Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Homero Flores, Ángel
Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato
Educación Matemática, vol. 19, núm. 1, abril, 2007, pp. 63-98
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40519104

Cómo citar el artículo
Número completo
Más información del artículo
Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org
Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato

Ángel Homero Flores

Resumen: Uno de los objetivos del currículo del bachillerato mexicano es formar alumnos más críticos y reflexivos. Una parte importante de un pensamiento crítico y reflexivo se puede fomentar mediante el desarrollo de un razonamiento deductivo, el cual, a su vez, está en la base de la demostración matemática. Los profesores de bachillerato son los encargados de formar este tipo de razonamiento en los estudiantes. Pero, *¿qué tanto los mismos profesores de matemáticas utilizan un razonamiento deductivo cuando resuelven problemas matemáticos?* En el presente artículo se presentan los resultados de un estudio sobre las prácticas argumentativas de profesores de bachillerato en México, cuando se enfrentan a actividades geométricas de construcción y validación en un ambiente de geometría dinámica. El estudio se hizo a través de un experimento de enseñanza y muestra el desarrollo de dos de los profesores participantes en cuanto a sus esquemas de argumentación y sus prácticas argumentativas. En el experimento de enseñanza se evidencia un uso deficiente del razonamiento deductivo. En un inicio, los profesores utilizan esquemas de argumentación simbólicos y fácticos, para pasar a un uso mayoritario de esquemas analíticos.

Palabras clave: Argumentación, geometría euclidiana, geometría dinámica, profesores de bachillerato.

Abstract: One of the goals of the Mexican curriculum at Bachillerato level is to form critical and reflective students. An important part of a critical and reflective thinking can be achieved through the development of a deductive reasoning. Mathematics teachers are the ones that must develop this kind of reasoning in students. But, *how much a mathematics teacher uses a deductive reasoning in his/her mathematical practice?* In this paper we present the results of a study about argumentative practices of Bachillerato teachers in Mexico, when they face geometrical activities on construction and validation within a Dynamical

Fecha de recepción: 18 de septiembre de 2006.

Geometry environment. The study was made through a teaching experiment, and shows the development of two of the participant teachers regarding their argumentative schemes and argumentative practices. In the teaching experiment there was an inadequate use of a deductive thinking. At the beginning of the teaching experiment, teachers use symbolic and factual argumentative schemes, and then they adopt, in most argumentative practices, analytical schemes.

Keywords: Arguing, Euclidean geometry, dynamical geometry, high school teachers.

INTRODUCCIÓN

Recientemente, en los diferentes programas del nivel medio superior o bachillerato mexicano ha habido reformas que apuntan a formar alumnos más críticos y reflexivos (Escuela Nacional Preparatoria, 1996; Colegio de Ciencias y Humanidades, 2003; Colegio de Bachilleres, 1993; Bachillerato Tecnológico, 2004).

Según nuestra tesis, un pensamiento crítico y reflexivo en los alumnos se puede lograr a partir del desarrollo de un razonamiento deductivo y de su capacidad para resolver problemas. De acuerdo con el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000, p. 56):

> El razonamiento matemático y la demostración ofrecen medios poderosos de desarrollo y expresión del entendimiento de una amplia gama de fenómenos. Las personas que razonan y piensan de manera analítica suelen observar patrones, estructuras o regularidades en situaciones reales y en objetos simbólicos; se preguntan si tales patrones son accidentales o si se presentan por alguna razón; y hacen conjeturas y demuestran.

Para un matemático, la demostración es la única manera de validar sus conjeturas y de formalizar sus resultados. Una demostración es una justificación formal de una conjetura que se basa en un encadenamiento lógico de premisas que lleva a una conclusión válida a través de un razonamiento deductivo. Por lo general, un matemático recurre a la demostración cuando tiene un alto grado de certeza de que su conjetura es verdadera y desea convencerse a sí mismo y a sus colegas de su validez. Así, la demostración es importante en la conformación de la teoría matemática.

En la matemática escolar,[1] la demostración, entendida como el proceso deductivo que lleva a la validación de conjeturas matemáticas, puede contribuir de manera notable al desarrollo de un pensamiento crítico y reflexivo en los alumnos. Este tipo de pensamiento, a su vez, redundará en un aumento en su capacidad para resolver problemas y para tomar decisiones dentro y fuera del ámbito escolar.

Así pues, la matemática escolar puede contribuir en gran medida a la formación de estudiantes críticos y reflexivos a través del fomento de un razonamiento deductivo y de la enseñanza de la demostración matemática.

Volviendo al problema de la formación docente, nos preguntamos si los profesores de bachillerato utilizan la demostración matemática y un pensamiento deductivo en sus prácticas argumentativas. La investigación, cuyos resultados se presentan en este trabajo, se centró en las *prácticas argumentativas y los esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato* cuando trabajan en actividades de geometría euclidiana.

Otro factor que es importante considerar en la formación de estudiantes críticos y reflexivos es el uso de paquetes computacionales de geometría dinámica, pues según algunos estudios, este tipo de software propicia el desarrollo de un razonamiento deductivo y un mejor acercamiento a la demostración matemática como vehículo del entendimiento (De Villiers, 2002; Dreyfuss y Hadas, 1987; Hanna, 2000; Furinghetti y Paola, 2003; Mariotti, 2000; Olivero, 2002; Christou, Mousoulides, Pittalis y Pitta-Pantazi, 2004; Southerland, Olivero y Weeden, 2004).

En la actualidad existen muchos programas de este tipo. Algunos, como *The Geometer's Sketchpad*, rebasan su objetivo inicial sobre la enseñanza de la geometría y ahora sirven para enseñar cualquier materia de matemáticas como álgebra y cálculo (*The Geometer's Sketchpad*, v. 4.0, 2003).

Teniendo en cuenta lo anterior, mediante un experimento de enseñanza, en *la investigación* de la cual deriva este artículo, se estudiaron las prácticas argumentativas, los esquemas de demostración y la influencia de la geometría dinámica en profesores de matemáticas de bachillerato: en particular se buscó respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

- *¿Cuáles son las características de las prácticas argumentativas de los profesores frente a un proceso de validación matemática?*

[1] Por matemática escolar entenderemos la matemática que se enseña en la escuela, a diferencia de la matemática formal que es la matemática que desarrolla e investiga un matemático.

- *¿Qué papel desempeña la herramienta tecnológica en el proceso de validación cuando el profesor tiene que utilizarla para realizar construcciones?*

En este artículo se presentan los resultados que tienen que ver con la respuesta a la primera pregunta de investigación.

ANTECEDENTES

Si se hace una revisión de los programas de estudio del bachillerato mexicano y lo que se dice en la mayoría de los libros de texto sobre el pensamiento deductivo y la demostración, podemos decir que en la enseñanza de las matemáticas se privilegia la función de la demostración como la única manera de establecer la validez matemática de un resultado, a fin de informar al estudiante cómo funciona un sistema deductivo, dándose más importancia a la forma que al contenido (Flores, 2007). Esta tendencia se evidencia también (y en opinión del autor, es una influencia) en los libros de texto que se utilizan en otros países (Alibert y Thomas, 1991, p. 215; Balacheff, 2000, pp. 2-3).

En este contexto, y de acuerdo con experiencias propias del autor de este artículo, la fuente de la validación del conocimiento está en el profesor, quien asume la posición de validar algo que de entrada ya es válido para los alumnos. Esto es, para la mayoría de nuestros estudiantes lo que dice el maestro es cierto (por eso es el maestro), y si llegaran a sorprenderlo en alguna falla o en algún error, los libros de texto sirven para reestablecer la validez del resultado.

En estudios y trabajos que resaltan la importancia de la demostración y las dificultades que se tienen en la escuela para desarrollar en los alumnos un pensamiento deductivo –que es uno de los requisitos necesarios para entender la demostración matemática y para adquirir la habilidad de hacer demostraciones en el bachillerato (Alibert y Thomas, 1991; Balacheff, 2000; Battista y Clements, 1995; Duval, 1991, 1999; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Hoyles y Jones, 1998; Knuth, 2002; Mariotti, 1997; Moore, 1994; Radford, 1994; Senk, 1985, entre otros)–, se identifican tres aspectos que podrían ser causa de las dificultades sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática:

- La concepción de la matemática de alumnos y profesores, en particular con respecto a la validación del conocimiento matemático.
- La transición de una matemática práctica a una matemática formal; esto

en términos de la *formalidad* y el rigor que debe tener la matemática escolar.

- La manera como se plantea su enseñanza en los diferentes programas de matemáticas, en general como un tema a tratar de manera puntual en un cierto momento del programa: el razonamiento deductivo no se plantea como una habilidad por desarrollar en los alumnos.

