A$ cuando se sabe de la ocurrencia del suceso $B$, asignación que se lleva a cabo sabiendo el número de casos de ocurrencias en los sucesos $A \cap B$ y $B$. Los verbos calcular y asignar pueden usarse para distinguir los problemas de probabilidad condicional. Los problemas que consideramos aquí son aquéllos en los cuales será necesario calcular alguna probabilidad y en los que, en el problema, bien como dato bien como cuestión, esta implicada por lo menos una probabilidad condicional.

Siendo, además, los problemas que consideramos problemas verbales o de enunciado verbal, para usar la fórmula 1 o la 2, se requiere que en el texto-enunciado del problema se lean las expresiones que permiten identificar los sucesos

$A \cap B$ y $B$ y sus probabilidades o frecuencias, y la expresión que refiere al "suceso $A|B$" cuya probabilidad es calculada por dicha fórmula.

En los problemas de probabilidad condicional cuya resolución requiera cálculos que involucren probabilidades de otros sucesos, además de los mencionados, la lectura para la identificación de dichos sucesos y la organización de los cálculos aumentará, en consecuencia, en complejidad. Esto es, la resolución de un problema de probabilidad condicional de enunciado verbal, como la de los problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal (Puig y Cerdán, 1988), puede entenderse como un proceso en el que es posible distinguir una serie de etapas o fases. Una de las fases más importantes es la llamada fase de traducción, en la que uno desea ir desde la lengua vernácula del problema hasta el lenguaje de las matemáticas. En particular, en los problemas de probabilidad esto implica una lectura que permita:

*a)* la identificación de los sucesos y sus probabilidades asignadas, y
*b)* la determinación de las relaciones entre los sucesos y/o entre sus probabilidades.

Y, además, un método que dé cuenta de la organización de la disposición precisa de aquellas probabilidades de sucesos y relaciones entre probabilidades que permiten determinar la probabilidad por la que se pregunta en el problema. Esta disposición finaliza mostrando expresiones aritméticas o ecuaciones algebraicas en las que está implicada la probabilidad buscada.

Para una familia particular de problemas, la familia de problemas aritmético-algebraicos, Puig y Cerdán (1990) han mostrado que este trabajo de traducción de la lengua vernácula al lenguaje de las matemáticas se realiza mediante textos intermedios que pueden describirse por un sistema matemático de signos que contiene tanto los signos para cantidades conocidas como aquéllos para las cantidades desconocidas y las relaciones entre ellos, y el cual está organizado por los métodos generales de resolución de problemas.

Aquí, considerando problemas verbales de probabilidad condicional, los trataremos rescritos en otro texto: los grafos trinomiales sugeridos por Fridman (1990). Será en este nuevo texto del problema y con la ayuda de una batería de herramientas creadas y desarrolladas por Cerdán (2005) para el análisis de las familias de problemas aritmético-algebraicos, donde nos cuestionaremos sobre los problemas verbales de probabilidad condicional y donde intentaremos responder a las cuestiones que sobre dichos problemas nos plantearemos.

## Sucesos, probabilidades y relaciones ternarias entre probabilidades

Insistimos en que un problema de probabilidad lo llamaremos de probabilidad condicional si, o bien en la parte informativa o en la parte interrogativa del problema, una de las cantidades es una probabilidad condicional.

Supongamos que en el problema las cantidades están expresadas en términos de probabilidades. La fórmula 1 podemos expresarla como una regla de multiplicación:

$$p(B) \times p(A|B) = p(A \cap B) \tag{3}$$

regla que implica una relación entre tres cantidades, es decir, una relación ternaria entre las probabilidades mencionadas.

Consideremos ahora los sucesos $A$, $B$ y sus sucesos complementarios $\sim A$ y $\sim B$. Con ellos, y para los problemas de probabilidad condicional que vamos a estudiar en este trabajo, podemos definir los siguientes sucesos $A \cap B$, $A \cap \sim B$, $\sim A \cap B$ y $\sim A \cap \sim B$, sus probabilidades y las probabilidades condicionales que describimos más abajo. En consecuencia, la estructura de cantidades de los problemas que vamos a estudiar puede describirse contando con algunas de entre 16 cantidades diferentes: 8 probabilidades condicionales, 4 probabilidades intersección y 4 probabilidades marginales, que describimos a continuación:

Probabilidades condicionales: $p(A|B)$, $p(A|\sim B)$, $p(B|A)$, $p(B|\sim A)$, $p(\sim A|B)$, $p(\sim A|\sim B)$, $p(\sim B|A)$, $p(\sim B|\sim A)$.

Probabilidades intersección: $p(AB)$, $p(\sim AB)$, $p(A\sim B)$, $p\,(\sim A\sim B)$

Probabilidades marginales: $p(A)$, $p(\sim A)$, $p(B)$, $p(\sim B)$

Estas 16 cantidades están relacionadas por medio de 18 relaciones ternarias, de las cuales 10 son aditivas del tipo 4 o 5 y 8 son multiplicativas del tipo 3. Así, son relaciones ternarias aditivas las del tipo siguiente:

$$p(A) + p(\sim A) = 1 \tag{4}$$

$$p(A) = p(AB) + p(A \sim B) \tag{5}$$

Variando convenientemente los sucesos en las fórmulas 3, 4 y 5, se obtienen todas las relaciones ternarias que es necesario invocar para la resolución de los problemas que estamos estudiando en este trabajo, y que pueden verse en los cuadros siguientes:

**Cuadro 1** Relaciones ternarias aditivas entre probabilidades

| | |
|---|---|
| (*A*1) $P(AB) + P(\sim AB) = P(B)$ | (*A*6) $P(A\vert\sim B) + P(\sim A\vert\sim B) = 1$ |
| (*A*2) $P(A\sim B) + P(\sim A\sim B) = P(\sim B)$ | (*A*7) $P(B\vert A) + P(\sim B\vert A) = 1$ |
| (*A*3) $P(AB) + P(A\sim B) = P(A)$ | (*A*8) $P(B\vert\sim A) + P(\sim B\vert\sim A) = 1$ |
| (*A*4) $P(\sim AB) + P(\sim A\sim B) = P(\sim A)$ | (*A*9) $P(A) + P(\sim A) = 1$ |
| (*A*5) $P(A\vert B) + P(\sim A/B) = 1$ | (*A*10) $P(B) + P(\sim B) = 1$ |

**Cuadro 2** Relaciones ternarias multiplicativas entre probabilidades

| | |
|---|---|
| (*M*1) $P(B)\ P(A\vert B) = P(AB)$ | (*M*5) $P(A)\ P(B\vert A) = P(AB)$ |
| (*M*2) $P(B)\ P(\sim A\vert B) = P(\sim AB)$ | (*M*6) $P(A)\ P(\sim B\vert A) = P(A\sim B)$ |
| (*M*3) $P(\sim B)\ P(A\vert\sim B) = P(A\sim B)$ | (*M*7) $P(\sim A)\ P(B\vert\sim A) = P(\sim AB)$ |
| (*M*4) $P(\sim B)\ P(\sim A\vert\sim B) = P(\sim A\sim B)$ | (*M*8) $P(\sim A)\ P(\sim B\vert\sim A) = P(\sim A\sim B)$ |

En consecuencia, los problemas de probabilidad condicional que vamos a analizar se consideran aquí como problemas ternarios, problemas que:

1. Tratan con probabilidades conocidas y desconocidas. No todas las probabilidades desconocidas tienen por qué estar expresamente mencionadas en el texto del problema.
2. Todas las probabilidades conocidas y desconocidas están ligadas por relaciones ternarias.
3. Cada relación ternaria contiene, al menos, una probabilidad desconocida.
4. Todas las relaciones, en el caso en que haya más de una, se encuentran ligadas entre sí por una o dos probabilidades.
5. El objeto del problema consiste en la determinación de una o varias probabilidades desconocidas.

Las condiciones anteriores delimitan los problemas de probabilidad condicional que son objeto de estudio en este trabajo.

