Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Peralta, Javier
Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula
Educación Matemática, vol. 23, núm. 3, diciembre, 2011, pp. 67-90
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

# Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula

Javier Peralta

**Resumen:** En este artículo se analizan algunas conexiones entre matemáticas y música; concretamente, se trata de descubrir cuál es la estructura matemática subyacente en los sistemas de afinación pitagórico, de Zarlino y de Delezenne, en los que los valores de las notas pueden expresarse mediante números racionales. Se presenta una propuesta para el aula, basada en una metodología activa, para que los alumnos puedan obtener una modelización matemática de dichos sistemas. También se estudian algunas relaciones entre los modelos matemáticos hallados.

*Palabras clave:* sistemas de afinación, Pitágoras, Zarlino, Delezenne, razón, sucesión, término general, modelo matemático.

**Mathematical models of the Pythagorean tuning system and some of their consequences: a proposal for the classroom**

**Abstract:** In this article we analyze some connections between mathematics and music; specifically, we try to find out what is the underlying mathematical structure to the Pythagorean, Zarlino and Delezenne tuning systems, in which note values can be expressed by rational numbers. We introduce a proposal for the classroom, based on an active methodology, so that students can obtain a mathematical modeling of the above-mentioned systems. Also, some relations between this mathematics models are studied.

*Keywords:* tuning systems, Pythagoras, Zarlino, Delezenne, ratio, sequence, general term, mathematic model.

## INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad se ha admitido la existencia de una estrecha relación entre música y matemáticas. Es más, en la cultura helénica, la música era considerada

Fecha de recepción: 3 de mayo de 2010

como una disciplina matemática que se ocupaba de relaciones entre números, razones y proporciones.

Por otro lado, las dos –música y matemáticas– han formado parte del *quadrivium* pitagórico, que, junto con el *trivium*, constituyen las *artes liberales* ([véase, por ejemplo, (Peralta, 2008, pp. 93-94)]: las siete ramas del saber humanístico (en contraposición con el saber teológico), base de la enseñanza durante más de dos mil años. El *trivium* estaba integrado por la gramática, la retórica y la lógica o la dialéctica, mientras que el *quadrivium* lo componían la aritmética (estudio de "los números en reposo"), la geometría ("las magnitudes en reposo"), la música ("los números en movimiento") y la astronomía ("las magnitudes en movimiento").

En cualquier caso, la conexión entre música y matemáticas se ha mantenido a lo largo de los siglos, y ha sido puesta de manifiesto tanto en distintos tratados de música escritos por ilustres figuras de las matemáticas (Descartes, Mersenne, Euler, D'Alembert, ...), como a través de las obras de distintos maestros de la música, que no sólo han recurrido a las matemáticas para explicar algunos de sus aspectos (Bach, Mozart, Chopin, Rossini, ...), sino que, incluso, han empleado a las matemáticas para crear música (Bartók y la razón áurea, música estocástica de Xenakis, Fibonacciana de Halfter, etcétera).

En las siguientes páginas analizaremos algunos sistemas de afinación. Los principales son el pitagórico, los de justa entonación (el más importante de ellos es el de Zarlino, y luego posiblemente el de Delezenne) y los temperamentos cíclicos regulares (temperado y de Holder). Los instrumentos de tecla y arpa, los de cuerda con trastes en el mástil y los de soplo humano con mecanismos de agujeros, llaves, pistones..., se afinan en el sistema temperado; los de soplo humano, cuyos sonidos se producen sólo mediante la presión labial (clarín y cornetín de órdenes), en el de Zarlino; en los instrumentos de cuerda sin trastes en el mástil y en la voz humana, la afinación queda determinada libremente por el intérprete, aunque en la mayoría de los casos suele responder a los principios de Pitágoras y Holder (Zamacois, 1975, p. 156); mientras que el sistema de Delezenne no se utiliza actualmenteen la actualidad.

Estudiaremos, en concreto, aquellos sistemas en que los valores de las notas –como veremos– pueden expresarse con números racionales: el pitagórico y los de Zarlino y Delezenne (que en realidad son variaciones del primero), para encontrar sus estructuras matemáticas subyacentes, así como las relaciones entre ellas; trataremos, en fin, de modelizar matemáticamente dichos sistemas. A este respecto hemos de recordar que el quehacer matemático se ocupa muchas veces de los procesos de modelización, y su importancia es también innegable desde una perspectiva educativa, pues tales acciones pueden constituir una excelente herramienta para el aprendizaje significativo (Castro y Castro, 1997, p. 110).

En cuanto a su enfoque metodológico y didáctico, pensamos que el trabajo sería adecuado para su presentación en un primer curso universitario de una licenciatura en una facultad de ciencias o ingeniería, o acaso también en el último año de la enseñanza secundaria. Se darán para ello algunas sugerencias sobre cómo llevarlo a cabo en clase (sin embargo, como es obvio, serán los profesores correspondientes quienes habrán de decidir sobre su supuesta pertinencia y, en cualquier caso, acerca de cuál sería la presentación más adecuada). Se ofrecen, así, una serie de posibles cuestiones –generalmente problemas– que se podrían ir planteando a los alumnos, para que, paso a paso, vayan descubriendo cuál es la estructura matemática latente en los sistemas de afinación mencionados.

Nuestro proyecto de aula se fundamenta en dos premisas: enseñanza por descubrimiento, guiada, y trabajo de los estudiantes en grupos.

Respecto de la primera, digamos que trataremos de conseguir nuestro objetivo (modelización matemática de sistemas de afinación) mediante una participación activa de los alumnos; por tanto, no se expondrán por tanto los conocimientos de forma manera dogmática, sino que se procurará que sean descubiertos por aquéllos. Este tipo de enseñanza vincula factores cognitivos y afectivos (Orton, 1990, p. 109), lo que puede generar interés hacia la matemática, que así aparece más como un proceso en cuya construcción ellos intervienen, que en un producto acabado. El procedimiento, pues, participa de una metodología heurística, aunque ciertamente no de forma manera completa, ya que no se plantea una cuestión abierta en la que el alumno disfrute de una plena libertad de acción para su resolución, sino que su actividad será guiada por el profesor.

En cuanto a la segunda premisa, se propondrán gradualmente las preguntas (problemas) que aparecerán a lo largo del artículo (se indicarán señalarán en cursiva, precedidas de la letra P). Creemos que la mejor forma manera de llevarlo a cabo es distribuyendo a los alumnos en grupos, que irán desarrollando el trabajo bajo la guía del profesor (aunque, por supuesto, también cabría plantearlos individualmente), como consecuencia de la riqueza didáctica que conlleva este tipo de enseñanza. Así, la enseñanza en grupos propicia el trabajo creativo; permite experimentar estrategias de colaboración; prima comportamientos cooperativos frente a competitivos; fomenta el diálogo y el debate y el respeto por las opiniones ajenas, estimula la formulación de hipótesis, las demandas de explicación o justificación, la aparición y confrontación de diferentes puntos de vista –a veces conflictos, que pueden facilitar un aprendizaje real– y crea situaciones en las que se potencia la toma de decisiones; favorece en los demás el aprendizaje de los resultados obtenidos por algunos alumnos o grupos –debido a la cercanía intelectual entre ellos–, a la vez que repercute positivamente en sus autores, quienes que precisan afianzar sus descubrimientos y mejorar su expresión para hacerse entender con claridad; etc. Por otra parte, hay que tener en cuenta que el grupo no es el resumen de la suma de los individuos que lo componen, sino que tiene una dinámica propia: cabe ser concebido como un campo de fuerzas en interacción (Bouvier et aly cols., 1986, p.103), lo que puede suponer una ayuda para el descubrimiento (y para la socialización ) del alumno, particularmente en un caso poco habitual como éste (al menos al principio), con la dificultad o extrañeza que acaso conlleve tratar nociones musicales con herramientas matemáticas nociones musicales, tan alejadas de aquel campo.