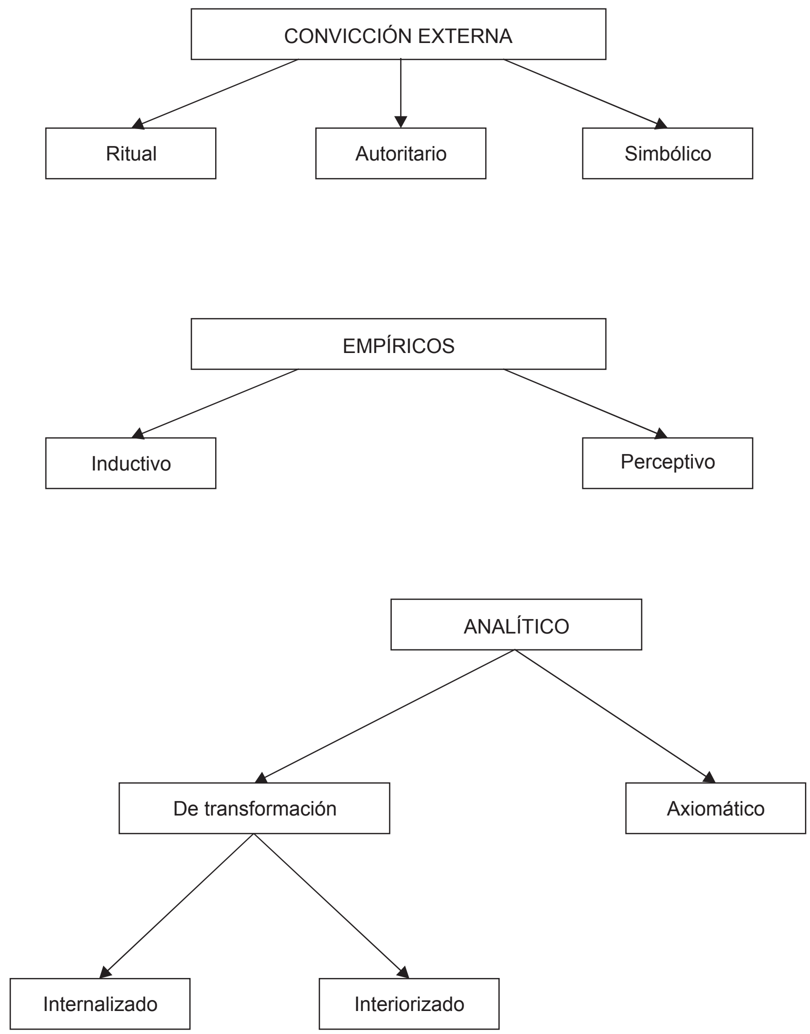
Según un estudio anterior (Flores, 2004, pp. 11-18; Flores, 2006) con profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades (UNAM-México), y basándonos en la propia experiencia en formación de profesores, a estos tres aspectos añadimos otros dos:

- La calidad del conocimiento matemático del profesor sobre la materia que se pretende enseñar.
- La capacidad de los profesores de matemáticas para utilizar un razonamiento deductivo en la argumentación matemática y su habilidad para realizar demostraciones matemáticas.

Esquemas de demostración

En la literatura existen trabajos de investigación que clasifican las prácticas argumentativas de estudiantes, como el trabajo de Harel y Sowder (1998) sobre esquemas de prueba (*proof schemes*) en estudiantes universitarios. En su estudio, estos autores definen esquema de prueba o demostración como todo aquello que conforma el autoconvencimiento y la persuasión para una persona, e identifican tres esquemas de demostración: convicción externa, empíricos y analíticos. En la figura 1, explicamos a grandes rasgos cada uno de ellos.

Figura 1 Esquemas de pruebas de demostración



Los *esquemas de convicción externa* dependen de la persona que lo pone en juego y cómo lo hace. En este caso, una argumentación es válida si es una autoridad quien la realiza (esquema autoritario); si depende de su apariencia (esquema ritual); y si en el proceso de argumentación existe un uso superfluo y no consistente de la simbología matemática (esquema simbólico).

Los *esquemas empíricos* son aquéllos en los que las conjeturas se validan apelando a hechos físicos (esquema inductivo) o a experiencias de percepción sensorial (esquema perceptivo).

Los *esquemas analíticos* son aquéllos en los que el individuo utiliza deducciones lógicas para validar conjeturas. Si durante una validación el individuo usa la transformación de los objetos mediante un proceso deductivo y una anticipación de los resultados de tal transformación, entonces el esquema será un *esquema de transformación*; si, además, el individuo está conciente de que existen términos indefinidos y axiomas, entonces se trata de un *esquema axiomático*.

En su informe sobre los esquemas de demostración de los estudiantes, Harel y Sowder (1998, p. 238) aclaran el carácter no definitivo de su estudio:

> Caracterizamos los resultados de esta investigación como exploratorios. El sistema de esquemas de demostración descrito aquí debe ser validado por otros investigadores a través de múltiples experimentos de enseñanza realizados por instructores en diferentes instituciones. Más adelante, en el marco teórico, abundaremos algo más sobre estos esquemas y daremos a conocer nuestra posición al respecto.

Geometría dinámica

La posibilidad de tener computadoras en el aula con paquetes computacionales de geometría dinámica hace importante considerar un estudio del uso de software de geometría dinámica (GD), pues según algunas investigaciones este tipo de software propicia el desarrollo de un razonamiento deductivo y un mejor acercamiento a la demostración matemática como vehículo del entendimiento.

En la actualidad existen muchos programas de GD, algunos incluso rebasan su objetivo inicial sobre la enseñanza de la geometría y ahora sirven para enseñar cualquier materia de matemáticas como álgebra y cálculo (*The Geometer's Sketchpad,* v. 4.0, 2003).

Según la literatura revisada, la GD en la resolución de problemas de construcción tiene algunas características y potencialidades que la hacen útil para el presente estudio. Estas características son:

- Puede ayudar en la transición de una argumentación empírica a una deductiva (Hoyles y Jones, 1998; Gravina, 2000).
- Mejoraría la apreciación de la naturaleza y el propósito de la demostración matemática (Hoyles y Jones, 1998).
- Ayudaría a mejorar la capacidad de generalizar de los estudiantes (Pressmeg, 1999).
- Sitúa al usuario en un contexto teórico (Mariotti, 2000; Southerland, Olivero y Weeden, 2004).
- Puede servir para eliminar conjeturas que parecían razonables (Giamati, 1995).
- Contribuye a la construcción conjunta del conocimiento (Mariotti, 2000).
- Puede servir de enlace entre el mundo fenomenológico y el teórico (Mogetta, 2001).

CONCEPTOS UTILIZADOS

En la presente sección definiremos los conceptos que se utilizarán en el análisis de los resultados del presente estudio.

Por *pensamiento crítico y reflexivo* se entenderá el tipo de pensamiento que lleva a un individuo a considerar las opciones disponibles en una situación dada, de modo que la decisión que tome sea la más fundamentada y la mejor posible.

Con respecto a los esquemas de argumentación que utilizan los profesores de bachillerato, éstos no corresponden completamente a los detectados por Harel y Sowder (1998). En particular, en profesores de bachillerato, encontramos dos esquemas no caracterizados por estos autores: un esquema de recuento fáctico o simplemente fáctico y uno simbólico (definidos más adelante, Flores 2004, 2006).

Esta diferencia en los esquemas la atribuimos a que el estudio de Harel y Sowder se hizo con alumnos universitarios y no con profesores de bachillerato en activo; y las actividades y los ejercicios a los que se enfrentaron los alumnos venían de diferentes ramas de la matemática (no exclusivamente de la geometría). Además, habría que recordar el carácter exploratorio y no definitivo de su estudio y la necesidad de una validación de los esquemas (Harel y Sowder, 1998, p. 238).

Lo que se hace en el presente estudio es retomar y adecuar a nuestras condiciones el vocabulario establecido por estos autores. Pero cabe señalar que las definiciones de los conceptos utilizados en el marco teórico fueron determinadas especialmente para el presente estudio.

Prácticas argumentativas y esquemas de argumentación

Cuando un profesor o un estudiante de matemáticas realiza actividades de construcción geométrica o de resolución de problemas en las que es necesario justificar, explicar o validar sus resultados y las conjeturas que surgen en este proceso, pone en juego una práctica argumentativa.

Así, por *práctica argumentativa* entenderemos el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema.

A la manera en que el individuo utiliza sus razonamientos durante una práctica argumentativa se le llamará *esquema de argumentación*.

Los *esquemas de argumentación* pueden ser:

- *Autoritarios,* es decir, sus argumentaciones se apoyan en las afirmaciones hechas por alguna *autoridad*. En nuestro caso puede ser un compañero profesor, un libro de texto o el instructor del curso.
- *Simbólicos,* en los que el profesor utiliza un lenguaje matemático y símbolos de una manera superflua y poco consistente, sin llegar realmente a las conclusiones a las que quiere llegar. En este tipo de esquemas pueden mencionar conceptos poco claros o inventados. Como *rectángulo equilátero* o el *trapecio regular*.
- *Fácticos,* en los que el profesor hace un recuento de lo que hizo o repite los hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado. A menudo, el profesor expone una serie de pasos como si fueran un algoritmo.
- *Empíricos,* en los que el profesor se apoya en hechos físicos o en un dibujo. En este caso, el dibujo constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para visualizar un argumento.
- *Analíticos,* en los que el profesor sigue una cadena deductiva, sin que por ello llegue forzosamente a una conclusión válida.