### EL GRAFO TRINOMIAL QUE REPRESENTA EL MUNDO DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL CON UN SUCESO CONDICIONADO A Y OTRO CONDICIONANTE B. (GPPC)

Cualquier relación ternaria del tipo 3, 4 o 5, puede representarse mediante aristas trinomiales orientadas:

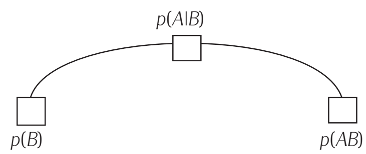


**Figura 1** Arista trinomial orientada para la relación ternaria 3

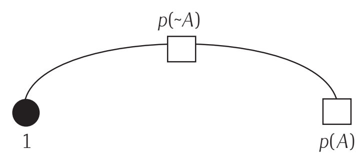


**Figura 2** Arista trinomial orientada para la relación ternaria 4

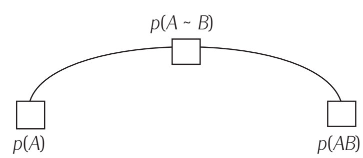


**Figura 3** Arista trinomial orientada para la relación ternaria 5

Cada una de esas aristas representa a una relación ternaria. Están formadas por tres vértices, cada uno de los cuales representa una cantidad (una probabilidad de algún suceso), y una línea curva que representa la relación entre las tres cantidades. Las aristas las consideramos orientadas multiplicativa o aditivamente de izquierda a derecha, lo que permite leer sobre ella las expresiones 3, 4 o 5.

A diferencia de los grafos ordinarios, donde cada arista relaciona dos vértices de la misma clase, un grafo trinomial es un grafo particular en el que cada arista relaciona tres vértices. Los vértices pueden ser de dos clases: vértices claros y vértices oscuros. Los vértices claros los utilizaremos para representar las cantidades desconocidas del problema, los vértices oscuros para representar las cantidades conocidas. Si las aristas representan relaciones entre las cantidades representadas en los vértices que contienen, las posibles aristas (figura 4) para los problemas que estamos estudiando son:

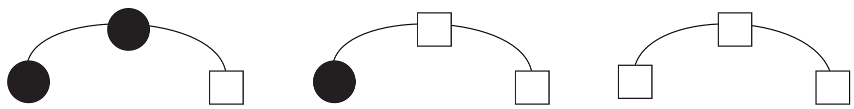

Figura 4 Aristas trinomiales orientadas con una, dos o tres cantidades desconocidas o, lo que es lo mismo, con dos, una o ninguna cantidad conocida en el problema

Por otra parte, todas las relaciones ternarias representadas en los cuadros 1 y 2 pueden representarse mediante aristas trinomiales. Consideremos, además, por separado, el conjunto de las relaciones de los cuadros 1 y 2 y representémoslas mediante aristas con vértices claros para las probabilidades y oscuro para el número 1, probabilidad del suceso seguro $\Omega$. Con ello tendremos un total de 18 aristas, tantas como relaciones, de las que 12 tendrán sus tres vértices claros y 6 dos vértices claros y un vértice oscuro para el número 1. Además, en los cuadros 1 y 2 podemos observar cómo hay probabilidades que forman parte de más de una relación ternaria. En consecuencia, las cantidades que dan cuenta de esas probabilidades, tomadas ahora como vértices de aristas, son vértices de más de una de las 18 aristas consideradas.

Así, es posible construir un sistema entrelazado de las 18 aristas consideradas, en el que los nudos de enlace entre aristas sean precisamente el número 1 y los vértices que representan idénticas probabilidades. Llevando a la práctica este juego arquitectónico nos proporciona el grafo 1 (figura 5).

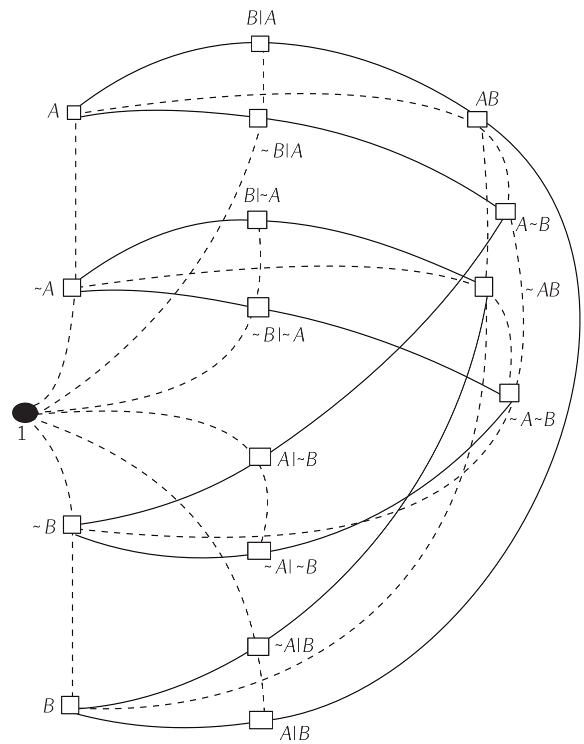


**Figura 5** Grafo 1, grafo trinomial de las cantidades y relaciones en los problemas ternarios de probabilidad condicional.

Llamaremos grafo de los problemas de probabilidad condicional (GPPC) al grafo trinomial representado en el grafo 1. El GPPC es pues un modo de representar simultáneamente las 18 relaciones de los cuadros 1 y 2, con la diferencia sustantiva de que en él sólo se simboliza una única vez cada una de las probabilidades. Ello permite, en el análisis del problema, invocar fácilmente, para una probabilidad conocida o desconocida, las relaciones en las que está involucrada dicha probabilidad y, en el caso de que sea objeto de la pregunta del problema, el conocimiento de las relaciones de las cuales nos podemos servir para determinarla.

Por otro lado, el diseño arquitectónico del GPPC es intencionado. Así, se han situado en columna, y de izquierda a derecha, los vértices que corresponden a probabilidades marginales, condicionales e intersección, reservando otra "columna" a la izquierda para el número 1.[1] El número 1, probabilidad del suceso seguro, es un dato en cualquier problema de probabilidad, también en los de probabilidad condicional, dato que está implícito en el enunciado. La disposición es horizontal, en lo posible, para las aristas que representan relaciones multiplicativas, lo que junto con la situación de las columnas permite leer: multiplicación, división, según el sentido del recorrido: izquierda-derecha, derecha-izquierda. Las aristas que representan relaciones aditivas están dispuestas, en lo posible, en posición vertical y dicho carácter se refuerza mediante la representación a trazos.

Otros hechos conocidos, que se expresan en las relaciones de los cuadros 1 y 2, son mostrados por el GPPC con gran claridad. Así, los órdenes o número de aristas que concurren en un vértice, orden que es 2 para los vértices que representan probabilidades condicionales, 4 para marginales e intersección y 6 para el número 1, indican el número de relaciones en las que está inmersa tal probabilidad. La mera inspección de un vértice indica, además, las relaciones concretas y la naturaleza aditiva o multiplicativa en la que está involucrada la probabilidad representada por él.

Debemos indicar, y éste es un asunto fundamental, que en el GPPC no constan únicamente vértices oscuros y claros y aristas con una arquitectura determinada, sino que constan además signos que señalan cada vértice individual. Tales signos son los que designan a los sucesos *A*, *AB*, *A~B*, etc., e incluso los *A|B*, con la misión de identificarlos. Los vértices son las probabilidades de los sucesos designados, números con los que es posible realizar las operaciones aritméticas representadas en las aristas. Por otro lado, entre los sucesos las operaciones son de índole conjuntista, dejando de lado los "sucesos condicionados", operaciones que no están representadas mediante aristas en el GPPC, sino en los signos utilizados para designarlos.

El GPPC puede considerarse como un grafo esquema para los problemas de probabilidad condicional, ya que, para cualquier problema ternario de probabilidad condicional, el mundo posible de los sucesos, probabilidades y relaciones entre éstas al que un problema puede referir se agota en lo contenido en el GPPC, excepción hecha de las operaciones entre sucesos como hemos señalado.

Cualquier problema concreto de probabilidad condicional se puede representar en el GPPC oscureciendo los vértices que corresponden a las probabilidades que son datos del problema y señalando las probabilidades por las que el problema pregunta. Puesto que los problemas que estamos tratando implican pro-

[1] En el análisis de sucesos, el vértice señalado con 1 corresponde al suceso cuya probabilidad mide el espacio muestral $\mathbf{\Omega}$.

babilidades condicionales como datos o como incógnita, la columna central del grafo siempre estará señalada. Además, una vez representado el problema en el GPPC es posible utilizar dicho grafo tanto para mostrar su estructura como para resolver el problema. De esto se trata en lo que sigue.

## EL GRAFO TRINOMIAL DE UN PROBLEMA TERNARIO DE PROBABILIDAD CONDICIONAL: DEL TEXTO DEL PROBLEMA AL GRAFO

Consideremos el problema siguiente (problema 1):

> *Un abogado, antes de aceptar un caso, pide que todos sus posibles clientes sean examinados por la máquina de la verdad. Experiencias anteriores muestran que la probabilidad de que la máquina declare a una persona culpable es 0.9, si es culpable, y que la probabilidad de que la declare no culpable es 0.99 si no es culpable. Si se escoge a un cliente al azar entre un grupo de clientes en el que solamente 5% son culpables, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina de la verdad declare a este cliente culpable?*

La lectura del problema identifica:

*1.* Los sucesos mencionados en el texto:
La máquina declara culpable y declara no culpable, suceso este último no mencionado explícitamente en el texto.
Los clientes son culpables, no culpables.