Respecto del tamaño de los grupos, pensamos que no debe ser muy numeroso, pues sería más difícil de gestionarse, y, además, algunos de sus miembros podrían ir acostumbrándose paulatinamente a que trabajaran los demás; y así mismo, tampoco parece oportuno, por razones obvias, que estuviera compuesto por dos personas. Así que creemos que el mejor número mejor (Herrán y Paredes, 2011) creemos que es de cuatro, pues permite, además, un trabajo por parejas; o quizás de tres, aunque en este último supuesto puede desembocar en una pareja y un aislado ([véase también (Caplow, 1974)].

Para concluir, a todo lo anterior, hemos de añadir otro aspecto, no tan crucial como los otros en este caso, pero que también se ha considerado: el poder de la utilización de representaciones gráficas, simbólicas o esquemáticas, en el aprendizaje de las matemáticas y en el proceso de descubrimiento. En este sentido, como se verá, se ha propiciado la construcción de esquemas como generadores de objetos mentales (Castro y Castro, 1997, p. 96) y asimismo, en esta ocasión, de elementos de comparación y de síntesis de los sistemas de afinación estudiados.

## NOTAS MUSICALES

Si se acorta la longitud de una cuerda musical, vibrará con un número mayor de oscilaciones; en particular, si se reduce a la mitad, el sonido producido al pulsarla es muy similar al que emitía la cuerda entera: es la misma nota, pero se dice que está una octava más alta. Entre ambas notas existe entonces una escala completa, lo que significa que la frecuencia de la última nota es justamente el doble de la frecuencia de la primera; por tanto, las frecuencias de las notas son inversamente proporcionales a las longitudes de las cuerdas.

Particularizando con una guitarra, uno de los instrumentos musicales más conocidos por los alumnos, se puede hacer el siguiente experimento: se toca al aire, por ejemplo, la primera cuerda, y luego se pide a los alumnos que vayan pisando cada traste de esa primera cuerda hasta que escuchen un sonido de características similares al primero, aunque, claro está, sea más agudo. Si se tiene un buen oído, se observará notará que eso sucede al pisar el traste número 12: si la guitarra está bien afinada, ambos sonidos corresponden a la nota *Mi,* aunque el segundo sonido está una octava más alta que el primero (su frecuencia es el doble). Se pide entonces que midan la distancia del puente del mástil al puente de la caja, y luego, la distancia del traste número 12 al puente de la caja. ¿Qué se deduce?: que la primera longitud es el doble de la segunda (los constructores de guitarras deben colocar el traste 12 justamente en el punto medio del listón que une los dos puentes).

En general, si una cierta nota tiene una frecuencia $f$, la misma nota en la octava superior tiene frecuencia $2f$, luego entonces, la determinación de una octava musical viene dada por una partición del intervalo $[f, 2f)$; y, por duplicaciones o divisiones sucesivas entre 2, se obtienen las demás octavaciones de la escala. En las siguientes líneas se darán los pasos para trabajar únicamente en el intervalo $[1, 2)$.

Si en el conjunto $F \subset \mathbb{R}^+$ de las frecuencias de todos los sonidos se define la siguiente relación binaria (de equivalencia):

$$f \sim f' \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} / f' = 2^n \cdot f$$

cada clase de equivalencia módulo $\sim$ es un subconjunto de la forma: $\{2^n \cdot f, n \in \mathbb{Z}/\}$. Por otra parte, si $f'$ pertenece a una cierta clase $\{2^n \cdot f, n \in \mathbb{Z}\}$, como todo número, y $f'$ en particular, está comprendido entre dos potencias sucesivas de 2: $2^n \leq f' < 2^{n+1}$, también será $1 \leq 2^{n-1} \cdot f' < 2$; esto es, existe siempre un representante único de la clase prefijada en el intervalo $[1, 2)$.

Trabajaremos entonces en el conjunto cociente $F' = F/\sim$; o sea, consideraremos que la frecuencia de las notas de la escala musical son números pertenecientes al intervalo $[1, 2)$. En el caso de que una determinada frecuencia no estuviera en ese intervalo, elegiríamos un representante en él mismo multiplicando o dividiendo por una potencia conveniente de 2.

En lo sucesivo, como es habitual, asignaremos a *Do* el valor 1.

Por otra parte, como es sabido, a partir de las notas musicales se forman las escalas, siendo la escala natural la siguiente: *Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si*. En Occidente, la distancia mínima que suele considerarse es la de un semitono (medio tono), que en la escala natural se da entre las notas *Mi* - *Fa* y *Si* - *Do'* (*Do'* es *Do* de la siguiente octava), mientras que la distancia entre otras dos notas cualesquiera consecutivas es de un tono.

Existen asimismo los denominados intervalos o distancias entre dos notas cualesquiera, que se nombran contando el número de ellas que median entre ambas, incluyendo a lasincluidas ellas mismas (entre dos notas consecutivas existe una segunda, entre cinco consecutivas una quinta, etc.). A cada intervalo se le asigna una fracción: el cociente entre los valores correspondientes a su extremo (nota más aguda) y su origen (nota más grave), y la fracción (siempre mayor que 1) significa la razón de vibraciones existente entre ambas notas. Cuando un intervalo es unión (suma) de dos, su fracción es el producto de las fracciones correspondientes a cada uno de ellos, mientras que la fracción de la diferencia (en sentido conjuntista) de dos intervalos es su cociente.

Por otra parte, en cada intervalo de un tono, entre dos notas inmediatas (esto es, entre *Do* - *Re, Re* - *Mi, Fa* - *Sol, Sol* - *La* y *La* - *Si*) hay una entonación intermedia que divide eal tono en dos semitonos, dando lugar a las alteraciones: *sostenido* (#) y *bemol* (♭). El sostenido de una nota corresponde a un semitono más alto que la mismaella y el bemol a un semitono más bajo. Las notas de la escala natural (*Do, Re* ...) se llaman *diatónicas*, y las correspondientes a sus alteraciones (*Do#, Re*♭ ...) se denominan *cromáticas*.