La función de una práctica argumentativa es convencer a otros individuos de la validez de un resultado o de una conjetura.

Por lo general, en un principio los esquemas de argumentación de un profesor suelen ser exclusivamente autoritarios, rituales y fácticos o una combinación de ellos. Conforme se avanza en el desarrollo de las prácticas argumentativas, los esquemas se vuelven empíricos y analíticos.

En los esquemas empíricos y analíticos es posible detectar el uso de un razonamiento deductivo.

Por *razonamiento deductivo* entenderemos la cadena de ideas o razones que llevan a una conclusión. En este sentido, diremos que en un razonamiento deductivo existen una o más afirmaciones (llamadas premisas) que apoyan la conclusión.

Este tipo de razonamiento será válido si las premisas que llevan a la conclusión son válidas. (Para una explicación detallada del tema véase, por ejemplo, Yershov y Paliutin, 1994; y Garrido, 1983).

La justificación de un resultado es el proceso de validación de éste. Una conjetura es una afirmación o un resultado que no ha sido validado.

En muchas ocasiones, las prácticas argumentativas de un individuo muestran una combinación de esquemas. Por ejemplo, es posible que en ciertas prácticas argumentativas encontremos un esquema empírico que en ciertos puntos se vuelva analítico o que haga uso de un esquema fáctico.

Una práctica argumentativa no siempre lleva a la justificación de un resultado o conjetura. Esto dependerá del tipo de esquema de argumentación que se utilice. El único esquema de argumentación que puede llevar a una conclusión o a un resultado válido o a la validación de una conjetura es el esquema analítico, aunque el uso de esquemas analíticos no es garantía de llegar a la validación de una conjetura.

Definimos *demostración* o *prueba* como el resultado de una práctica argumentativa que se apoya en esquemas analíticos cuyos razonamientos son válidos. Si la práctica argumentativa se lleva a cabo en la resolución de problemas matemáticos, entonces hablaremos de una *demostración o prueba matemática*.

Experimento de enseñanza

La parte experimental del presente trabajo se inspira en la filosofía que sustenta la investigación acción (Lewin, 1946; Mora, 2005; Carr y Kemmis, 1986). Esto es, el objetivo del experimento es hacer una indagación sobre las prácticas argumentativas de los profesores, al mismo tiempo que se trata de fomentar su razonamiento deductivo; se quiere ver qué papel desempeña la geometría dinámica en la validación de conjeturas al mismo tiempo que se fomenta el uso del software para hacer construcciones y buscar razones sobre su validez.

Como consecuencia, un estudio sobre las prácticas argumentativas de los profesores debería hacerse sobre las producciones de los docentes en este ámbito, y sobre el razonamiento utilizado para la justificación de dichas producciones. Para ello es importante diseñar un instrumento que permita al investigador tener acceso tanto a las producciones como a su forma de razonamiento.

En opinión del autor del presente artículo, los hallazgos de la investigación educativa básica por lo general tardan mucho en ser aplicados en un salón de clase, y cuando *aterrizan*, con frecuencia son insatisfactorios u obsoletos. Por tanto, uno de los principales objetivos de un experimento de enseñanza sería minimizar la división que existe entre investigación y práctica. Este objetivo se puede lograr si el investigador, o el profesor que lleva la investigación, tiene oportunidad de reflexionar sobre su propio conocimiento en ambientes en los que se vea involucrado; en una toma de decisiones en la que los resultados obtenidos impliquen, de manera inherente, descripciones, explicaciones o predicciones que revelen la manera en que se está interpretando la situación.

Puesto que parte de los propósitos de un experimento de enseñanza es:

> ...ir más allá de la descripción de estados de conocimiento sucesivos y hacer conjeturas sobre los procesos y los mecanismos que promueven el desarrollo de un estado a otro, es importante crear ambientes de investigación que induzcan cambios en los sujetos cuyo conocimiento o habilidades se estén investigando, al tiempo que se minimizan influencias no interesantes impuestas por figuras de autoridad (Lesh y Kelly, 1999, p. 200).

Para el presente trabajo se instrumentó una *enseñanza exploratoria* que es un experimento de enseñanza en el que el énfasis se pone en los aspectos experimentales de la enseñanza y no en la prueba de hipótesis (Steefe y Thompson, 1999, p. 274). Al poner el énfasis en los aspectos experimentales de la enseñanza (principalmente en las actividades de enseñanza), es posible detectar prácticas y concepciones o creencias de los participantes, al tiempo que se promueve el conocimiento y el cambio de concepciones entre ellos.

El experimento de enseñanza consistió en un curso que comprende un cuestionario diagnóstico, actividades de construcción, discusiones grupales y reflexiones críticas de cada sesión. Las actividades, en su mayoría de resolución de problemas, se llevaron a cabo en el entendido de que *se aprende matemática haciendo matemática*.

Respecto a las actividades de resolución de problemas en un experimento de enseñanza, Lesh y Kelly (1999, p 202) afirman que con actividades de modelación es posible:

> ...estructurar tareas de modo que el o los investigadores aprendan y documenten su aprendizaje. Para lograr esto es importante tener oportunidades para representar este conocimiento y reflexionar sobre él. Esto se puede hacer si se pone la atención en actividades de resolución de problemas o de toma de decisiones en las que los resultados impliquen descripciones, explicaciones o predicciones justificadas que revelen explícitamente cómo se está interpretando la situación de resolución de problemas.

Dentro de un salón de clase existen tres elementos que interactúan entre sí para el logro del aprendizaje: el alumno (en nuestro caso profesores de bachillerato en activo), el profesor (en este caso el investigador) y el medio ambiente de enseñanza. Este último comprende todo lo que rodea el proceso de enseñanza y aprendizaje: el salón de clase (mobiliario y disposición de éste), materiales de enseñanza, tipo de actividades, tratamiento de las actividades en el aula, etcétera.

El medio ambiente de enseñanza que se propuso para el presente experimento es aquel que propicie la discusión matemática en torno a la corrección de las construcciones y a la formación y validación de conjeturas, así como la comunicación de los hallazgos a otros profesores-estudiantes, todo esto apoyado en el uso del paquete de geometría dinámica (GD), *The Geometer's Sketchpad,* v. 4.0. Las actividades fueron de construcción, de análisis y de discusión.

Las actividades de construcción incluyen la explicación del porqué funciona la construcción, es decir, implican un proceso de formación y prueba de conjeturas; éstas son las más importantes de la propuesta, pues en ellas se tiene que poner atención a las relaciones entre los elementos que las conforman y al proceso de construcción en sí. Según una hipótesis de Healy y Hoyles (2001, p. 238),

> ...las explicaciones derivadas de la interacción con computadoras serán formalizables con más facilidad en cadenas deductivas lógicas que las explicaciones que surgen de actividades en las que los procesos de construcción se quedan en un nivel implícito.

Por su parte, Mariotti (2000, p. 32) afirma que cuando se presenta un problema de construcción en el ambiente de geometría dinámica...

> ...la justificación de la corrección de una figura solución requiere una explicación de por qué algunas construcciones funcionan y otras no. Esto implica correr el foco de atención del dibujo obtenido al procedimiento que lo produjo. La lógica intrínseca de una figura de Cabri, expresada por su reacción a la prueba del arrastre, induce al estudiante a cambiar su atención al procedimiento, y al hacer esto se abre a una perspectiva teórica.

El curso

El curso, con una duración de 48 horas, fue impartido a 14 profesores de matemática de bachillerato tecnológico. Se tituló "La geometría euclidiana en un ambiente de geometría dinámica", y se dividió en ocho horas semanales en dos sesiones de cuatro.

Los objetivos del curso fueron:

- Fomentar un pensamiento deductivo en los participantes;
- Desarrollar la capacidad de utilizar un software de geometría dinámica, *The Geometer's Sketchpad,* para formar conjeturas y para obtener maneras de validarlas;
- Desarrollar la capacidad de comunicar hallazgos y resultados en la resolución de problemas matemáticos; y
- Reflexionar en la manera como el profesor podría llevar al aula los tres objetivos anteriores.

Las actividades giraron en torno a la siguiente temática, todo con el uso del software.

- Construcciones básicas
- La importancia de las definiciones
- Triángulos y cuadriláteros
- La geometría del círculo
- Teorema de Napoleón

La estructura del curso fue la siguiente: un cuestionario inicial o diagnóstico, actividades de construcción y validación de resultados, discusiones sobre el razonamiento deductivo y la demostración.