*2.* Los "sucesos condicionados" mencionados a través de sus probabilidades condicionadas: la máquina declara culpable si es culpable, la máquina declara no culpable si no es culpable, esto es, cuando la maquina funciona correctamente.
De la lectura podemos asignar a estos sucesos los signos $A$, $\sim A$, $B$ y $\sim B$ para representarlos en el GPPC:

$A$ = declarado culpable por la máquina
$\sim A$ = declarado no culpable por la máquina
$B$ = Ser culpable
$\sim B$ = Ser no culpable.

Así, las probabilidades mencionadas en el enunciado son $p(A|B)$, $p(\sim A|\sim B)$ y $p(B)$ con los valores siguientes: $p(A|B) = 0.9$, $p(\sim A|\sim B) = 0.99$, $p(B) = 0.05$, donde la pregunta del problema es $p(A)$. Al trasladar dicha información al GPPC, se señalan en negrita los sucesos, se oscurecen los vértices que son datos y se señala la incógnita del problema, y así tendremos el grafo de la figura 6:

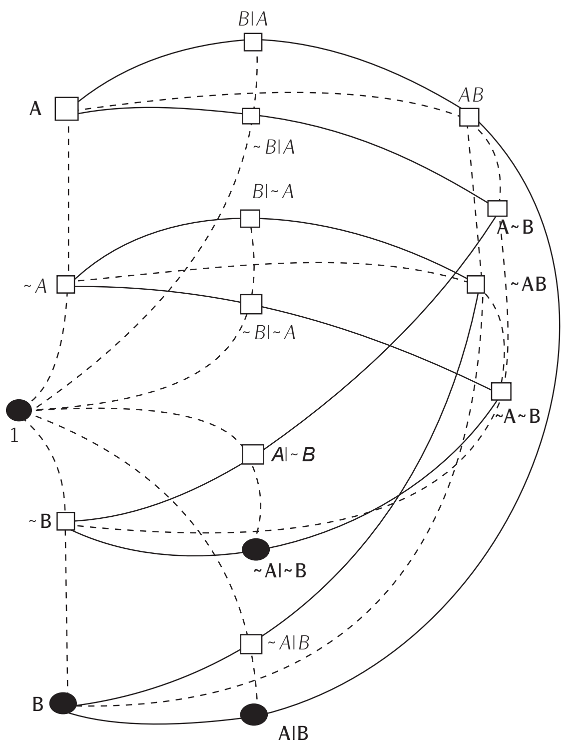


**Figura 6** Grafo 2, GPPC de la lectura del problema 1

Si consideramos las aristas del GPPC en las que están inmersas las probabilidades de los sucesos considerados, tendremos –bajo en gris– el grafo (figura 7) que podríamos considerar como de referencia del problema, ya que los sucesos que se mencionan pueden evocar implícitamente todas esas relaciones.

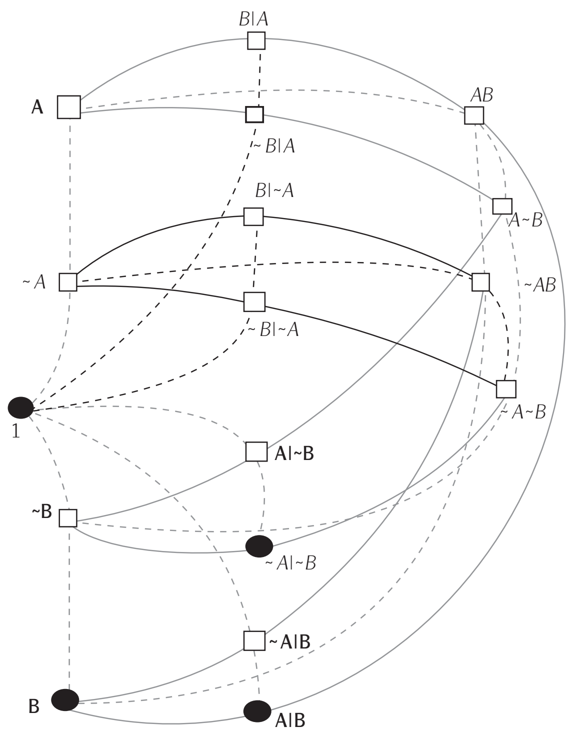


**Figura 7** Grafo3, GPPC de referencia del problema 1

Ahora bien, si queremos resolver el problema, debemos encontrar una disposición de relaciones que permita determinar la incógnita del problema, y para ello, debemos proceder con método. Procediendo pues con el método de análisis-síntesis, y utilizando para empezar el método en su vertiente sintética, podemos proceder a determinar todas aquellas probabilidades que sean determinables a partir de los datos. En el grafo, determinar quiere decir oscurecer el vértice claro de una arista que ya posee dos vértices oscuros y que, por tanto, es una entrada al grafo. Haciendo esto sobre el grafo de la figura (grafo 3) obtendremos el grafo (en gris) de la figura grafo 3a donde, como puede observarse, no se ha determinado $p(A)$, la probabilidad incógnita del problema. Sin embargo, se han determinado, entre otras probabilidades, la probabilidad $p(AB)$ que comparte dos aristas –en trazo grueso en la figura grafo 3b– con $p(A)$, la incógnita del problema.

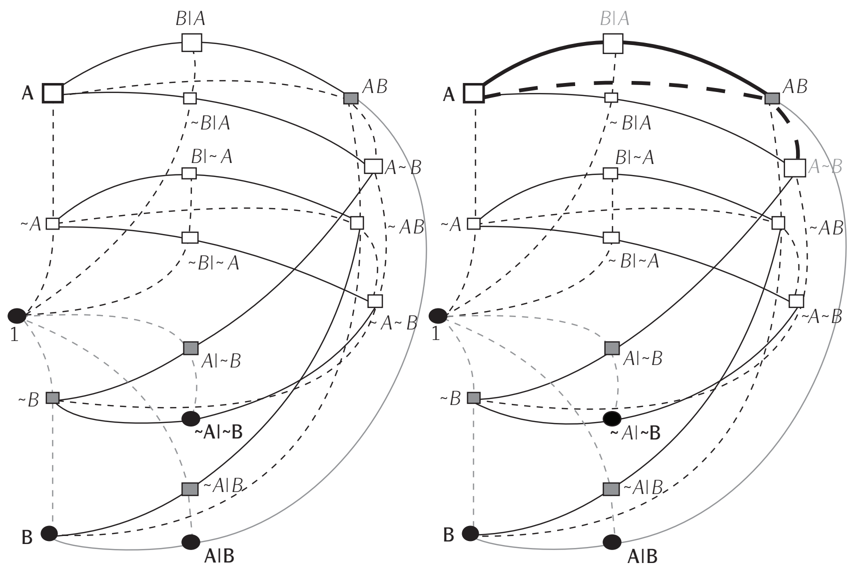


**Figura 8** Grafo 3a y grafo 3b, respectivamente

Puesto que $p(A\text{~}B)$ es un vértice claro que pertenece, entre otras, a la arista $P(\text{~}B)$–$P(A|\text{~}B)$–$P(A\text{~}B)$, con los vértices oscuros $p(\text{~}B)$ y $p(A|\text{~}B)$, dicha probabilidad $P(A\text{~}B)$ es directamente determinable y mediante ella $P(A)$, la incógnita del problema, lo que se muestra en los pasos 1 y 2 con el grafo 4 de la figura 9.

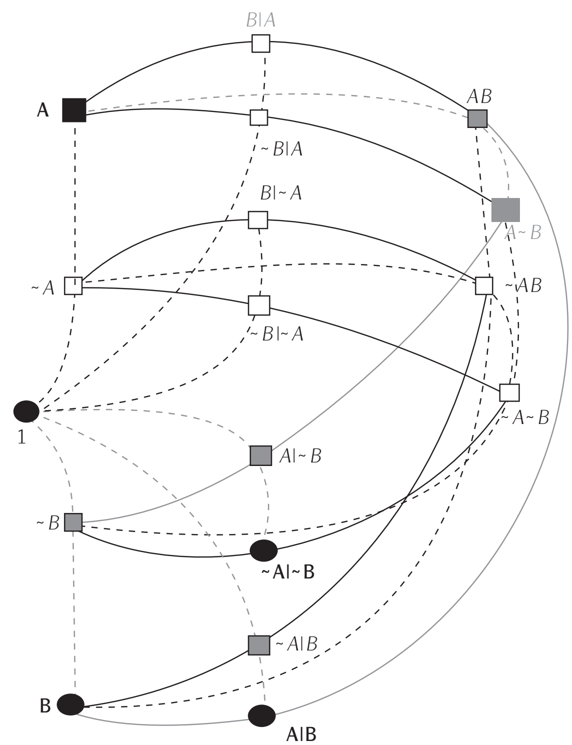


**Figura 9** Grafo 4

Si ahora consideramos únicamente el subgrafo del GPPC (señalado en gris) utilizado en el análisis-síntesis del problema, éste será el representado en la figura 10.