## LA GAMA PITAGÓRICA

Para los pitagóricos, el número era el principio de todas las cosas, y esa filosofía fue se extendió extendida también a la música, estableciéndose así los fundamentos de una teoría musical, base de todas las posteriores en Occidente, y en la que aún se asienta aún nuestro sistema musical actual. A partir de un experimento realizado mediante una cuerda vibrante de longitud $L$ en un aparato,: el monocordio (González, 2001, p. 130), establecieron las relaciones existentes entre la armonía musical y los números. En concreto, llegaron a la conclusión de que, al pulsar la cuerda musical tensada, los únicos sonidos consonantes con él eran los que se producían cuando la cuerda tenía las longitudes $L/2$ (octava), $2L/3$ (quinta) o $3L/4$ (cuarta).

En González (2001, p. 130) y Guzmán (1986, pp. 31-34), por ejemplo, se sugiere cómo hallar los valores de las notas musicales a partir del experimento realizado por Pitágoras en el monocordio y, finalmente, en Sole, (1982, pp. 22-25), se calculan los valores de las notas de la escala diatónica haciendo intervenir a las medias aritmética y armónica. En Orantes (1983, pp. 90-91), se deducen como consecuencia del hecho de que los sonidos de la gama pitagórica se obtienen por encadenamiento de quintas (Zamacois, 1975, p. 1975) y en Peralta (2003, pp. 446-449) se calculan por ambos procedimientos.

Con ese último principio y la revisión de las nociones elementales sobre música que se vieron en la sección anterior (asignando a *Do* el valor 1, como ya se ha dicho), cabría plantear a los alumnos distribuidos en grupos, la siguiente cuestión:

- *P. Halla los valores de las notas de la escala diatónica.*
  La quinta de *Do* es *Sol*, luego por tanto, el valor de *Sol* es 3/2. Su quinta es *Re'*, por tanto a *Re'* le corresponde 9/4, y a *Re*, su reducción, el intervalo [1, 2), esto es, 9/8,. Eetcétera.

Los valores de las notas son, pues, los siguientes:

*Do*: 1 *Re*: 9/8 *Mi*: 81/64 *Fa*: 4/3 *Sol*: 3/2 *La*: 27/16 *Si*: 243/128

- *P. ¿Existe alguna relación entre los valores de una nota y su precedente?*
  El cociente es 9/8 = 1.125, salvo en los casos *Mi-Fa* y *Si-Do'* en los que es $\lambda = 256/243 = 2^8/3^5 = 1.0534979$, razón a la que Platón llamó *leima* o *remanente*. Los intervalos relativos al primer caso corresponden al tono y, en el segundo caso, al semitono, al que llamaremos *semitono diatónico*. Ahora bien, de la existencia de alteraciones en los intervalos de un tono, surge otro semitono. Es el *semitono cromático,* que corresponde a los intervalos determinados por una nota y su sostenido o el bemol de una nota y dicha nota, y que el cual se define como la diferencia entre el tono y el semitono diatónico. Tiene, por tanto, asignada la fracción:

$$(9/8) : (256/243) = 2187/2048 = 3^7/2^{11} = 1.,0678711$$

- *P. Calcula los valores de las notas cromáticas.*
  Se obtienen a partir de:

**Figura** 1

$$N \xrightarrow{\times 3^7/2^{11}} N\# \quad (N \neq Mi, Si) \qquad\qquad Nb \xleftarrow{::3^7/2^{11}} N \quad (N \neq Fa, Sol)$$

Valores de los sostenidos y bemoles en la gama pitagórica

Expresando los valores de todas las notas en sentido creciente y ordenándolas como potencias, se tiene finalmente:

**Cuadro 1**

| *Do* | *ReЬ* | *Do#* | *Re* | *MiЬ* | *Re#* | *Mi* | *Fa* | *SolЬ* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $2^8/3^5$ | $3^7/2^{11}$ | $3^2/2^3$ | $2^5/3^3$ | $3^9/2^{14}$ | $3^4/2^6$ | $2^2/3$ | $2^{10}/3^6$ |

| *Fa#* | *Sol* | *LaЬ* | *Sol#* | *La* | *SiЬ* | *La#* | *Si* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^6/2^9$ | $3/2$ | $2^7/3^4$ | $3^8/2^{12}$ | $3^3/2^4$ | $2^4/3^2$ | $3^{10}/2^{15}$ | $3^5/2^7$ |

Valor de las notas en la gama pitagórica

- *P. ¿Qué intervalos existen? Haz un esquema para representarlos.*
  Para averiguar si se han sido puestos de manifiesto todos los intervalos, se halla la razón entre cada nota y su precedente., Resulta que todos los intervalos corresponden a la *leimma*, salvo *Re*Ь*-Do#, Mi*Ь*-Re#, Sol*Ь*-Fa#, La*Ь*-Sol#,* y *Si*Ь*-La#*. Su valor, $3^{12}/2^{11}$, es precisamente el siguiente cociente:

$$(2187/2048) : (256/243) = 531441/524288 = 3^{12}/2^{19} = 1.,0136432$$

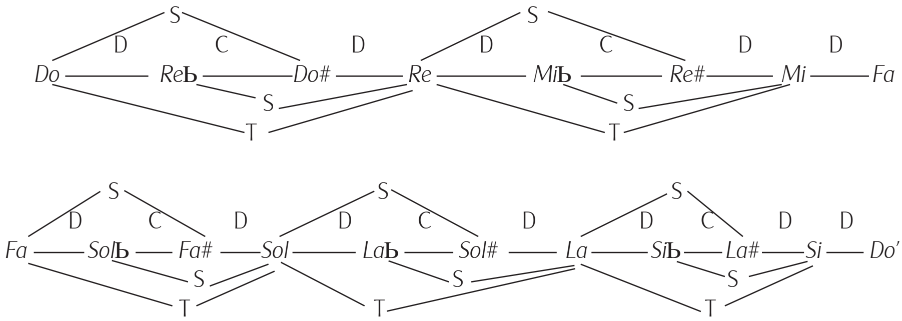
EAl intervalo correspondiente a esa razón se le denomina *coma pitagórica* y se obtiene, puespor tanto, como diferencia entre el semitono cromático y el semitono diatónico.

Existen, pues, los siguientes intervalos:

- Tono (T): $3^2/2^3$.
- Semitono cromático (S): $3^4/2^{11}$.
- Semitono diatónico (D): $= 2^8/3^5$
- Coma pitagórica (C): $3^{12}/2^{19}$

Esquemáticamente pueden representarse así:

**Figura 2**




Intervalos en la gama pitagórica

Volvamos al cuadro 1. A partir de ahora vamos a crear una "organización matemática" conveniente, y, para ello, planteamos lo siguiente:

- *P. Ordena las notas según las potencias (crecientes) de 3, y luego de 2. ¿Qué observas? Desígnalas como los términos (primeros) de una sucesión.*