Las primeras actividades tuvieron el propósito de que los profesores se familiarizaran con el uso del software (en especial con las construcciones geométricas y la función de arrastre), y de que repasaran o adquirieran los conceptos geométricos básicos. Las siguientes actividades encaminaban a los profesores a formar conjeturas y tratar de validarlas, y a reflexionar sobre ciertos conceptos y teoremas que les serían útiles para la actividad final: demostrar el teorema de Napoleón (si formamos triángulos equiláteros en los lados de un triángulo cualquiera, entonces los centros de estos triángulos forman un triángulo equilátero).

Se pensó en este teorema como culminación de las actividades, ya que se puede obtener fácilmente como conjetura mediante una exploración de la construcción; su demostración no es inmediata e implica un nivel de conocimiento geométrico que pensamos es adecuado para profesores de bachillerato. Los conceptos y los resultados geométricos que se requieren para demostrar el teorema son un resumen de los conceptos geométricos básicos que se estudian en la mayoría de los programas de matemáticas de este nivel.

Esta estructura nos da la oportunidad de diseñar actividades de construcción y formación de conjeturas que van aumentando poco a poco su complejidad, hasta culminar con el mencionado teorema.

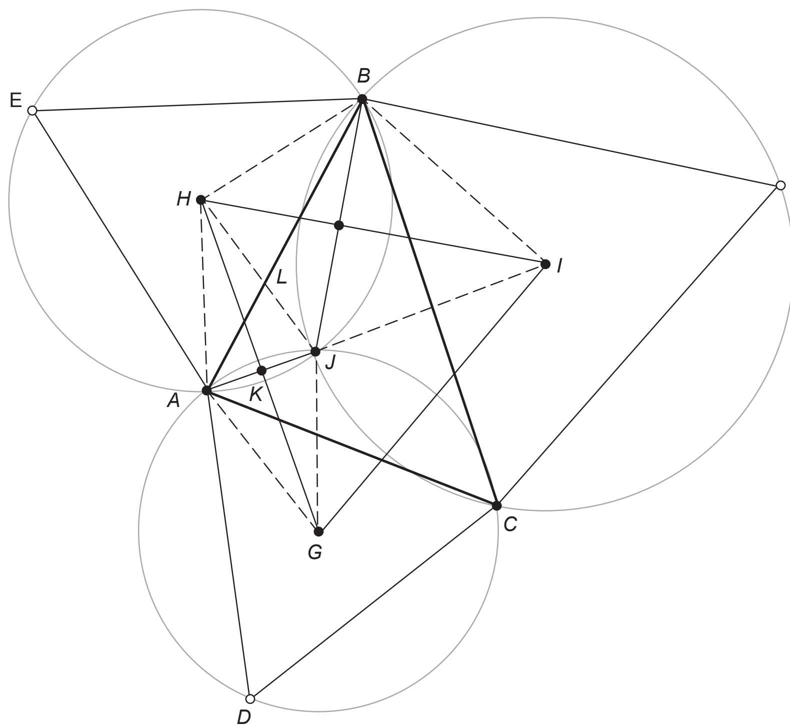
A continuación presentamos el teorema y un esbozo de su demostración.

Teorema de Napoleón

Los centros de los triángulos equiláteros construidos en los lados de un triángulo cualquiera son vértices de un triángulo equilátero.

En la figura 1 ilustramos el teorema.

Figura 1



Sobre los lados del triángulo *ABC* se forman los triángulos equiláteros *AEB, BFC* y *CDA* cuyos centros son *H, I* y *G,* respectivamente. El triángulo *HIG* es equilátero.

El esbozo de la demostración del teorema de Napoleón estaría en los siguientes términos.

- Los círculos circunscritos a los triángulos equiláteros se cortan en un solo punto (*J*), llamado punto de Fermat-Torricelli.
- El cuadrilátero *EAJB* es cíclico, por tanto sus ángulos opuestos suman 180°; esto quiere decir que el ángulo *AJB* (o *KJL*) mide 120° pues su opuesto *BEA* es ángulo interno del triángulo equilátero *AEB*.

- Los segmentos *HA* y *HJ* son congruentes, pues son radios de un mismo círculo; lo mismo podemos decir de los segmentos *AG* y *GJ*. Por consiguiente el cuadrilátero *AHJG* es un papalote.
- Como *AHGJ* es un papalote, entonces sus diagonales son perpendiculares, esto significa que el ángulo *HKJ* mide 90°.
- Un razonamiento similar nos lleva a establecer que el cuadrilátero *HBIJ* es un papalote y que el ángulo *HLJ* mide 90°.
- Teniendo en cuenta ahora el cuadrilátero *HKJL*, tenemos que $LHK = IHG = 360° - 120° - 90° - 90° = 60°$
- De manera parecida podemos demostrar que los ángulos *HIG* e *IGH* miden 60°, por tanto el triángulo *HIG* es equilátero.

Reiteramos, la actividad referente al teorema de Napoleón se plantea de manera que éste surja como una conjetura que se debe validar y no como un teorema ya demostrado.

Antes de llegar a esta actividad se plantearon otras que dan los elementos necesarios para validar la conjetura que lleva al teorema. Éstas son:

- ¿Qué es un papalote?: mediante exploraciones, el profesor encuentra los rasgos principales de un papalote y su relación con los demás cuadriláteros.
- Geometría del triángulo: en particular sobre los elementos de un triángulo y sus relaciones. Se puso particular énfasis en los centros de un triángulo.
- Geometría del círculo: aquí se hicieron actividades sobre ángulos central, inscrito y semiinscrito.
- Polígonos cíclicos: sobre esto se definió un cuadrilátero cíclico y se encontró la relación entre sus ángulos internos. Más adelante se generalizó esta relación a los ángulos internos de polígonos cíclicos.
- Punto de Fermat-Torricelli: se buscó la justificación a la afirmación que establece que los circuncírculos de los triángulos equiláteros construidos en los lados de un triángulo cualquiera se intersecan en un mismo punto.

Con excepción de la primera, el desarrollo de las sesiones se dio en los siguientes términos.

La sesión iniciaba con el planteamiento de los objetivos de la sesión y una recapitulación de las actividades anteriores, seguida de comentarios que el instructor consideraba relevantes sobre la reflexión crítica de la sesión anterior.

Después se procedía a realizar las actividades del día. Si era necesario, el instructor interrumpía la actividad para dar alguna indicación o para comentar algo con respecto al desarrollo de ésta. Durante las actividades, el instructor monitoreaba lo que cada equipo estaba haciendo, pasando de uno a otro, tomando notas, haciendo sugerencias o llevando las ideas de un equipo a otro. Al final de cada actividad, los profesores debían entregar su hoja de trabajo llena y la reflexión sobre la sesión. Las reflexiones se hicieron tratando de cubrir tres aspectos: *Qué sucedió en la sesión, cuáles cosas fueron relevantes* y *qué cambiaría de las actividades y su conducción*.

Los profesores

Los asistentes al curso son egresados de licenciaturas entre las que contamos ingenierías agrónoma, química, industrial, en computación y en electrónica, además de arquitectura y una licenciatura en pedagogía en ciencias naturales.

La experiencia docente de los participantes fue de 6 a 20 años.

Sólo dos profesores no enseñaban matemática sino informática, computación, física y química. Con excepción de uno de los participantes que había utilizado el programa Cabri-Géomètre, ninguno había usado un paquete de geometría dinámica.

Toma y análisis de datos

La información pertinente se tomó de las respuestas al cuestionario diagnóstico, las actividades de construcción, las reflexiones de cada sesión y notas de campo.

El cuestionario diagnóstico proporcionó información sobre el conocimiento previo de los profesores con respecto a los conceptos básicos de la geometría euclidiana y a la enseñanza de la demostración.

La información sobre las actividades de construcción se recabó en hojas de trabajo. Esto proporcionó información sobre el desempeño de los profesores en trabajo en equipo y del desarrollo de su conocimiento geométrico.

Con las reflexiones sobre las actividades y el desempeño del instructor y de sus compañeros, se recabó información sobre percepciones individuales de los participantes y el manejo del lenguaje. La información obtenida con los instrumentos anteriores se complementó con notas de campo del instructor.

Asimismo, la información recabada durante el desarrollo de las actividades se vertió en matrices de resultados y listas de cotejo. Las matrices de resultados permiten reunir y ordenar los datos a fin de comparar las respuestas con un estándar esperado; mientras que las listas de cotejo permiten ver con más detalle lo que se hizo en una cierta actividad. A continuación se presenta un ejemplo de la lista de cotejo que se hizo con respecto a una de las actividades. En esta actividad se pedía que definieran cuadrilátero; que construyeran un cuadrilátero cualquiera y el que se forma con los puntos medios de sus lados. A continuación se pedía que dijeran qué tipo de cuadrilátero es el de los puntos medios y justificaran su conjetura.