A este grafo (grafo 5), fruto del método de análisis-síntesis, lo consideraremos un grafo del problema, ya que contiene los datos, la incógnita, las incógnitas auxiliares y las relaciones entre éstas que permiten determinar la incógnita del problema.

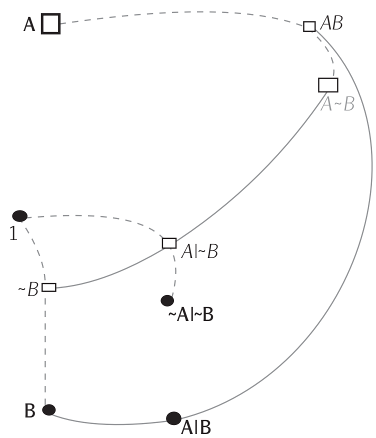


**Figura 10** Grafo 5

El grafo construido es un plan para resolver el problema fruto del método de análisis-síntesis. La solución de éste requiere la determinación efectiva de la probabilidad por la que pregunta el problema; ello se hace utilizando el grafo como guía para determinar progresivamente las incógnitas auxiliares, lo que se hace oscureciendo el grafo. En nuestro caso mediante la secuencia (en negrita las probabilidades que son datos):

$$p(AB) = \mathbf{p(A|B)} \times \mathbf{p(B)}$$

$$p(\sim B) = \mathbf{1 - p(B)}$$

$$p(A|\sim B) = \mathbf{1 - p(\sim A|\sim B)}$$

$$p(A \sim B) = p\ (A|\sim \mathrm{B}) \times p(\sim B) = \mathbf{[1 - p(\sim A|\sim B)] \times [1 - p\ (B)]}$$

$$p(A) = p\ (AB) + p(A \sim B) = \mathbf{p(A|B) \times p(B) + [1 - p\ (\sim A|\sim B)] \times [1 - p\ (B)]}$$

La solución del problema es, pues, una expresión aritmética:

$$p(\mathrm{A}) = p(AB) + p(A \sim B) = \mathbf{p(A|B) \times p(B) + [1 - p\ (\sim A|\sim B)] \times [1 - p\ (B)]}$$

$$= 0.9 \times 0.05 + (1 - 0.99) \times (1 - 0.05) = 0.0545$$

No en todos los problemas de probabilidad condicional el método de análisis-síntesis nos conduce a un grafo que permite determinar la probabilidad pedida mediante una expresión aritmética, lo que indica que los procedimientos aritméticos no son suficientes para resolver todos los problemas de probabilidad condicional. Este asunto es tratado también en otros trabajos, por ejemplo, véase Yánez (2001)

Así consideremos el siguiente problema (problema 2):

*Un abogado, antes de aceptar un caso, pide que todos sus posibles clientes sean examinados por la máquina de la verdad. Experiencias anteriores muestran que la probabilidad de que la máquina declare a una persona culpable es 0.9 si es culpable, y que la probabilidad de que la declare no culpable es 0.99 si no es culpable. Sabemos también que, si la máquina declara a alguien culpable, la probabilidad de que sea culpable es 0.95. Si se escoge a un cliente al azar entre un grupo de clientes que han sido examinados por la máquina de la verdad, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina de la verdad declare a este cliente culpable?*

Utilicemos los signos $A$, $\sim A$, $B$ y $\sim B$ para los sucesos:

$A$ = declarado culpable por la máquina
$\sim A$ = declarado no culpable por la máquina
$B$ = Ser culpable
$\sim B$ = Ser no culpable.

Las probabilidades $p(A|B)$, $p(\sim A|\sim B)$ y $p(B|A)$ son datos y la pregunta del problema es $p(A)$.

Al proceder, como en el caso anterior, a señalar en el GPPC los sucesos y las probabilidades que son datos, y procediendo sintéticamente, todo lo que puede obtenerse directamente a partir de los datos nos quedaría representado en el grafo 6a de la figura 11, en el que, como se ve, no es posible obtener inmediatamente $p(A)$. Si procedemos de modo analítico partiendo de la incógnita $p(A)$, en el grafo 6b constan dos pasos de uno de los análisis que podemos utilizar para determinar $p(A)$. El color gris de los vértices indica que al determinar éstos, estaría determinado $p(A)$.

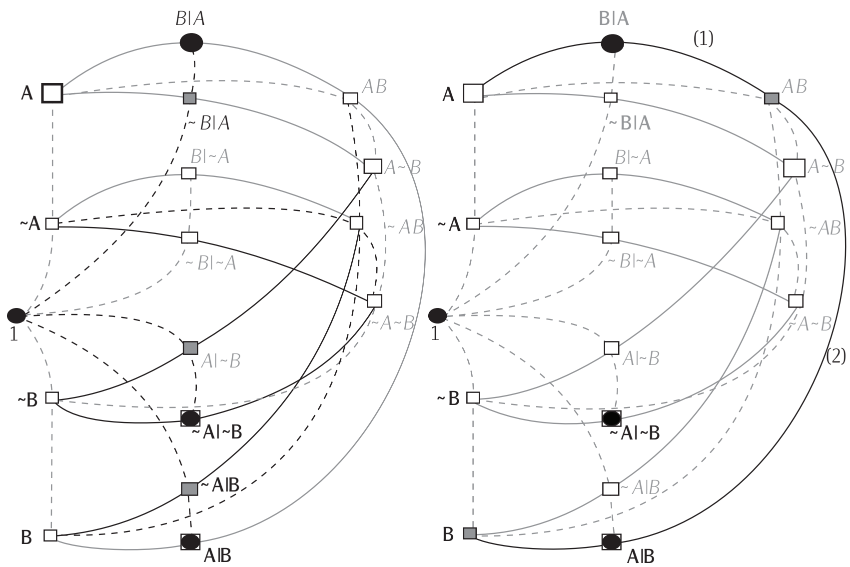


**Figura 11** Grafo 6a y grafo 6b para el problema 2

Los grafos (7a y 7b de la figura 12) muestran los pasos subsiguientes de un análisis que no culmina, pues no termina en datos, sino de donde partió, de la incógnita del problema $p(A)$. Puede examinarse que ninguno de los análisis posibles de $p(A)$ puede terminar en datos, en nuestro caso en una arista con dos vértices oscuros.

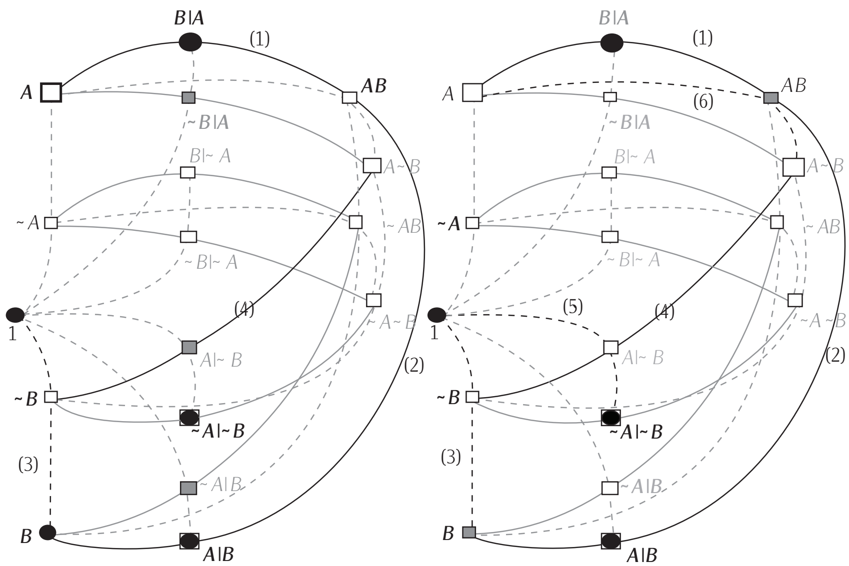


Figura 12 Grafo 7a y grafo 7b para el problema 2

El grafo (grafo 8, figura 13) fruto del análisis efectuado es:

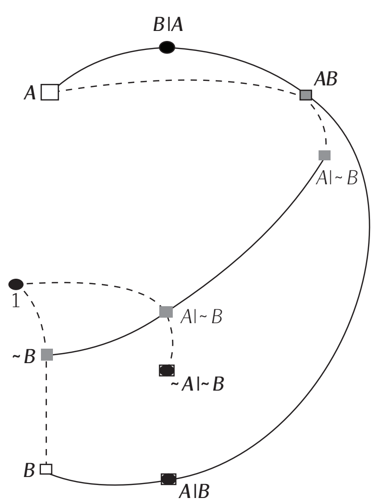


Figura 13 Grafo 8 de referencia del problema 2 (relaciones aditivas a trazos)

Existen otros análisis posibles que utilizan otras incógnitas auxiliares; no hay para ello más que elegir otra arista en cualquiera de los pasos, pero cualquier análisis que se efectúe, como puede probarse por examen de posibilidades sobre el GPPC o sobre el sistema de ecuaciones simultáneas, fruto de sustituir los datos del problema en los cuadros 1 y 2, conduce a un grafo (figura 13) que no proporciona, en nuestro caso, una expresión aritmética para la incógnita.

## EL GRAFO Y EL CONJUNTO DE ECUACIONES DEL PROBLEMA

En consecuencia, puesto que necesitamos tener una nueva arista que sea entrada al grafo para poder destruirlo, es decir convertir todos los vértices claros en obscuros, es necesario considerar una cantidad desconocida como conocida en alguna de las aristas con algún vértice oscuro. Es razonable suponer que $x = p(A)$ sea el vértice adicional que se oscurece (figura 14).

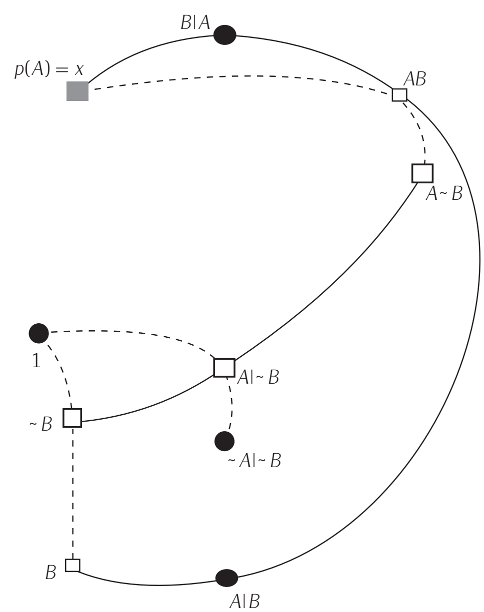


**Figura 14** Grafo 8 sobredimensionado con $p(A) = x$

Ahora bien, el grafo de la figura 14 puede destruirse aplicando el algoritmo de destrucción que ya usamos con anterioridad en el problema 1, o lo que es lo mismo, partiendo de una entrada al grafo, recorrerlo de tal suerte que los vértices claros se conviertan en oscuros (figura 15)

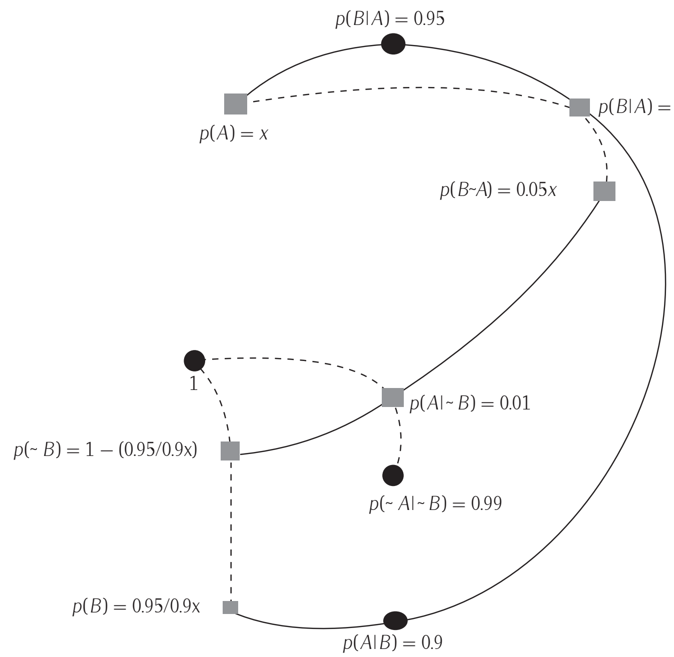


**Figura 15** Grafo resultante de la destrucción del grafo 8

La lectura del grafo, en todos los sentidos que permiten sus diferentes aristas, produce colisiones[2] en los vértices oscurecidos. Así, dos aristas que colisionan en un vértice producen una ecuación que resuelve la cantidad introducida como conocida y así todas las demás.

De esta manera, por ejemplo, la figura 16 representa lecturas diferentes de la arista que relaciona $p(\sim B)$, $p(A|\sim B)$ y $p(A\sim B)$ produciéndose colisiones en los distintos vértices, por ejemplo en el vértice $p(A\sim B)$.

[2] Una colisión en un vértice significa llegar a él por más de una arista de las que concurren en él.

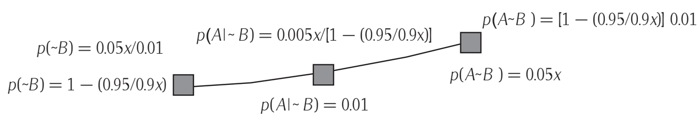


**Figura 16** Lecturas de la arista del grafo 8 que relaciona $p(\sim B)$, $p(A|\sim B)$ y $p(A\sim B)$

En dicho vértice se producen dos cantidades, 0.05x y $\left(1-\dfrac{0.95x}{0.9}\right)\times 0.01$, para una misma probabilidad. En consecuencia, la lectura da lugar a una ecuación que resuelve x:

$$\left[1-\frac{0'95x}{0'9}\right]\bullet 0'01 = 0'05x$$

Otros posibles movimientos por la arista del grafo (figura 16) producen nuevas colisiones que a su vez producen nuevas ecuaciones, dependiendo de si igualamos en $p(A|\sim B)$ o en $p(\sim B)$, respectivamente:

$$1-\frac{0'95x}{0'9} = \frac{0'05x}{0'01}$$

$$0'01 = \frac{0'05x}{1-\dfrac{0'95x}{0'9}}$$

Todas estas ecuaciones son matemáticamente equivalentes, pues todas tienen la misma solución.

En el grafo de la figura 15 hemos introducido como cantidad conocida $x = p(A)$ y hemos trabajado con ella como si fuera conocida. Así, hemos obtenido un conjunto de ecuaciones, todas equivalentes, asociadas a esta incógnita. Pero podemos considerar en el grafo otras cantidades desconocidas como cantidades conocidas que también nos permiten destruir el grafo y, en consecuencia, poder disponer de nuevos conjuntos de ecuaciones diferentes de las que produjo la situación creada en el grafo de la figura 15. Así, por ejemplo, si consideramos el suceso *B*, ser culpable, y que su probabilidad es conocida, $p(B) = x$, la destrucción ahora del grafo está dada en la figura 17.

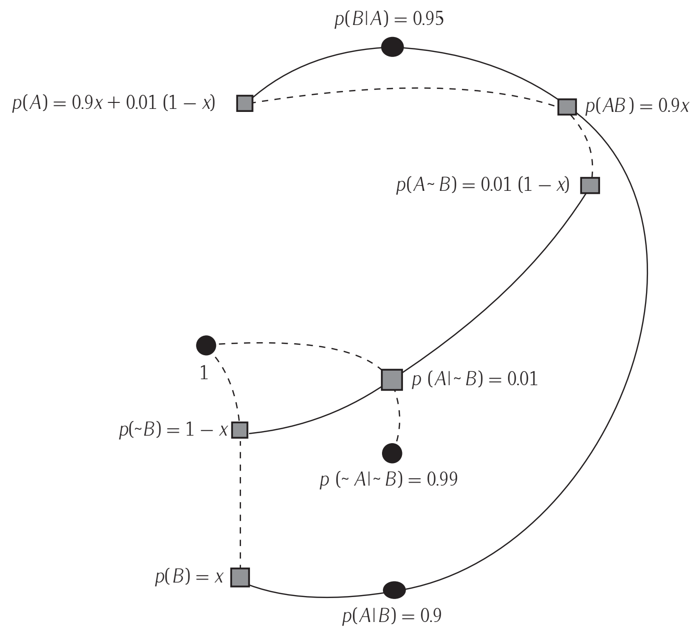


**Figura 17** Grafo 9, grafo 8 sobredimensionado con $p(B) = x$

La arista de este grafo representada en la figura 18 produce colisiones en todos sus vértices, en función de cómo se realice la lectura (figura 19):