La ordenación según las potencias de 3 (crecientes) y una posible notación se indican a continuación. Si se hace con respecto a las potencias de 2 (crecientes), la ordenación es justamente la contraria.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2^{10}}{3^6}$ | $\frac{2^8}{3^5}$ | $\frac{2^7}{3^4}$ | $\frac{2^5}{3^3}$ | $\frac{2^4}{3^2}$ | $\frac{2^2}{3}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3^2}{2^3}$ | $\frac{3^3}{2^4}$ | $\frac{3^4}{2^6}$ | $\frac{3^5}{2^7}$ | $\frac{3^6}{2^7}$ | $\frac{3^7}{2^{11}}$ | $\frac{3^8}{2^{12}}$ | $\frac{3^9}{2^{14}}$ | $\frac{3^{10}}{2^{15}}$ |
| *Sol♭* | *Re♭* | *La♭* | *Mi♭* | *Si♭* | *Fa* | *Do* | *Sol* | *Re* | *La* | *Mi* | *Si* | *Fa#* | *Do#* | *Sol#* | *Re#* | *La#* |
| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ | $p_7$ | $p_8$ | $p_9$ | $p_{10}$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $p_{13}$ | $p_{14}$ | $p_{15}$ | $p_{16}$ | $p_{17}$ |

- *P. Multiplica cada término de la sucesión por 3/2 y, si fuera necesario, reduce al intervalo [1, 2). ¿Qué observas?*

Si se multiplica cada término por 3/2 se tiene la cadena:

$$p_1 \longrightarrow p_2 \longrightarrow p_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow p_{16} \longrightarrow p_{17} \quad (1)$$

en donde la flecha quiere indicarseñala que, para pasar de un término al siguiente, hay que multiplicar por 3/2. En lenguaje musical, significa lo que ya sabíamos: que la gama pitagórica se obtiene por encadenamiento de quintas.

Cabría hablar, por último, de elemento generador:

- *P. ¿Es posible expresar el valor de cada una de las notas como potencia de una determinada? ¿También de su inversa?*

El valor de cada nota puede hallarse multiplicando por 3/2 el valor de la nota anterior; pero 3/2 es también el valor de una nota ($p_8$). Se deduce que:

$$p_1 = p_8^{-6}, \quad p_2 = p_8^{-5}, \quad p_3 = p_8^{-4}, \quad p_7 = p_8^{0}, \quad p_8 = p_8^{1}, \quad ..., \quad p_{17} = p_8^{10}$$

Esto es:

$$p_n = p_8^{n-7} \qquad 1 \leq n \leq 17 \tag{2}$$

lo que permite decir que los valores de las diecisiete notas de la escala pitagórica están generados por $p_8$ (valor de *Sol*).

Teniendo en cuanta que $p_8^{-1}$ es 2/3, cuyo representante en [1, 2) es $4/3 = p_6$ (valor de *Fa*), asimismo podría escribirse el esquema (1,) cambiando el sentido de las flechas, y entendiendo que se pasa de un término al siguiente multiplicando por 4/3. De igual modo, se tiene:

$$p_n = p_6^{7-n} \qquad 1 \leq n \leq 17 \tag{2'}$$

y podría decirse también que la gama pitagórica está generada por $p_6$ (valor de *Fa*).

## EL SISTEMA DE ZARLINO

Durante el siglo XVI hubo varios intentos por modificar la escala pitagórica, a la vista de lo complicados que resultaban los valores de algunas notas y proporciones (Estévez, 1990, p. 135). El más importante de los reformadores fue Gioseffo Zarlino (1517-1590), maestro de coro de San Marcos de Venecia, quien en 1558 publicó *Instituciones armónicas,* en donde propuso una base matemática alternativa para la escala diatónica que supuso un adelanto en el esquema de producción de consonancias pitagóricaso (Chica, 2001). Así como los griegos habían descrito las consonancias como una consecuencia lógica de las relaciones entre los cuatro primeros números naturales: 1/2, 2/3 y 3/4 (que describen la octava, la quinta y la cuarta, respectivamente), Zarlino añade la razón 4/5 para la tercera.

El sistema de Zarlino o de Aristógenes -Zarlino se llama también sistema natural, de justa entonación (por ser el más importante de los de este tipo) o de los físicos, y se aparta del encadenamiento de quintas pitagórico. Se fundamenta en la denominada *serie armónica* (Orantes, 1983, pp. 89-90; Zamacois, 1975, pp. 134-141), a la que se ajustan las entonaciones de sus notas; aunque para deducir sus valores puede ser suficiente con saber que está se basado en la existencia de acordes mayores formados cada uno de ellos por tres notas cuyos sonidos simultáneos son agradables al oído y cuyas frecuencias son proporcionales a los números 4, 5 y el número perfecto 6; de modo, que en cada acorde hay dos tonos entre la primera y la segunda nota, y tono y medio entre la segunda y la tercera.

- *P. Halla los valores de las notas diatónicas del sistema de Zarlino.*

En principio no se daría ninguna otra indicación, para tratar de que los grupos de alumnos desarrollaran convenientemente su imaginación y su potencial descubridor; pero transcurrido un rato, el profesor (guía) posiblemente debiera debería hacer una sugerencia si hubiera algún grupo bloqueado. Por ejemplo: *Escribe escribe las notas de la escala diatónica y considera los acordes de tres notas que verifiquen que entre la primera y segunda nota hay dos tonos, y entre la segunda y la tercera hay un tono y medio.*

Se puede representar en el siguiente esquema (Loy, 2006, p. 61). Los acordes son el de *Do* mayor (*Do, Mi, Sol*), el de *Fa* mayor *(Fa, La, Do')* y el de *Sol* mayor *(Sol, Si, Re')*:

**Figura 3**

| *Do* | *Re* | *Mi* | *Fa* | *Sol* | *La* | *Si* | *Do'* | *Re'* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | : | 5 | : | 6 | . | | | |
| | | | 4 | : | 5 | : | 6 | |
| | | | | 4 | : | 5 | : | 6 |

Proporcionalidades entre notas del sistema de Zarlino (I)

De acuerdo en con esas proporcionalidades, y partiendo de los valores conocidos de *Do* y *Do'*, llegarán a que *Mi*: 5/4, *Sol*: 3/2 , *Fa*: 4/3 , *La*: 5/3 , *Si*: 15/8, *Re'*: 9/4. Por tanto, los valores de las notas de la escala diatónica son:

*Do*: 1, *Re*: 9/8 , *Mi*:5/4 , *Fa*: 4/3 , *Sol*: 3/2 , *La*: 5/3 , *Si*: 15/8

- *P. ¿Existe alguna relación entre los valores de una nota y su precedente?*

El cociente es 9/8 entre *Do-Re* , *Fa-Sol* y *La-Si* ; 10/9 entre *Re-Mi* y *Sol-La* y 16/15 entre *Mi-Fa* y *Si-Do'*. Los intervalos relativos se llaman *tono grande, tono pequeño* y *semitono diatónico correspondiente a tono pequeño,* respectivamente. La diferencia entre el tono grande y el tono pequeño: (9/8): (10/9) = 81/80, se denomina *coma sintónica*.

- *P. Basándote en la razón existente entre los valores correspondientes a las notas que difieren en dos tonos, calcula los valores de La***ЬЬ***, Mi***ЬЬ***, Sol# y Do#*.