Cuadro 1 Lista de cotejo. Cuadrilátero de los puntos medios

Equipos	1	2	3	4	5	6
La definición es clara	✓	✓	✓	✓	✓	
La definición incluye todos los casos	✓	✓	✓	✓	✓	✓
La definición excluye los que no son cuadriláteros	✓				✓	✓
La definición no tiene redundancias	✓	✓	✓	✓	✓	
La construcción permite todos los cuadriláteros	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Eligieron correctamente los puntos medios	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Observaron que el cuadrilátero de los puntos medios es paralelogramo	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Intentaron una justificación			✓	✓		
Construyeron las diagonales del cuadrilátero original						
Observaron la construcción de triángulos semejantes		✓				
Localizaron ángulos congruentes						
Notaron el paralelismo entre la diagonal del cuadrilátero original y los lados del cuadrilátero de los puntos medios.						
Consideraron la suma de ángulos internos de un cuadrilátero						
Consideraron la suma de ángulos internos de un triángulo						
Construyeron las diagonales del cuadrilátero de los puntos medios				✓		
Notaron la perpendicularidad de las diagonales del cuadrilátero de puntos medios						
Notaron que las diagonales del cuadrilátero de los puntos medios se bisecan.						

Los datos de las actividades se analizaron teniendo en cuenta dos aspectos: el desarrollo y el desempeño de los profesores. El desarrollo de un profesor tiene que ver, principalmente, con el avance que tiene a lo largo del curso y el grado de aprendizaje que muestra. Mientras que el desempeño tiene que ver con el grado de éxito que tiene en las actividades particulares de enseñanza. Así, un profesor puede tener un buen desempeño y un desarrollo no muy significativo; y un profesor con desempeño no muy bueno, puede tener un buen desarrollo.

Análisis de resultados

Los resultados del experimento de enseñanza se analizan a partir de dos casos que consideramos representativos del grupo de profesores; ambos cuentan con preparación y desempeños diferentes que los sitúan en los dos extremos: uno con una preparación aceptable en matemática y con un buen dominio de la computadora, y el otro con carencias disciplinarias y sin experiencia con la computadora. El resto de los profesores se ubican entre estos dos extremos y su desempeño muestra rasgos similares a alguno de los dos analizados aquí.

En el cuadro 2 se muestran los esquemas de argumentación analíticos válidos y no válidos y el total de esquemas presentados por los 14 profesores del curso, así como los porcentajes de esquemas analíticos con respecto al total de los esquemas utilizados. En este cuadro se puede comparar el desempeño de los dos casos escogidos con respecto a los demás integrantes del taller.

Cuadro 2

Profesor	Total de esquemas	Esquemas analíticos	Esquemas analíticos válidos
* V (trabajó con R) Normalista: especialidad en Ciencias Naturales 20 años de docencia	16	10 (62.5%)	3 (18.75%)
O Ingeniería Química (trabajó con SC) 10 años de docencia	10	2 (20%)	0 (0%)
* J (Trabajó con RC) Ingeniería Electrónica 10 años de docencia	20	12 (60%)	6 (30%)
SC (Trabajó con O) Ingeniería Industrial 6 años de docencia	12	3 (25%)	1 (8.33%)
SP (trabajó con IP) Química Industrial 12 años	16	7 (43.75%)	4 (25%)
B (Trabajó solo) Ingeniería en Computación 7 años de docencia	10	3 (30%)	0 (0%)
M (Trabajó solo) Arquitectura 8 años de docencia	17	6 (35.29%)	2 (11.76%)
R (trabajó con V) Química Industrial 6 años de docencia	17	10 (58.82%)	3 (17.64%)
MP (trabajó con EJ) Ingeniería en Agronomía 8 años	10	4 (40%)	0 (0%)
RC (trabajó con J) Ingeniería en Computación 8 años	19	12 (63.15%)	5 (26.31%)
IP (trabajó con SP) Ingeniería en Computación 8 años de docencia	16	7 (43.75%)	3 (18.75%)

Cuadro 2 (conclusión)

Profesor	Total de esquemas	Esquemas analíticos	Esquemas analíticos válidos
EJ (trabajó con MP) Ingeniería Química 6 años de docencia	10	3 (30%)	0 (0%)
FG (asistió a dos sesiones) Ingeniería Civil 3 años	4	0 (0%)	0 (0%)
AJ (asistió a cinco sesiones) Contador 8 años de docencia	7	2 (28.57%)	2 (28.57%)

* Caso de estudio.

Esquemas de argumentación

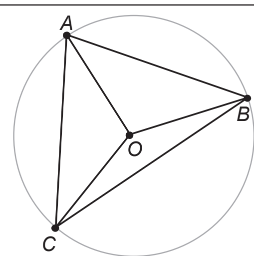
Profesor V

Normalista, licenciado en Ciencias Naturales. 20 años de experiencia docente en los niveles preescolar, primaria, secundaria y bachillerato. Poca experiencia con la computadora, ninguna experiencia con paquetes de geometría dinámica.

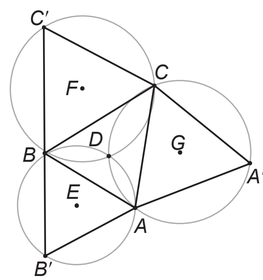
Este profesor no respondió el cuestionario diagnóstico porque no recordaba nada de geometría. Esto lo consignó en la hoja de respuestas entregada. En su comentario sobre la sesión argumentó que hacía mucho que no impartía la materia.

En la respuesta a las primeras actividades del curso mostró esquemas empíricos, fácticos y simbólicos; presenta algo que se podría considerar como un indicio de razonamiento deductivo, aunque propiciado por la interacción con su compañero de equipo. Más adelante, sin que abandone completamente los esquemas fácticos y empíricos, utiliza razonamientos deductivos en sus explicaciones y presenta esquemas analíticos. Lo anterior se sintetiza en el cuadro 3.

Cuadro 3

Actividad	Respuesta	Comentario
Construye un triángulo y une los puntos medios de sus lados. ¿Cómo son los triángulos que se forman? Explica tu respuesta	Construir un triángulo cualquiera y unir sus puntos medios de sus lados. De ahí se forman triángulos congruentes, porque al comparar triángulo con triángulo se toman como referencia los segmentos paralelos y que al mover un vértice de un triángulo los ángulos son correspondientes e iguales con respecto a la referencia de que hay dos triángulos iguales (del mayor sale uno pequeño)	Se trata de un esquema fáctico, combinado con uno empírico. El profesor hace un recuento de lo que hizo con su construcción. Con la función de arrastre comprobó el paralelismo de los lados de algunos triángulos. El profesor midió ángulos correspondientes y comprobó que la igualdad de las medidas se conservaba con el arrastre. Este pasaje corresponde a la segunda sesión del taller.
El instructor dio la demostración del hecho de que un ángulo inscrito mide la mitad del ángulo central que sustenta el mismo arco. La demostración se hizo tomando un diámetro como lado del ángulo inscrito. Después se pidió a los profesores que lo hicieran para el caso general.	 AOB + BOC + COA = 360° AOB + OBA + BAO + BOC + OCB + CBO = 360° AOB + OBA + BAO + BOC + OCB + CBO = AOB + BOC + COA OBA + BAO + OCB + CBO = COA 2BAO + 2CBO + COA 2OBA + 2CBO + COA ∴ 2(OBA + CBO) = COA	Esta respuesta está basada en un razonamiento parecido al que dio el instructor. Se trata de un esquema analítico, en donde la conclusión se desprende de las hipótesis Ésta es la primera vez que el profesor utiliza un esquema analítico A partir de esta actividad, es evidente un aumento sustantivo en el uso de esquemas analíticos que no se había dado antes. El pasaje corresponde a la quinta sesión del taller.

Cuadro 3 (conclusión)

Actividad	Respuesta	Comentario
Construye un triángulo. Con la herramienta que crea un triángulo equilátero y su circuncentro construye triángulos equiláteros en los lados del triángulo original. Traza ahora el circuncírculo de cada triángulo equilátero. ¿Qué tienen de particular los circuncírculos? Explica tu respuesta.	Que todos se intersectan en un punto."  B'BA = 60° B'DA = 60° CDA = 120° Se demuestra que el ∠CDA sí mide 120°, porque los lados ADCA' forman un cuadrilátero cíclico y la suma de sus ∠ miden 180° ∴ si el ángulo formado por CA'A es = 60° por un ∠ del triángulo equilátero se deduce que el ∠CDA = 120°. Para ∠BC'C = 60° BDC' = 60° ADB = 120° Esta deducción indica que nuevamente se tiene en cuenta un cuadrilátero cíclico y de ahí se encuentra que los tres segmentos se unen en la intersección de los circuncírculos.	En este ejercicio, el profesor utiliza un esquema de argumentación analítico. Aunque no llega a justificar su conjetura, los circuncírculos se intersecan en un mismo punto, sino que su argumento apunta a que los ángulos *CDA* y *ADB* miden 120°. La idea es hacer ver que la suma de los ángulos *ADB*, *BDC* y *CDA* es de 360°, con este hecho, el profesor pretendía demostrar que los circuncírculos de los triángulos equiláteros se intersecan en un mismo punto.