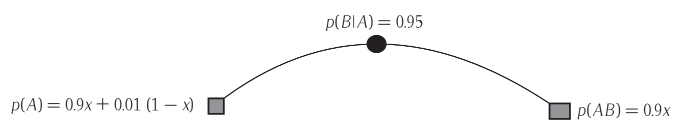


**Figura 18** Arista del grafo 9 que relaciona $p(A)$, $p(B|A)$ y $p(AB)$

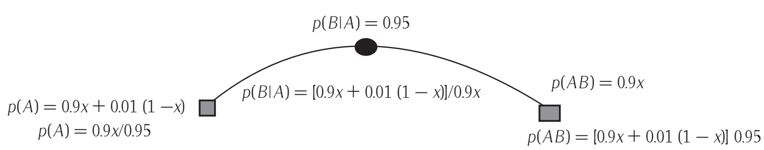


**Figura 19** Lecturas posibles de la arista de la figura 18

Dichas colisiones dan lugar al siguiente conjunto de ecuaciones, matemáticamente equivalentes entre ellas, pero no equivalentes a las que se obtuvieron al considerar x = *p*(*A*):

$$\text{a) } [0'9x + 0'01(1-x)] \bullet 0'95 = 0'9x$$

$$\text{b) } \frac{0'9x}{0'95} = 0'9x + 0'01(1-x)$$

$$\text{c) } \frac{0'9x + 0'01(1-x)}{0'9x} = 0'95$$

Pueden surgir nuevas ecuaciones en función de las cantidades desconocidas que supongamos conocidas o identificadas como incógnitas. En el cuadro siguiente se proporciona la lista de ecuaciones que resuelven el problema planteado con sólo hacer todas las posibles combinaciones de entradas al grafo trinomial del problema que permita aplicar el algoritmo de destrucción de éste.

**Cuadro 3** Lista de ecuaciones para el problema 2

| Incógnita | Lista de ecuaciones para esa incógnita | Solución del problema en función de la incógnita |
|---|---|---|
| *p*(*A*) = *x* | $\left(1-\frac{0.95x}{0.9}\right)\bullet 0.01 = 0.05x$<br>$1-\frac{0.95x}{0.9} = \frac{0.05x}{0.01}$<br>$0.01 = \frac{0.05x}{1-\frac{0.95x}{0.9}}$ | *x*, la misma en la ecuación, |
| *p*(*B*) = *x* | $[0.9x + 0.01(1-x)] \bullet 0.95 = 0.9x$<br>$\frac{0.9x}{0.95} = 0.9x + 0.01(1-x)$<br>$\frac{0.9x + 0.01(1-x)}{0.9x} = 0.95$ | Cualquiera de las dos,<br>0.9*x* + 0.01 (1 − *x*),<br>0.9*x* |

**Cuadro 3** Lista de ecuaciones para el problema 2 (conclusión)

| | | |
|---|---|---|
| $p(\sim B) = x$ | $[0.01x + 0.9(1-x)] \bullet 0.95 = 0.9(1-x)$<br>$0.95 = \dfrac{0.9(1-x)}{0.01x + 0.9(1-x)}$<br>$\dfrac{0.9(1-x)}{0.95} = 0.01x + 0.9(1-x)$ | Cualquiera de las dos, $0.01x + 0.9(1-x)$, $\dfrac{0.9(1-x)}{0.95}$ |
| $p(A\sim B) = x$ | $0.9\left(1-\dfrac{x}{0.01}\right) = 0.95 \bullet \left[0.9\left(1-\dfrac{x}{0.01}\right)+x\right]$<br>$0.95 = \dfrac{0.9\left(1-\dfrac{x}{0.01}\right)}{0.9 = \left(1-\dfrac{x}{0.01}\right)+x}$<br>$\dfrac{0.9 = \left(1-\dfrac{x}{0.01}\right)}{0.95} = 0.9 = \left(1-\dfrac{x}{0.01}\right)+x$ | Cualquiera de las dos, $\dfrac{0.9\left(1-\dfrac{x}{0.01}\right)}{0.95}$<br>$0.9\left(1-\dfrac{x}{0.01}\right)+x$ |
| $p(AB) = x$ | $\left(1-\dfrac{x}{0.9}\right) \bullet 0.01 = \dfrac{x}{0.95} - x$<br>$0.01 = \dfrac{\dfrac{x}{0.95} - x}{1-\dfrac{x}{0.9}}$<br>$1-\dfrac{x}{0.9} = \dfrac{\dfrac{x}{0.95} - x}{0.01}$ | $\dfrac{x}{0.95}$ |

Como señala Cerdán (2005), en relación con la familia de problemas aritmético-algebraicos y que reinterpretamos aquí para los problemas ternarios de probabilidad condicional, estudiar el conjunto de ecuaciones asociados a un problema ofrece a los profesores e investigadores una información muy valiosa sobre la competencia de los resolutores en el uso de conceptos y relaciones en el proceso de resolver dichos problemas. Particularmente en aspectos variados como, por ejemplo, *a)* preferencia por la elección de una cantidad, de entre las distintas cantidades desconocidas disponibles, para designarla como incógnita del problema; *b)* número de cantidades desconocidas designadas como incógnitas; *c)* la producción de otras ecuaciones no esperadas del conjunto de ecuaciones disponibles; *d)* el sentido de la referencia o de la cantidad escogida para establecer la igualdad en la ecuación y, por último, *e)* disponer de un marco para analizar la dificultades y errores de los resolutores en la resolución de los problemas.

## EL DIAGRAMA DE ÁRBOL, LA TABLA DE CONTINGENCIA, LOS GRAFOS TRINOMIALES Y LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Es bastante habitual que los problemas ternarios de probabilidad condicional se enseñen a resolver mediante el uso de tablas de contingencia (Shaughnessy, 1992) y diagramas de árbol (Engel, 1975; Parzysz, 1990), como un metalenguaje cuyos signos permiten representar los resultados posibles de un proceso aleatorio como sucesos y las probabilidades o frecuencias de dichos sucesos. Ambas herramientas poseen una estructura interna para la representación de sucesos y probabilidades que permite, después, usar las reglas de cálculo asociadas para producir nuevas probabilidades.

En consecuencia, la enseñanza nos sugiere el uso de las tablas de contingencia, los diagramas de árbol o el álgebra para resolver los problemas de probabilidad condicional. Utilizo esas herramientas por separado o en combinación, una más adecuada a un problema, otras a otros problemas, aunque sólo con la exigencia de ser competente con sus signos y reglas.

Consideremos una tabla de contingencia como la que representamos a continuación (cuadro 4):

**Cuadro 4** Tabla de contingencia para los sucesos $A$ y $B$

| | $A$ | $\sim A$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | $P(AB)$ | $P(\sim AB)$ | $P(B)$ |
| $\sim B$ | $P(A\sim B)$ | $P(\sim A\sim B)$ | $P(\sim B)$ |
| | $P(A)$ | $P(\sim A)$ | 1 |

En esta tabla, todas las relaciones que se establecen entre las probabilidades implicadas son relaciones ternarias aditivas, las cuales podemos reconocer también en el cuadro 1. En consecuencia, los signos y la estructura interna de esta tabla pueden traducirse al lenguaje de los grafos trinomiales, obteniendo un grafo de los problemas que pueden ser resueltos usando una tabla como la del cuadro 4 (figura 20).