Se tiene:

**Figura 4**

| *La***Ь** | *La* | *Si* | *Do* | *Re* | *Mi***Ь** | *Mi* | *Fa* | *Sol* | *Sol#* | *La* | *Si* | *Do'* | *Do'#* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | : | | 5 | | | | | | | | | | |
| | | | | | 4 | : | | 5 | | | | | |
| | | | | | | 4 | : | | 5 | | | | |
| | | | | | | | | | | | 4 | : | 5 |

Proporcionalidades entre notas del sistema de Zarlino (II)

De donde se deduce que *La***Ь** : 8/5, *Mi***Ь**: 6/5, *Sol#* : 25/16, *Do#* : 25/24.

Para hallar el valor de las notas que faltan, podemos hacer el siguiente planteamiento:

- *P. ¿Observas alguna relación entre el valor de una nota de la escala diatónica y los de su sostenido y su bemol? Halla los valores de las notas restantes.*

Los valores de *Sol#* y *Do#* son los de *Sol* y *Do*, respectivamente, multiplicados por 25/24; los de *La***Ь** y *Mi***Ь**, son los de *La* y *Mi* respectivamente, divididos entre 25/24. Si *N* es una nota de la escala diatónica, cada uno de los intervalos *N-N#, N***Ь** *-N,* se denomina *semitono cromático*. Se tiene:

**Figura 5**

$N \xrightarrow{\times 25/24} N\#$    ($N \neq$ *Mi, Si*)      $N\flat \xleftarrow{:25/24} N$    ($N \neq$ *Fa, Sol*)

Valores de los sostenidos y bemoles en el sistema de Zarlino

Se deduce que *Re#* : 75/64, *Fa#* : 25/18, *La#*: 125/72, *Sol*♭ : 36/25, *Si*♭ : 9/15, *Re*♭ : 27/25.

Procede, no obstante, hacer una aclaración. Para asignar los valores a *Re*♭ y *Fa#*, también se podría haber seguido el siguiente criterio: entre *Re*♭ y *Fa* y entre *Re* y *Fa#* hay dos tonos, luego por tanto, los valores x de *Re*♭ e *y* de *Fa#* tendrían que cumplir:

$$4/x = 5/(4/3) \qquad 4/(9/8) = 5/y$$

lo que conduce a: $x = 16/15$ , $y = 45/32$. Esta irregularidad en el sistema de Zarlino produce un error (aunque muy pequeño y prácticamente inapreciable para el oído): el cociente de los dos valores que cabría fijar para *Re*♭ (el real y el posible) y para *Fa#* (el posible y el real), es la coma sintónica:

$$(27/25) : (16/15) = (45/32) : (25/18) = 81/80$$

Los valores de todas las notas en este sistema vienen recogidas en el siguiente cuadro:

**Cuadro 2**

| *Re*♭ | *Do#* | *Re*♭ | *Re* | *Re#* | *Mi*♭ | *Mi* | *Fa* | *Fa#* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $5^2/(2^3 \cdot 3)$ | $3^3/5^2$ | $3^2/2^3$ | $3{\cdot}5^2/2^6$ | $2{\cdot}3/5$ | $5/2^2$ | $2^2/3$ | $5^2/(2 \cdot 3^2)$ |

| *Sol*♭ | *Sol* | *Sol#* | *La*♭ | *La* | *La#* | *Si*♭ | *Si* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^2 \cdot 3^2/5^2$ | $3/2$ | $5^2/2^4$ | $2^3/5$ | $5/3$ | $5^3/(2^3 \cdot 3^2)$ | $3^2/5$ | $3 \cdot 5/2^3$ |

Valor de las notas en el sistema de Zarlino

A partir de aquí se realizará un estudio similar al que se hizo con la gama pitagórica.

- *P. ¿Qué intervalos existen en el sistema de Zarlino? Haz un esquema para representarlos.*

Hallando el cociente entre una nota y su precedente se tienen los siguientes intervalos:

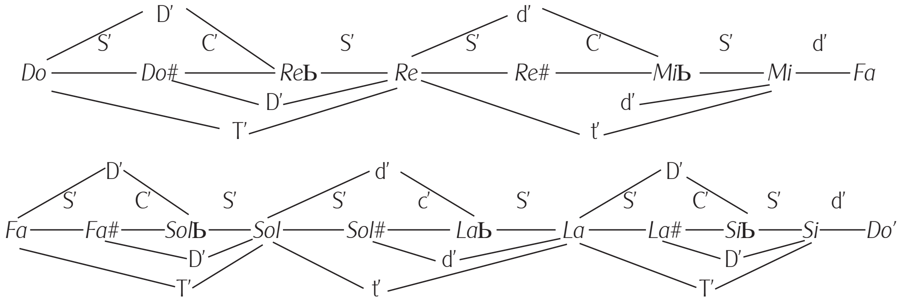
- Entre *Mi-Fa* y *Si-Do* está el semitono diatónico (24/15), como ya se sabía.
- Intervalos deducidos de los tonos pequeños (*Re- Mi, Sol- La*) sustituyendo uno de sus extremos por sus posibles alteraciones. La razón es 16/15: semitono diatónico pequeño.
- Intervalos deducidos de tonos grandes sustituyendo uno de sus extremos por posibles alteraciones. La razón es 27/25 y el intervalo se llama *semitono diatónico correspondiente a tono grande*.
- Quedan además cinco intervalos. Por una parte, *Mi*Ь - *Re#* y *La*Ь - *Sol#*, cuya razón es 128/125 y, por otra, *Re*Ь - *Do#*, *Sol*Ь - *Fa#* y *Si*Ь - *La#*, de razón 648/625. Los intervalos correspondientes se denominan *comas de Zarlino* (intervalos existentes entre el bemol de una nota y el sostenido de la anterior) correspondientes, respectivamente, a un tomo pequeño o a un tono grande (según lo sea el tono entre aquéllas).

En resumen, en este sistema existen los siguientes intervalos:

- Tono
  - grande (T’) : $3^2/2^3$
  - pequeño (t’) : $2 \cdot 5/3^2$
- Semitono cromático (S’) : $5^2/(2^3 \cdot 3)$
- Semitono diatónico correspondiente a
  - tono grande (D’) : $3^3/5^2$
  - tono pequeño (d’) : $2^4/(3 \cdot 5)$
- Coma correspondiente a
  - tono grande (C’) : $2^3 \cdot 3^4/5^4$
  - tono pequeño (c’) : $2^7/5^3$

Esquemáticamente puede representarse así:

**Figura 6**




Intervalos en el sistema de Zarlino

- *P. Escribe las diecisiete notas del sistema de Zarlino como producto de potencias, de modo análogo a como se hizo con la gama pitagórica. ¿Se puede pasar de un valor al siguiente multiplicando por un mismo número?*