El profesor, después de 20 horas de curso, empezó a usar esquemas analíticos. El cambio en la manera de razonar de este profesor significó un gran avance en el desarrollo de sus esquemas de argumentación, pues se nota un mayor uso de esquemas analíticos y una mejor calidad en sus argumentaciones en cuanto al uso de conceptos geométricos. Lo anterior no significa que el profesor haya dejado atrás el uso de los esquemas empíricos, simbólicos y fácticos en sus prácticas argumentativas. Más bien empieza a evidenciarse un cambio en éstas que apuntan hacia esquemas analíticos.

En su producción escrita y oral se nota un mayor conocimiento geométrico y mayor seguridad en el uso de los conceptos geométricos.

Profesor J

Licenciado en Ingeniería Electrónica, con 10 años de experiencia docente en las materias de física y matemáticas. Tiene un buen dominio de la computadora y ninguna experiencia con programas de geometría dinámica.

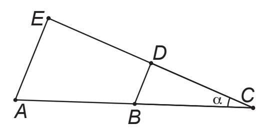
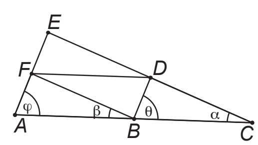
En un principio, este profesor utiliza esquemas empíricos y fácticos que abandona casi de inmediato cuando se da cuenta de que la intención es utilizar los hechos geométricos para apoyar sus argumentos.

En el cuadro 4 se muestran ejemplos de sus esquemas.

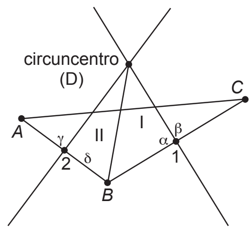
Cuadro 4

Actividad	Respuesta	Comentario
Un cuadrilátero cuyas diagonales se cruzan en su punto medio es un paralelogramo. Verdadera, falsa y por qué.	Verdadera. Lo podemos demostrar con un ejemplo sencillo, tomar una hoja tamaño carta, trazar sus diagonales y doblarlo por la mitad (largo y ancho) el doblez de ambos lados pasará por el punto medio [de las diagonales]	Presenta un esquema empírico en el cual considera un caso particular para dar una respuesta general. El razonamiento utilizado por el profesor no es el correcto, pues se aplica a un caso particular. Lo que está mostrando con su experimento es que las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio. Cuestionario inicial.

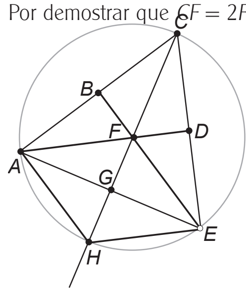
Cuadro 4 (continuación)

Actividad	Respuesta	Comentario
Considera un trapecio y sus dos diagonales. Por el punto medio de una de las diagonales se traza una recta paralela a los lados paralelos del trapecio. ¿En dónde intersecará esta recta a la otra diagonal y a los lados no paralelos? ¿Por qué?	La interseca en el punto medio, tanto a la otra diagonal como a los lados no paralelos. Porque es paralela y pasa por el punto medio	En este pasaje se presenta un esquema de argumentación fáctico. Su explicación consiste en repetir parte del enunciado del problema. Cuestionario inicial.
Construye un triángulo y une los puntos medios de sus lados. ¿Cómo son los triángulos que se forman? Explica tu respuesta.	Son congruentes.  El ángulo α es el mismo para los dos triángulos y al dividir *AC* entre *BC* y *EC* entre *CD* el resultado es 2, porque *B* y *D* son los puntos medios, entonces *BD* y *AE* son paralelos entre sí.  *EC* y *BF* son paralelos y *AC* es la transversal, entonces $\alpha = \beta$ por ser correspondientes. Lo mismo sucede con las paralelas *AE* y *BD* y la transversal *BF* por lo tanto $\theta = \varphi$ por ser correspondientes, entonces tenemos dos ángulos iguales con un lado igual $\Rightarrow$ los triángulos son congruentes.	Con la prueba del arrastre se llegó a la conclusión de que, en la figura, el segmento *BD* es paralelo al lado *AE*; el segmento FB es paralelo al lado *EC* y el segmento DF es paralelo al lado *AB*. Este paralelismo, aunado al hecho de que los puntos *F*, *D* y *B* son puntos medios, podría explicar la congruencia de los triángulos. El profesor consignó la explicación anterior que se basa en un esquema analítico. En la primera parte, aunque utiliza un esquema analítico, las premisas no llevan, necesariamente, a establecer el paralelismo entre el segmento *BD* y el lado *EA*. El argumento se quedó incompleto. Una vez "establecido" el paralelismo, en la segunda parte de su argumento, su razonamiento, completamente deductivo, lo lleva a establecer la congruencia de los triángulos utilizando uno de los criterios de congruencia (A-L-A), en un esquema de argumentación analítico. Segunda sesión.

Cuadro 4 (continuación)

Actividad	Respuesta	Comentario
En una cierta localidad se quiere construir una cisterna que suministre agua a tres pueblos. ¿Dónde se debe colocar la cisterna para que esté a igual distancia de los tres pueblos? Explica tu respuesta.	La cisterna debe estar localizada en el circuncentro.  Se construyen los puntos medios 1 y 2 de los lados *BC* y *AB* , partiendo del circuncentro se trazan los segmentos *BD* y *DC*, por lo tanto se forman los triángulos *BD*1 y *D*1*C*, los cuales son iguales por lo siguiente. *B*1 y 1*C* son iguales por ser el punto 1 el punto medio, además el lado 1*D* es igual a los dos triángulos, entonces los ángulos α y β son iguales por estar formados o partir de lados iguales, entonces los triángulos son congruentes y los lados *BD* y *DC* son iguales. De la misma manera sucede con el triángulo II. Los lados *A*2 y 2*B* son iguales por ser 2 el punto medio y el lado 2*D* es el mismo para cada triángulo, entonces se forman los ángulos γ y δ que son iguales, haciendo que los dos triángulos sean congruentes y los lados *AD* y *BD* iguales. Por lo tanto si $AD = BD$ y $BD = DC \Rightarrow AD = DC$ Las 3 distancias equidistan y entonces *D* es el circuncentro.	Aquí tenemos un esquema analítico, el razonamiento de que los ángulos "α y β son iguales por estar formados a partir de lados iguales" es poco claro. Al final llega a la conclusión de que las tres distancias equidistan *(sic)* y que *D* es circuncentro, que fue su suposición inicial. A pesar de utilizar un esquema analítico, el profesor no tiene claro qué es lo que debe justificar, si las tres distancias son iguales o si *D* es el circuncentro. Es decir, no hay claridad sobre las premisas ni la conclusión del razonamiento. Tercera sesión.

Cuadro 4 (conclusión)

Actividad	Respuesta	Comentario
Traza un triángulo y toma una mediana; mide la distancia del vértice al centroide y del centroide al otro extremo y calcula su razón. Haz lo mismo para las otras medianas. ¿Qué encontraste? Da una explicación lógica de lo que encontraste.	La razón para cada segmento es la misma. Por demostrar que *CF* = 2*FG*  Se traza una circunferencia con centro en F que pase por *C*, tal que su radio sea *FC*. Se prolonga la mediana hasta que toque la circunferencia en el punto *H* y se unen los puntos *AH* y *EH*. Entonces debemos demostrar que efectivamente sea un paralelogramo. Debemos demostrar que *AF* sea paralelo a *HE* y *AH* paralelo a *EF*. Entonces se traza una paralela a *EH* que pase por F (punto medio por ser el centro de la circunferencia) y *D*, que a su vez es punto medio de *CE*, entonces *FD* es paralelo a *EH* y entonces *AF* es paralelo a *EH*. Lo mismo sucede con los segmentos *FE* y *AH*. De esta manera tenemos que *AFEH* es un paralelogramo y su característica es que sus diagonales se cortan en el punto medio, por lo tanto *HG* = *FG*, pero como *HF* = *FC* (por ser radios de la circunferencia) entonces *FG* = 1/2*FC* o *FC* = 2*FG*.”	El esquema aquí es analítico. La clave del razonamiento del profesor está en el pasaje: “Entonces se traza una paralela a *EH* que pase por *F* (punto medio por ser el centro de la circunferencia) y *D*, que a su vez es punto medio de *CE*, entonces *FD* es paralelo a *EH* y entonces AF es paralelo a *EH*”. Aquí, el razonamiento correcto hubiera sido, “se traza un segmento que pase por *F* y por *D*, este segmento será paralelo a *EH* porque une los puntos medios del triángulo *EHC*. Este pasaje se dio en la cuarta sesión.