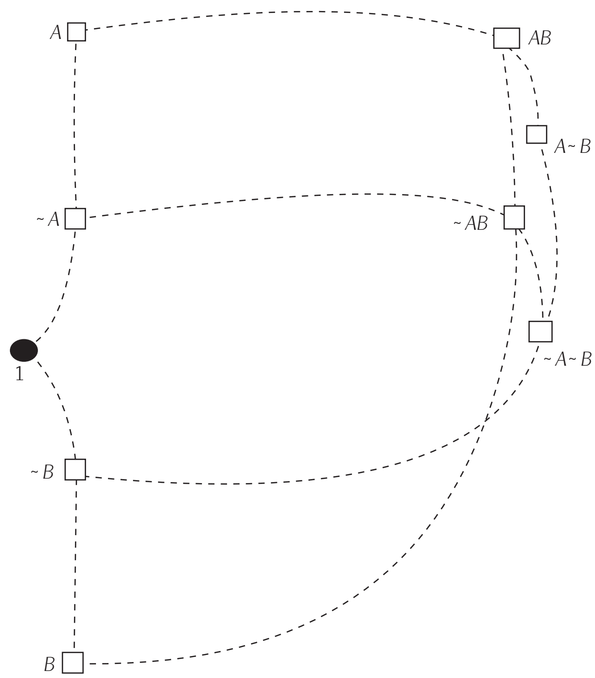


**Figura 20** Grafo 10 del submundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional resolubles mediante tablas de contingencia

El grafo de la figura anterior (grafo 10) está formado por 9 probabilidades y 6 relaciones aditivas, no contiene probabilidades condicionales y, por tanto, no hay relaciones entre éstas y las probabilidades marginales y de intersección; es decir, sin relaciones multiplicativas. De aquí que el submundo de problemas ternarios de probabilidad condicional que pueden resolverse usando solamente tablas de contingencia es extremadamente limitado, debido a la pobreza de la estructura de cantidades y relaciones en la que está inmerso.

Por otra parte, los árboles siguientes son los dos diagramas de árbol a los que nos vamos a referir como primer y segundo diagrama de árbol (figuras 21a y 21*b*))

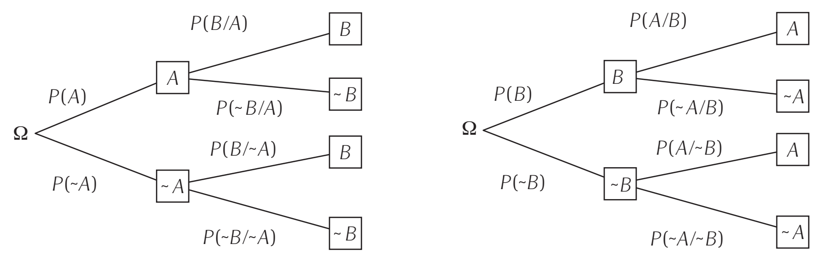


**Figura 21a y figura 21b, respectivamente** Diagramas de árbol para dos sucesos *A* y *B*

Un análisis de la estructura interna de estas herramientas nos permite ver como la probabilidad del espacio muestral (Ω) se distribuye a lo largo de cada árbol siguiendo las reglas del producto y de la suma. Esas reglas están expresando relaciones ternarias entre probabilidades que podemos reconocer tanto en el cuadro 1 como en el cuadro 2. Por tanto, cantidades y relaciones que están en los dos diagramas de árbol pueden traducirse a un grafo trinomial (grafo 11) como el de la figura 22, adaptación del grafo 1.

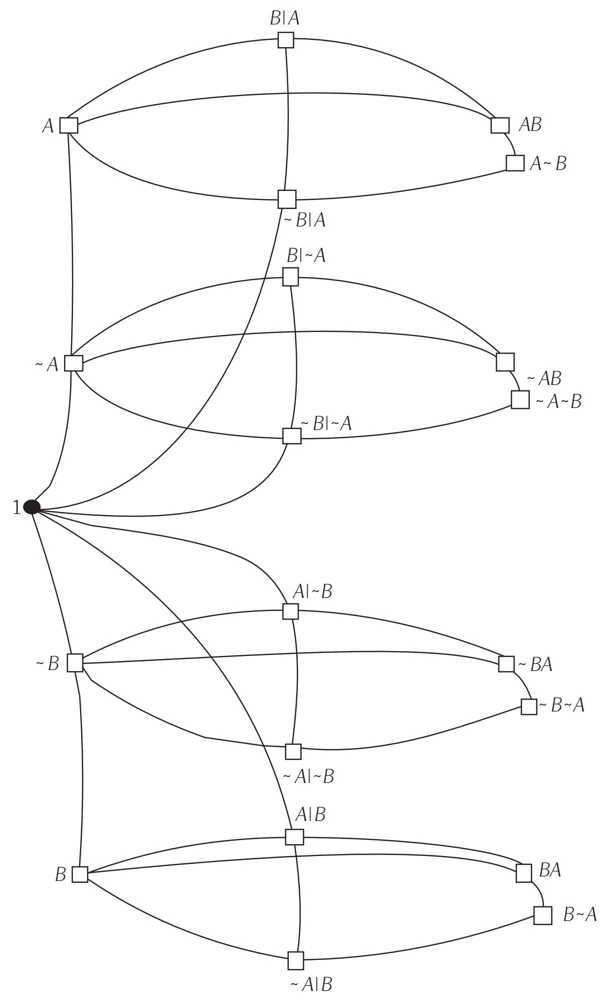


**Figura 22** Grafo 11, grafo trinomial de la estructura interna de los diagramas de árbol conjuntamente

Interesémonos por el problema 1 y la posibilidad de resolverlo usando o bien uno o bien los dos diagramas de árbol. Al introducir en el grafo 11 las cantidades conocidas en el problema y aplicar el algoritmo de destrucción, el grafo resultante puede verse en la figura 23.

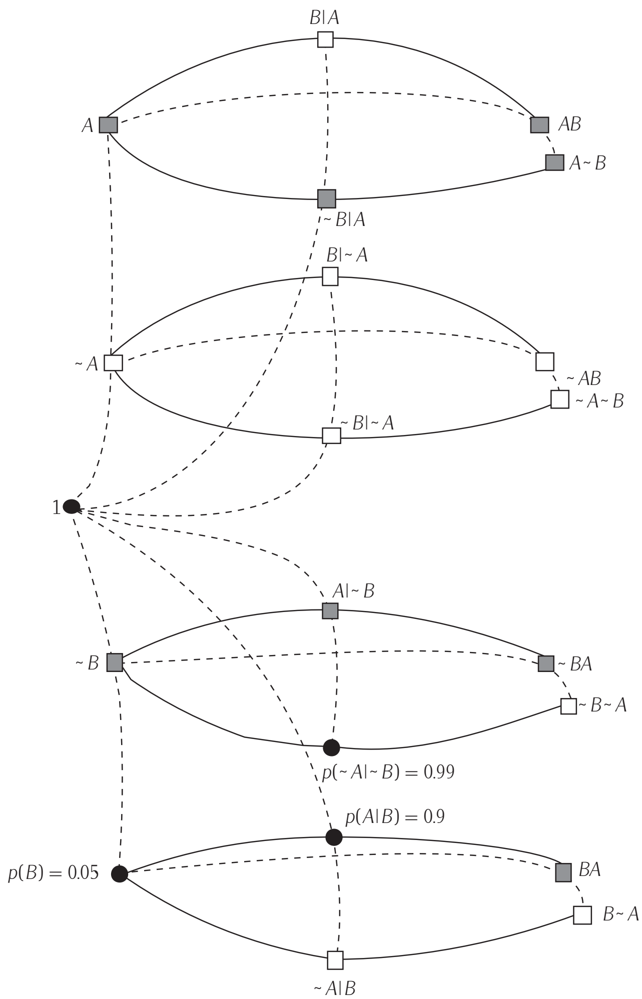


**Figura 23** Grafo 11 con las cantidades y relaciones que permiten obtener el dato pedido en el problema 1

Un análisis de este grafo nos permite conocer alguna cosa sobre el proceso de resolución del problema, una vez decidido el uso de los diagramas de árbol. El grafo de la figura 23 nos descubre que todas las cantidades conocidas pertenecen al segundo árbol, mientras que la pregunta del problema pertenece al primer árbol. En consecuencia, cualquier resolutor del problema que utilice esta herramienta necesariamente habrá de implicar a ambos diagramas de árbol. Además, como puede verse en la figura 24, el trabajo principal se lleva a cabo en el segundo diagrama, obteniendo nuevas cantidades que han de ser transferidas al primer diagrama:

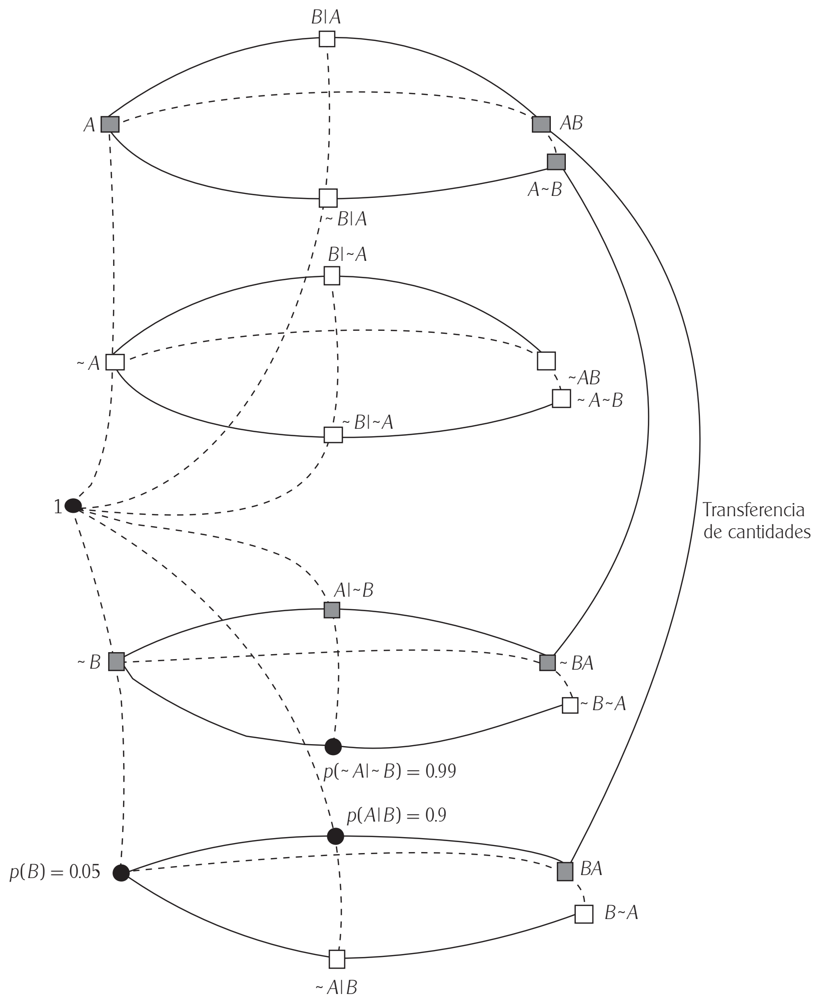


**Figura 24** Transferencia de datos entre los dos diagramas de árbol que resuelve el problema 1

El proceso de transferencia de cantidades de un diagrama a otro puede hacerse gracias a la conmutatividad del suceso intersección y, por tanto, a la igualdad de sus probabilidades, lo que los convierte en el enlace entre los dos diagramas. Por último, en el primer diagrama, y con el propósito de responder a la pregunta del problema, $p(A)$, todo resolutor ha de ser consciente de que toda la probabilidad marginal se distribuye en dos probabilidades de intersección a través de sendas probabilidades condicionales, la regla del producto.

## CONCLUSIONES

Como se sugiere en el título de este trabajo, se ha llevado el análisis de un mundo particular de problemas de probabilidad condicional poniendo en relación dos nociones, la de grafo trinomial y la de problema ternario. Tomados del mundo de problemas de probabilidad condicional aquellos que son ternarios, hemos construido el grafo trinomial que nos permite tener, todo a la vez, un esquema del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional. Los problemas se analizan en un nivel de análisis que deja fuera a los estudiantes y profesores, es decir, en el nivel que Puig y Cerdán (1988) llama de nivel I, en el que no hay más protagonista que el problema. No obstante, los problemas sujetos a análisis pertenecen al contexto escolar, y si existen, es a causa de que producen un aprendizaje de los conceptos relacionados con la probabilidad condicional.

Por otra parte, situar un problema de probabilidad condicional en este mundo significa planear su resolución analíticamente a través de su grafo trinomial. Como resultado de ese planteamiento uno se hace consciente de los aspectos relacionados con la estructura de cantidades y relaciones del problema. Dicho análisis, además, puede o no culminar en nuevos datos, dependiendo de los datos y de la pregunta del problema. El grafo producido es el que indica, entonces, si la solución del problema puede ser aritmética o algebraica. Si la solución es algebraica, un sencillo análisis combinatorio permite obtener todas las ecuaciones que resuelven el problema. En ambos casos, tanto si la solución es aritmética como si es algebraica, se dispone de todos las soluciones posibles del problema para dicho análisis, lo que permite examinar las producciones de los resolutores de los problemas, identificando éxitos, dificultades o errores.

Los grafos trinomiales nos han permitido, también, analizar dos herramientas que tradicionalmente se usan en la enseñanza de la resolución de los problemas de probabilidad condicional, las tablas de contingencia y los diagramas de árbol.

La estructura interna de estas herramientas se han traducido al lenguaje de los grafos trinomiales, a fin de disponer, de una sola vez, del mundo particular de problemas que resuelve cada una de ellas, lo que permite, a su vez, identificar qué estructura de cantidades y relaciones han de tener los problemas a fin de que cada representación, tomada de forma independiente o en conjunto, permita resolverlos.

Aun cuando en los grafos hemos incluido en los vértices signos para los sucesos, se nos antoja difícil realizar análisis de los sucesos en el plano semántico que permita resolver el problema mediante sucesos: los sucesos operan en una $\sigma$-álgebra y sus probabilidades en el intervalo [0,1]. Son, precisamente, las tablas de contingencia y los diagramas de árbol los que organizan las traducciones de un plano al otro. En consecuencia, es posible considerar el grafo trinomial, con las reglas nemotécnicas apuntadas, como otra herramienta para la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad condicional.

Lo anterior es una parte importante del potencial de los grafos trinomiales puestos al servicio de la confección de un plan (o esquema) para resolver un problema ternario de probabilidad condicional. Pero no hay que despreciar otras posibilidades que se pueden desprender de ello. Así, disponer de todo el mundo de problemas en un único grafo (grafo 1, figura 5) posee, en nuestra opinión, un gran potencial para la preparación de la docencia de estos problemas. El profesor tiene a su disposición todos los problemas que podría usar en su enseñanza, organizados y clasificados atendiendo a la estructura del grafo, lo que permite identificar problemas isomorfos y simetría del grafo. Puede, en consecuencia, tener un control exhaustivo sobre qué problemas, con qué estructura de cantidades y relaciones, son adecuados para sus alumnos y en qué momento. En general, puede disponer de una herramienta sobre la cual construir una estrategia de enseñanza para mejorar el aprendizaje de la probabilidad en los estudiantes.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cerdán, F. (2005), "Carácter aritmético o algebraico, isomorfía y complejidad de los problemas de la familia de problemas aritmético-algebraicos", Grupo Pensamiento Numérico y Algebraico, IX Simposio de la Sociedad Española de Investigadores en Educación Matemática, Córdoba, 7 a 10 de septiembre de 2005.

Engel, A. (1975), *L'enseignement des probabilités et de la statistiques,* 2 vols., CEDIC, París. [Traducción al castellano A. Engel, 1988, *Probabilidad y estadística,* 2 vols., Mestral, València.]
Evans, J., S. J. Handley, N. Perham, D.E. Over y V.A. Thompson (2000), "Frequency versus Probability Formats in Statistical Word Problems", *Cognition,* núm. 77, pp. 197-213.
Fridman, L.M., (1990), "Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas", *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de las Universidad de la Sonora,* núms. 17-18, pp. 51-59.
Girotto, V. y M. González (2001), "Solving probabilistic and statistical problems: a matter of information structure and question form", *Cognition,* núm. 78, pp. 247-276.
Hoffrage, U., G. Gigerenzer, S. Graus y L. Martignon (2002), "Representation Facilities Reasoning: What Natural Frequencies Are and What They Are Not", *Cognition,* núm. 84, pp. 343-352.
Huerta, M.P. y Ma. A. Lonjedo (2005), "Los problemas de probabilidad condicional en la Enseñanza Secundaria", *XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (XI JAEM),* edición en CD-ROM, Colección Encuentros Educativos, Canarias, Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias.
Lonjedo, M.A. y M.P. Huerta (2005), "The nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem resolution", Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), San Feliu de Guíxols (Sapin), 17 a 21 de febrero de 2005.
Parzyzs, B. (1990), "Un outil sous-estimé: L'arbre probabiliste", *Bulletin 372 de l'APMEP,* febrero, pp. 47-54.
Puig, L. y F., Cerdán, (1988), *Problemas aritméticos escolares,* Madrid, Síntesis.
——— (1990), "Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales", *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre investigación en Educación Matemática,* Cuernavaca, México, pp. 35-48.
Shaughnessy, M., (1992), "Research in Probability and Statistics: Reflexions and Directions", en D. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Nueva York, MacMillan, pp. 465-494.
Yánez, G., (2001), "El álgebra, las tablas y los árboles en problemas de probabilidad condicional", en P. Gómez y L. Rico (eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro,* Granada: Universidad de Granada.

## DATOS DE LOS AUTORES

**Fernando Cerdán**
Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, España
Fernando.Cerdan@uv.es

**M. Pedro Huerta**
Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, España
Manuel.P.Huerta@uv.es