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2^2\cdot 3^2}{5^2}$ | $\frac{3^2}{5^2}$ | $\frac{2^3}{5}$ | $\frac{2\cdot 3}{5}$ | $\frac{3^2}{5}$ | $\frac{2^2}{3}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3^2}{2^3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{2^2}$ | $\frac{3\cdot 5}{2^3}$ | $\frac{5^2}{2\cdot 3^2}$ | $\frac{5^2}{2^2\cdot 3}$ | $\frac{5^2}{2^4}$ | $\frac{3\cdot 5^2}{2^6}$ | $\frac{5^3}{2^3 3^2}$ |
| *Sol♭* | *Re♭* | *La♭* | *Mi♭* | *Si♭* | *Fa* | *Do* | *Sol* | *Re* | *La* | *Mi* | *Si* | *Fa#* | *Do#* | *Sol#* | *Re#* | *La#* |
| $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ | $z_5$ | $z_6$ | $z_7$ | $z_8$ | $z_9$ | $z_{10}$ | $z_{11}$ | $z_{12}$ | $z_{13}$ | $z_{14}$ | $z_{15}$ | $z_{16}$ | $z_{17}$ |

Ahora los términos son productos de potencias de 2, 3 y 5 (no sólo de 2 y 3). Como no siempre es la misma potencia de 5, es evidente que no se puede pasar de un término al siguiente multiplicando por 3/2 (y reduciendo si fuera necesario al intervalo [1, 2), al menos en todos los casos. Se observa sin embargo que sí sucede para los términos consecutivos en los que no varía la potencia de 5. En los otros:

$$z_2 \rightarrow z_3 \qquad z_5 \rightarrow z_6 \qquad z_9 \rightarrow z_{10} \qquad z_{12} \rightarrow z_{13} \qquad z_{16} \rightarrow z_{17}$$

se pasa de uno al siguiente multiplicando por 40/27 o 20/27, que, reducidos al intervalo [1, 2) es $q = 40/27$, a lo que se denomina *quinta sintónica*. Obsérvese, por otra parte, que la quinta 3/2 (que para distinguirla suele llamarse *quinta natural*) y la quinta sintónica difieren en muy poco (menos de 0.02).

Se tiene por tanto:

$$z_1 \rightarrow z_2 \xrightarrow{q} z_3 \rightarrow z_4 \rightarrow z_5 \xrightarrow{q} z_6 \rightarrow z_7 \rightarrow z_8 \rightarrow z_9 \xrightarrow{q} z_{10} \rightarrow z_{11} \rightarrow z_{12} \xrightarrow{q} z_{13} \rightarrow z_{14} \rightarrow z_{15} \rightarrow z_{16} \xrightarrow{q} z_{17} \qquad (3)$$

en donde debe entenderse que para pasar de un término al siguiente se ha multiplicado por la quinta natural, 3/2, si no se ha escrito nada encima de la flecha, y por la quinta sintónica, $q = 40/27$, si aparece $q$ sobre la flecha correspondiente.

Podría decirse entonces que el sistema de Zarlino se obtiene por el encadenamiento de las quintas natural y sintónica.

- *P. Expresa el valor de cada una de las notas como potencia de una misma nota y la coma sintónica.*

$$z_9 = z_8 \cdot 3/2 = z_8^{\,2} \quad , \quad z_{10} = z_9 \cdot q = z_8^{\,2} \cdot q \quad , \quad \text{etcétera.}$$

y en general:

$$\begin{cases} z_8^{\,n-5} \cdot q^{-2} & , \ 1 \leq n \leq 2 \\ z_8^{\,n-6} \cdot q^{-1} & , \ 3 \leq n \leq 5 \\ z_8^{\,n-7} \cdot q^{-0} & , \ 6 \leq n \leq 9 \\ z_8^{\,n-8} \cdot q & , \ 10 \leq n \leq 12 \\ z_8^{\,n-9} \cdot q^{2} & , \ 13 \leq n \leq 16 \\ z_8^{\,n-10} \cdot q^{3} & , \ n = 17 \end{cases} \qquad (4)$$

lo que permite decir que los valores de las notas de la escala de Zarlino están generados por $\{z_8\, ,\, q\}$.

Por último, como $z_8^{-1} = 2/3$, y su representante en $[1, 2)$ es $4/3 = z_6$, podría repetirse el esquema (3) cambiando el sentido de las flechas y $q$ por $q^{-1}$, y entendiendo que se pasa de un término al siguiente multiplicando por 4/3, si no se ha escrito nada encima de la flecha, y por $q^{-1}$ en caso contrario. Los valores del sistema de Zarlino están también generados, pues, por $\{z_6\, ,\, q^{-1}\}$, y su término general es el mismo que (4), pero sustituyendo en el segundo término $z_8$ por $z_6$ y cambiando de signo sus exponentes (no los de $q$).

## MODIFICACIÓN POR DELEZENNE DEL SISTEMA DE ZARLINO

El físico Charles Delezenne (1776-1866) modificó la afinación de Zarlino para introducir un sistema más coherente (en el que no se diera la irregularidad existente ya indicada para las notas *Fa#* y *Re*Ь), con independencia de que determinados sonidos fueran más o menos agradables al oído. En primer lugar, se asignaron los mismos valores que en aquél para las notas diatónicas, luego continúan existiendo dos tonos: el *grande* (intervalos *Do-Re, Fa-Sol* y *La-Si,* cuyo valor es 9/8) y el *pequeño* (*Re-Mi* y *Sol-La,* de valor 10/9); además de un semitono, llamado *diatónico,* relativo a los intervalos *Mi-Fa* y *Si-Do,* que vale 16/15. Sin embargo, así como en el de Zarlino sólo existe un semitono cromático, pero se distingue entre dos diatónicos, en el de Delezenne sólo hay un semitono diatónico, pero se establecen dos cromáticos (Zamacois, 1975, p. 152). Son los siguientes: el *semitono cromático relativo al tono grande* (diferencia entre el tono grande y el semitono diatónico) y el *semitono cromático correspondiente al tono pequeño* (diferencia entre el tono pequeño y el semitono diatónico); sus valores correspondientes son, respectivamente:

$$(9/8) : (16/15) = 135/128 = 3^2 \_ 5/2^7 \qquad (10/9) : (16/15) = 25/24 = 5^2/(2^3 \_ 3)$$

- *P. Calcula los valores de todas las notas en el sistema de Delezenne y escríbelos en una tabla. Halla los intervalos existentes y represéntalos en un esquema.*

Hay que calcular los valores de los sostenidos y bemoles.
Si *M* y *N,* su siguiente, son dos notas de la escala diatónica, entonces:

**Figura 7**

*M-N* tono grande: $M \xrightarrow{\times 135/128} M\#$ $\qquad$ $N\text{Ь} \xrightarrow{:135/128} N$

*M-N* tono pequeño: $M \xrightarrow{\times 25/24} M\#$ $\qquad$ $N\text{Ь} \xrightarrow{:25/24} N$

Valores de los sostenidos y bemoles en el sistema de Delezenne

Una vez hallados de este modo los valores de las notas cromáticas, se tiene:

**Cuadro 3**

| *Do* | *Do#* | *Re♭* | *Re* | *Re#* | *Mi♭* | *Mi* | *Fa* | *Fa#* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $3^3 \cdot 5/2^7$ | $2^4/(3 \cdot 5)$ | $3^2/2^3$ | $3 \cdot 5^2/2^6$ | $2 \cdot 3/5$ | $5/2^2$ | $2^2/3$ | $3^2 \cdot 5/2^5$ |

| *Sol♭* | *Sol* | *Sol#* | *La♭* | *La* | *La#* | *Si♭* | *Si* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^6/(3^2 \cdot 5)$ | $3/2$ | $5^2/2^4$ | $2^3/5$ | $5/3$ | $3^2 \cdot 5^2/2^7$ | $2^4/3^2$ | $3 \cdot 5/2^3$ |

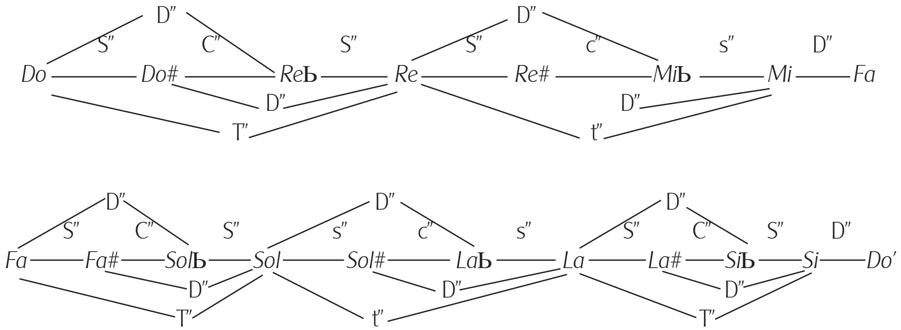
Valor de las notas en el sistema de Delezenne

Hallando los cocientes entre una nota y su precedente, resultan los siguientes intervalos:

- Tono
  - grande (T”) : $3^2/2^3$
  - pequeño (t”): $2 \cdot 5/3^2$
- Semitono diatónico (D”): $2^4/(3 \cdot 5)$
- Semitono cromático correspondiente a
  - tono grande (S”) : $3^3 \cdot 5/2^7$
  - tono pequeño (s”) : $5^2/(2^3 \cdot 3)$
- Coma correspondiente a
  - tono grande (C”) : $2^{11}/(3^4/5^2)$
  - tono pequeño (c”) : $2^7/5^3$

Esquemáticamente puede representarse así:

**Figura 8**




Intervalos en el sistema de Delezenne

- *P. Escribe los valores de las notas como producto de potencias y desígnalas como términos de una sucesión. ¿Qué observas?*

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2^6}{3^2\cdot 5}$ | $\frac{2^4}{3\cdot 5}$ | $\frac{2^3}{5}$ | $\frac{2\cdot 3}{5}$ | $\frac{2^4}{3^2}$ | $\frac{2^2}{3}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3^2}{2^3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{2^2}$ | $\frac{3\cdot 5}{2^3}$ | $\frac{3^2\cdot 5}{2^5}$ | $\frac{3^3\cdot 5}{2^7}$ | $\frac{5^2}{2^4}$ | $\frac{3\cdot 5^2}{2^6}$ | $\frac{3^2\cdot 5^2}{2^7}$ |
| *Sol♭* | *Re♭* | *La♭* | *Mi♭* | *Si♭* | *Fa* | *Do* | *Sol* | *Re* | *La* | *Mi* | *Si* | *Fa#* | *Do#* | *Sol#* | *Re#* | *La#* |
| $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_6$ | $d_7$ | $d_8$ | $d_9$ | $d_{10}$ | $d_{11}$ | $d_{12}$ | $d_{13}$ | $d_{14}$ | $d_{15}$ | $d_{16}$ | $d_{17}$ |

Se tiene entonces:

$$d_1 \to d_2 \xrightarrow{q} d_3 \to d_4 \to d_5 \xrightarrow{q} d_6 \to d_7 \to d_8 \to d_9 \xrightarrow{q} d_{10} \to d_{11} \to d_{12} \to d_{13} \to d_{14} \to d_{15} \to d_{16} \to d_{17} \quad (5)$$

en donde se sobreentiende cuál es el significado de las flechas.
Se comprueba que:

$$d_n = \begin{cases} d_8^{\,n-6}\cdot q^{-1} & , \quad 1 \le n \le 4 \\ d_8^{\,n-7}\cdot q^{0} & , \quad 5 \le n \le 9 \\ d_8^{\,n-8}\cdot q & , \quad 10 \le n \le 14 \\ d_8^{\,n-9}\cdot q^{2} & , \quad 15 \le n \le 17 \end{cases} \quad (6)$$

lo que permite decir que la escala de Delezenne está generada por $\{d_8\ ,\ q\}$ (o por $\{d_6\ ,\ q^{-1}\}$).

## RELACIONES ENTRE LOS TRES SISTEMAS

Empecemos por las notas de los dos primeros:

- *P. Estudia la relación entre las notas de los sistemas pitagóricos y de Zarlino.*

Lo primero que se observa (cuadros 1 y 2) es que los valores de las notas del sistema de Zarlino (en los casos de no coincidencia) son más sencillos que sus correspondientes de la gama pitagórica, tal como se buscaba al crear el primero.

En la escala diatónica los valores de *Fa, Do, Sol* y *Re* son iguales, y entre las notas no coincidentes (*La, Mi, Si*), se tiene:

$$z_{10} = (80/81) \cdot p_{10} \qquad z_{11} = (80/81) \cdot p_{11} \qquad z_{12} = (80/81) \cdot p_{12}$$

El factor de proporcionalidad es el inverso de la coma sintónica $c$, y entre los bemoles y sostenidos se comprueba que:

$$z_1 = c^2 \cdot p_1 \quad z_2 = c^2 \cdot p_2 \quad z_3 = c \cdot p_3 \quad z_4 = c \cdot p_4 \quad z_5 = c \cdot p_5 \quad z_{13} = c^{-2} \cdot p_{13}$$

$$z_{14} = c^{-2} \cdot p_{14} \quad z_{15} = c^{-2} \cdot p_{15} \quad z_{16} = c^{-2} \cdot p_{16} \quad z_{17} = c^{-3} \cdot p_{17}$$

En resumen:

$$z_n = \begin{cases} c^2 \cdot p_n & , \ 1 \leq n \leq 2 \\ c \cdot p_n & , \ 3 \leq n \leq 5 \\ p_n & , \ 6 \leq n \leq 9 \\ c^{-1} \cdot p_n & , \ 10 \leq n \leq 12 \\ c^{-2} \cdot p_n & , \ 13 \leq n \leq 16 \\ c^{-3} \cdot p_n & , \ n = 17 \end{cases} \tag{7}$$

lo que pone de manifiesto el papel fundamental que desempeña la coma sintónica; podría decirse que adopta la función de "factor de conversión" para pasar de un sistema al otro.