Aunque a partir de la segunda sesión, el profesor utilizó esquemas en su mayoría analíticos, no siempre pudo demostrar o justificar lo que quería. El profesor mostró dificultades para diferenciar la hipótesis de la conclusión.

CONCLUSIONES

Para dar respuesta a la pregunta de investigación *¿cuáles son las características de las prácticas argumentativas de los profesores frente a un proceso de validación matemática?*, analizaremos conjuntamente los dos casos.

En el cuadro 5 se muestran las características de los profesores y el tipo de esquemas que mostraron.

Cuadro 5

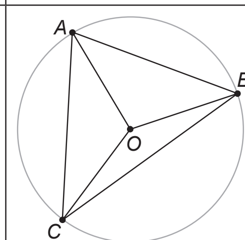
Profesor	Preparación	Esquemas iniciales	Esquemas finales
V	Licenciado en Ciencias Naturales. 20 años de docencia. Sin experiencia con la computadora.	Fácticos, empíricos y simbólicos. Hasta la sesión 5 (aproximadamente 20 horas de curso).	Fáctico-simbólicos y analíticos. Hace un uso mucho mayor del razonamiento deductivo.
J	Ingeniero Electrónico. 10 años de docencia en física y matemáticas. Buen dominio de la computadora. Sin experiencia con GD.	Empíricos y fácticos. Hasta la sesión 2 (aproximadamente 6 horas de curso).	En su mayoría analíticos.

Los profesores no presentaron esquemas de argumentación autoritarios. Esto se pudo deber a que las actividades del curso estuvieron encaminadas a formar conjeturas y buscar su validación. La misma situación es informada por Furinghetti y Paola (2003).

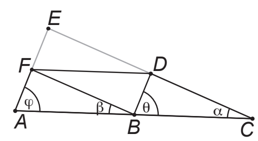
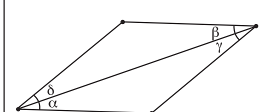
En el transcurso de las actividades los profesores tuvieron oportunidad de poner en juego su habilidad para resolver problemas, mejoraron su lenguaje matemático y su entendimiento de los conceptos geométricos utilizados (Moore 1994, p. 250); esto podría haber tenido como consecuencia que los profesores percibieran con más claridad la lógica del razonamiento deductivo y pudieran aplicarlo con más facilidad. De ahí el cambio detectado.

En cuanto a las características de los esquemas utilizados por los profesores, encontramos que en los esquemas fácticos y empíricos se puede apreciar una estructura de argumentación que no favorece el uso de la deducción; y el lenguaje suele ser impreciso, con un uso erróneo de conceptos. Mientras que en los esquemas analíticos se nota una estructura de razonamiento mejor organizada, en la que es posible identificar una hipótesis y una conclusión, y los conceptos se utilizan con mayor precisión aunque no siempre de manera correcta. Lo anterior queda ejemplificado en los cuadros 6 y 7.

Cuadro 6

	Profesor V	
	Esquemas fácticos y empíricos	**Esquemas analíticos**
Uso del lenguaje	Las paralelas son tangentes al diámetro de la circunferencia, porque el punto medio de la circunferencia es perpendicular a las paralelas.	Después de trazar la diagonal se forman 2 triángulos congruentes, porque los ángulos alternos internos son iguales, ya que los dos triángulos formados comparten la misma secante, por lo tanto se cumple lado-ángulo-lado.
Estructura de razonamiento	Porque al trazar la mediatriz de la cuerda y ésta al pasar por el centro de la circunferencia por medio del teorema de Pitágoras, se logra demostrar que dicha mediatriz pasa exactamente por el punto medio de la cuerda y a su vez es perpendicular	 Comprobación AOB + BOC + COA = 360° AOB + OBA + BAO + BOC + OCB + CBO = 360° **(hipótesis)** AOB + OBA + BAO + BOC + OCB + CBO = AOB + BOC + COA OBA + BAO + OCB + CBO = COA 2BAO + 2CBO = COA 2OBA + 2CBO = COA $\therefore$ 2(OBA + CBO) = COA **(conclusión)**

Cuadro 7

	Profesor J	
	Esquemas fácticos y empíricos	**Esquemas analíticos**
Uso del lenguaje	Se traza un segmento y por los extremos se trazan dos circunferencias de radio tal que sean secantes en dos puntos... Por los puntos donde son secantes se traza una recta, con esto el segmento queda dividido en dos partes iguales	 EC y BF son paralelos y AC es la transversal, entonces $\alpha = \beta$ por ser correspondientes. Lo mismo sucede con las paralelas AE y BD y la transversal BF por tanto $\theta = \varphi$ por ser correspondientes, entonces tenemos dos ángulos iguales con un lado igual $\Rightarrow$ los triángulos son congruentes.
Estructura de razonamiento	Podemos demostrar con un ejemplo sencillo, tomar una hoja tamaño carta, trazar sus diagonales y doblarlo por la mitad (largo y ancho) el doblez de ambos lados pasará por el punto medio [de las diagonales]	Los triángulos son congruentes. De acuerdo con la figura  La diagonal que es un lado es igual para ambos **(hipótesis).** Como los lados son paralelos (**hipótesis**), entonces los ángulos α y β (alternos internos), lo mismo sucede con los ángulos γ y δ. Entonces con el criterio de semejanza de triángulos, 2 ángulos iguales y el lado correspondiente igual (diagonal). Los triángulos son congruentes **(conclusión)**

Como respuesta a la pregunta de investigación *¿cuáles son las características de las prácticas argumentativas de los profesores frente a un proceso de validación matemática?*, diremos que los esquemas de argumentación que utilizaron los profesores asistentes al curso son fundamentalmente fácticos y empíricos y tienden, con la práctica, la discusión y la reflexión que ésta provoca, a volverse analíticos. Parecería que la actividad que se desarrolla alrededor de la demostración, apoyada por la reflexión grupal e individual, permite que los profesores reconsideren aquellos argumentos que les permiten construir exitosamente la justificación.

En este proceso de reflexión detectamos la formación de un pensamiento crítico que les permite elegir, de mejor manera, las proposiciones necesarias en cada conjetura formada.

El experimento de enseñanza muestra que es posible lograr un cambio en los esquemas de argumentación de los profesores y que las actividades diseñadas en un ambiente de geometría dinámica ayudan en este cambio; las actividades ayudan también a fomentar un pensamiento deductivo en los profesores y, además, a desarrollar un sentido de pensamiento crítico que dota al profesor de la capacidad de elegir proposiciones adecuadas a las circunstancias de cada conjetura por validar.

A partir del estudio exploratorio fue posible notar que los profesores con mayor preparación en matemáticas tienen mayor probabilidad de utilizar un razonamiento deductivo y de desarrollar esquemas de argumentación analíticos en lugar de esquemas fácticos, rituales y empíricos. Este hecho se repite en el presente experimento: el profesor V empezó a utilizar esquemas analíticos desde la sesión 5 (equivalente a 20 horas de curso), mientras que el profesor J lo hizo a partir de la segunda.

El profesor J tuvo un desempeño mucho mejor que el profesor V, considerando que inicia con esquemas más elementales; esta diferencia se aprecia en particular con las actividades más complejas (como la correspondiente al punto Fermat-Torriceli).

Lo importante en este caso es el desarrollo que se tuvo a diferencia del desempeño. El cambio de esquemas no analíticos a analíticos es un indicativo del desarrollo del profesor.

En los dos casos estudiados, la transición de un esquema a otro estaba marcada por una mayor organización de la información, por la selección de argumentos que incluían las propiedades de los objetos geométricos en cuestión, y por una mejor organización de las proposiciones en oraciones condicionales.

El profesor V tuvo un desarrollo mucho más significativo que el profesor J. Esto se debió, en gran medida, a la interacción que se dio entre los asistentes al curso durante el desarrollo de las actividades. Lo anterior, junto con la reafirmación de sus conocimientos geométricos, le permitió poner en juego esquemas que se adecuaban de mejor manera a las actividades desarrolladas en clase, permitiéndole aproximarse a los esquemas analíticos.

En general, los esquemas de argumentación que muestran los profesores, son una combinación de diferentes esquemas; esto muestra que todavía no hay estabilidad, por lo menos en este punto, en los tipos de validación que adoptan los profesores y que tienden a hacerse analíticos. Esto es, conforme el profesor aumenta su conocimiento disciplinario y adquiere mayor seguridad en su desempeño, los esquemas tienden a ser analíticos, en los que predominan las proposiciones condicionales y dominan más las propiedades de los objetos en cuestión.

Los profesores recurren, al inicio de la experiencia, a esquemas de argumentación fácticos en los que la justificación se basa en un recuento de lo que se hizo: parecería que en ese momento inicial hay bastante confusión sobre lo que significa desarrollar una argumentación y se inclinan por describir lo que han hecho, como si este solo hecho no dejase dudas sobre la pertinencia de su trabajo; y a esquemas simbólicos en los que se utilizan conceptos poco claros o *inventados* que dan la apariencia de conocimiento con la intención de acercarse a los conocimientos y definiciones que han olvidado.

Cabe reiterar que la aparición de estos dos tipos de esquemas se dio en los experimentos de enseñanza en los que se basa el presente trabajo y no fueron caracterizados por Harel y Sowder (1998). Esto no significa que tales esquemas estén incompletos o que el estudio de estos autores no sea exhaustivo. La causa de esto se debe a que, en esencia, el presente estudio y el de Harel y Sowder son distintos, principalmente en el hecho de que nuestro estudio se realizó con profesores de bachillerato en activo y no con estudiantes del nivel superior; y los esquemas de Harel y Sowder se obtuvieron en actividades de matemática, principalmente análisis matemático y cálculo, y no exclusivamente de geometría como en este caso.

Durante el experimento se evidenció una relación funcional entre el uso del lenguaje y el de los conceptos matemáticos, y el de ciertas estructuras de razonamiento con el uso de los esquemas de argumentación:

- En los esquemas fácticos y empíricos se tiene una estructura de razonamiento que no favorece el uso de la deducción y el lenguaje suele ser impreciso, con un uso erróneo de conceptos, debido esencialmente a que la organización de las proposiciones se construye sobre la base de disyunciones o inclusiones.

- Mientras que en los esquemas analíticos se nota una estructura mejor organizada, en la que es posible identificar una hipótesis y una conclusión, y los conceptos se utilizan con mayor precisión aunque no siempre de manera correcta; el lenguaje también suele ser más preciso y semánticamente mejor organizado.

En este artículo se presentó la respuesta a la primera pregunta de investigación de las dos planteadas en la introducción. Los resultados correspondientes a la segunda pregunta de investigación se informarán en otro artículo.

El presente estudio es apenas un primer intento por determinar las prácticas argumentativas de los profesores de bachillerato. Es necesario diseñar experimentos de enseñanza más específicos y contar con instrumentos más precisos para recabar la información pertinente.

Entre otras muchas tareas al respecto, queda pendiente determinar cuáles son las creencias de los profesores con respecto al razonamiento deductivo y la demostración matemática y su factibilidad para estudiarla en el nivel bachillerato. También quedaría pendiente hacer una investigación sobre el impacto del cambio de esquemas de argumentación y creencias de los profesores en su práctica docente.

AGRADECIMIENTO

El autor desea expresar su agradecimiento a Conacyt por el apoyo prestado para el desarrollo del presente trabajo mediante la beca 60669.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alibert, D. y M. Thomas (1991), "Research on Mathematical Proof", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, p. 215.

Balacheff, N. (2000), *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*, Una empresa docente, Bogotá, Colombia.

Battista, M.T. y D.H. Clements (1995), "Geometry and Proof", *The Mathematics Teacher*, vol. 88, núm. 1, enero, pp. 48-54.

Carr, W. y S. Kemmis (1986), *Becoming Critical. Education, Knowledge and Action Research,* Falmer, Lewes.

Christou, C., N. Mousoulides, M. Pittalis y D. Pitta-Pantazi (2004), en *Proceedings of the 28th Conference of the International Group of the* PME, vol. 2, pp. 215-222.

Colegio de Bachilleres (1993), *Programas de Estudio de Matemáticas,* México, SEP.

Colegio de Ciencias y Humanidades (2003), *Adecuación a los Programas de Estudio de Matemáticas I a IV,* México, UNAM.

De Villiers (2002), *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad,* Emeryville, CA, Key Curriculum Press.

Dreyfuss, T. y N. Hadas (1987), "Euclid May Stay and Even Be Taught", en *Learning and Teaching Geometry, K-12,* 1987 Yearbook, Reston, VA, NCTM.

Duval, R. (1991), "Structure du Raisonnement Deductif et Apprentissage de la Démonstration", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, pp. 233-261.

——— (1999), *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?,* Grupo Editorial Iberoamérica, pp.15-17.

Escuela Nacional Preparatoria (1996), *Programas de Estudio de Matemáticas,* México, UNAM.

Flores, H. (2004), *La enseñanza de la demostración geométrica: prácticas argumentativas y esquemas de demostración en profesores del* NMS, Documento predoctoral, México, Cinvestav.

——— (2006), "Proving Skills in Mexican Bachillerato Teachers", en *Memorias del* ICTM *3,* Estambul, Turquía.

——— (2007), *Prácticas argumentativas y esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato,* Anexo 2, Tesis doctoral, México, Cinvestav.

Furinghetti, F y D. Paola (2003), "To Produce Conjectures and to Prove Them Within a Dynamic Geometry Environment: A Case Study", en *Proceedings of the 27th International Conference of* PME, vol. 2, pp. 397-404.

Fuys, D., D. Geddes y R. Tischler (1988), *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents,* Reston, VA, NCTM.

Garrido, M. (1983), *Lógica Simbólica,* Serie de Filosofía y Ensayo, Tecnos.

Giamati, C (1995), "Conjectures in Geometry and the Geometer's Sketchpad", *The Mathematics Teacher,* vol. 88, núm. 6, pp. 456-458.

Gravina, M.A. (2000), "The Proof in Geometry: Essays in a Dynamical Environment", en *Proceedings of* ICME *9,* Tokio, TSG12.

Hanna, G. (2000), "Proof, Explanation and Exploration: An Overview", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, núms. 1-2, 5-23.

Harel, G. y L. Sowder (1998), "Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies", *CBMS Issues in Mathematics Education*, American Mathematical Society, vol. 7, pp. 234-283.

Healy, L. y C. Hoyles (2001), "Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 6, núm. 3, pp. 235-256.

Hoyles, C. y K. Jones (1998), "Proof in Dynamic Geometry Contexts", en C. Mammana y V. Villani, *Perspectives on the teaching for the 21th Century*, Estudio de ICMI, pp. 121-128.

Knuth, E.J. (2002), "Teacher's Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics", *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 5: pp. 61-88.

Lesh, R. y A. Kelly (1999), "Multitiered Teaching Experiments", en Kelly y Lesh, (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science*, Lawrence Erlbaum, pp. 197-230.

Lewin, K. (1946), "Action-Research and Minority Problems", *Journal of Social Issues*, vol. 2, pp. 34-46.

Mariotti, M. A. (1997), "Justifying and Proving in Geometry: The Mediation of a Microword", en *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education*, pp. 21-26 (versión corregida y aumentada).

——— (2000), "Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, núms. 1-2, pp. 25-53.

Mogetta, C. (2001), "Argumentative Processes in Problem Solving Situations: The Mediation of Tools", en *Proceedings of the 25th Conference of the International Group of PME*, vol. 3, pp. 375-382.

Moore, R.C. (1994), "Making the Transition to Formal Proof", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 27, pp. 249-266.

Mora, D. (2005), "Investigación-acción e interacción didáctica", en *Memorias del VIII Foro Nacional de Investigación en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje*, México, Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM.

NCTM (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA.

Olivero, F. (2002), *The Proving Process within a Dynamic Geometry Environment*, Tesis doctoral, Graduate School of Education, University of Bristol.

Presmeg, N. (1999), "On Visualization and Generalization in Mathematics", en *Proceedings of the XXI Annual Meeting*, Cuernavaca, México, PME-NA, pp. 151-155.

Radford, L. (1994), "La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos", *Educación Matemática*, vol. 6, núm. 3, pp. 21-36.
Senk, S.L. (1985), "How Well Do Students Write Geometry Proofs?", *Mathematics Teacher*, septiembre, pp. 448-456.
SEP, SUBSISTEMA DE BACHILLERATOS TECNOLÓGICOS (2004), *Programa de Estudios de Matemáticas*.
Southerland, R., F. Olivero y M. Weeden (2004), "Orchestrating Mathematical Proof Through the Use of Digital Tools", en *Proceedings of the 28th Conference of the International Group of PME*, vol. 4, pp. 265-272.
Steffe, L.P. y P.W. Thompson (1999), "Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements", en Kelly y Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science*, Lawrence Erlbaum, pp. 267-306.
Straesser, R. (2001), "Cabri-géomètre: Does Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning?", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 6, núm. 3, pp. 319-333.
The Geometer's Sketchpad v. 4.0, paquete de Geometría Dinámica (2003), Emeryville, CA, Key Curriculum Press.
Vygotsky, L.S. (1978), *Mind is Society, The development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press.
Yershov, Y.L. y A. Paliutin (1994), *Lógica Matemática*, Moscú, Editorial Mir.

DATOS DEL AUTOR

Ángel Homero Flores
Colegio de Ciencias y Humanidades, Universidad Nacional
Autónoma de México, México
ahfs@servidor.unam.mx