- *P. Estudia las relaciones entre las notas del sistema de Zarlino y de Delezenne, entre las notas de los sistemas pitagórico y el de Delezenne y entre los intervalos de los tres sistemas.*

Para lo primero (cuadros 2 y 3) se observa que las notas en ambos sistemas tienen asignados valores sencillos (más aún los de Zarlino), no como la gama pitagórica. También se admite que once valores coinciden y que en los otros seis se pasa de uno a su correspondiente en el otro sistema multiplicando por $c$ o $c^{-1}$. En resumen, se tiene:

$$d_n = \begin{cases} c^{-1} \cdot z_n & , \quad n = 1, 2, 5 \\ z_n & , \quad n = 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16 \\ c \cdot z_n & , \quad n = 13, 14, 17 \end{cases} \tag{8}$$

De las relaciones (7) y (8) se obtiene, por último, la relación entre los valores de las notas de los sistemas pitagórico y de Delezenne:

$$d_n = \begin{cases} c \cdot p_n & , \quad 1 \leq 4 \\ p_n & , \quad 5 \leq 9 \\ c^{-1} \cdot p_n & , \quad 10 \leq 14 \\ c^{-2} \cdot p_n & , \quad 15 \leq 17 \end{cases} \tag{9}$$

En cuanto a los intervalos, recordemos que existían los siguientes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| • Pitagórico: | T | D | S | C |
| • Zarlino: | T’ y t’ | D’ y d’ | S’ | C’ y c’ |
| • Delezenne: | T” y t” | D” | S” y s” | C” y c” |

Y se comprueba que son iguales los siguientes:

- T = T’ = T”: tono pitagórico y tono grande de Zarlino y Delezenne
- t’ = t”: tono pequeño de Zarlino y Delezenne
- d’ = D”: semitonos diatónicos, de Zarlino correspondiente al tono pequeño, y de Delezenne
- S’ = s”: semitonos cromáticos, de Zarlino, y correspondiente al tono pequeño de Delezenne
- c’ = c”: comas de Zarlino y de Delezenne correspondientes al tono pequeño

## RESUMEN Y CONCLUSIONES

Cuando escuchamos música, nos sentimos inmersos en la belleza de los sonidos, pero no somos conscientes de que también se encuentra escondido otro mundo complejo de ondas y relaciones matemáticas. Afortunadamente, sin embargo, para poder disfrutar de la música no es necesario tener presente su entramado matemático, aunque probablemente, si se conociera, se podrían entender no pocos aspectos de la música.

El objetivo de este artículo ha sido, precisamente, indagar sobre esa estructura matemática latente en los sistemas de afinación pitagórico, de Zarlino y de Delezenne, aunque no sean, desde luego, los más empleados (el estudio se ha realizado desde un punto de vista teórico). No obstante, hay que decir que la fidelidad a uno u otro sistema en la práctica, ciertamente, es relativa, pues por fortuna el oído humano no es un instrumento de cómputo de vibraciones.

Como se ha visto, en los tres sistemas examinados las notas vienen dadas por números racionales: productos de potencias enteras, de 2 y 3 en el primero, y de 2, 3 y 5 en los otros dos, lo que implica, lógicamente, que las notas musicales se correspondan con armónicos de la serie natural (sus sonidos son muy parecidos). Y a todos ellos se les ha dotado de una organización matemática similar, que permite expresar sintéticamente sus propiedades comunes, y mediante la cual también es más sencillo compararlos.

Entre los tres existen analogías y diferencias, la mayoría de las cuales ya han sido puestas de manifiesto. Desde el punto de vista matemático, las mayores similitudes, además de la expresión racional de sus sonidos (lo que lo distingue de los otros dos, el temperado y el de Holder), es que sus notas se obtienen por encadenamiento de quintas (natural en el primer caso y natural y sintónica en los otros dos) y la proximidad entre los sistemas de Zarlino y Delezenne.

Pero también hay diferencias, claro está, aunque mediante la coma sintónica, que representa una especie de factor de conversión, se puede pasar de uno a los otros. En primer lugar, no sólo los valores de las notas de la gama pitagórica (en aquellos en los que no hay coincidencias) son notablemente más complicados en general que los correspondientes en los otros sistemas, sino que asimismo sucede –es sencillo comprobarlo– con los valores de los intervalos del primero y de los otros dos. Entre ellos, por otra parte, hay ciertas discrepancias: acaso la más importante sea que en el sistema pitagórico el semitono diatónico es menor que el cromático, en cambio, en los otros sucede al revés. Además, en el primero hay un semitono diatónico y uno cromático, mientras que en el segundo hay uno cromático y dos diatónicos y en el tercero uno diatónico y dos cromáticos; y asimismo varían las comas (la pitagórica en el primero, y la sintónica y otras dos, correspondientes a cada uno de los tonos, en el segundo y el tercero). Pero incluso en tales divergencias se encuentran algunas coincidencias: además, obviamente, del valor de *Do* (referencia), en los tres son iguales *Re* y *Sol* (lo que desde luego no sucede en los sistemas temperado y de Holder), y a ello hay que añadir la igualdad de varios intervalos de los distintos sistemas, como se ha estudiado en la sección anterior. En resumen, a nuestro juicio, son mayores las coincidencias que las diferencias; los tres obedecen a una estructura matemática similar e incluso sucede que los dos últimos proceden o son variaciones del sistema de Pitágoras, inicio de la ciencia musical.

En cuanto a la propuesta para el aula, nosotros ya hemos puesto en práctica una vez lo relativo a los sistemas pitagórico y de Zarlino, y creemos que la experiencia fue interesante, pues los alumnos "descubrieron" ciertos aspectos del entramado matemático de la música (con cierta sorpresa de alguno, especialmente, de quienes se habían confesado carentes de toda formación musical). Las principales conclusiones que obtuvimos fueron las siguientes: la constatación de la riqueza didáctica del trabajo en grupos, por descubrimiento (aunque guiado); la importancia que tuvieron las representaciones y esquemas en el proceso de descubrimiento y como labor de síntesis (de hecho, fue un grupo de alumnos quien propició en cierto modo su uso frecuente); la detección de las dificultades que suelen encontrar los estudiantes para organizar un problema matemáticamente con una notación adecuada, y lo beneficioso que puede ser para ellos (y el poco "costo" que conlleva) las indicaciones que en ese sentido haga el profesor; por último, la facilidad que tienen los alumnos para razonar por analogía: lo más difícil fue realizar la modelización matemática de la gama pitagórica, pero luego resultó más sencillo con el sistema de Zarlino, reproduciendo un proceso similar.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bouvier, A. *et al.*, (1986), *Didactique des Mathématiques*, París, Cedic/Nathan.

Caplow, T. (1974), *Dos contra uno: teoría teoría de coaliciones en las tríadas*, Madrid, Alianza Universidad.

Castro, E. y E. Castro (1997), "Representaciones y modelización", en L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona, ICE/Horsori, pp. 95-124.

Chica, A. (2001), *Descartes. Geometría y método,* Madrid, Nivola.
Estévez, F. (1990), *Acústica musical,* Madrid, Ópera Tres.
González, P. M. (2001), *Pitágoras. El filósofo del número,* Madrid, Nivola.
Guzmán, M. de (1986), "Los pitagóricos", en *Historia de la Matemática hasta el siglo* XVII, Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, pp. 11-35.
Loy, G. (2006), *Musimathics, The Mathematical Foundations of Music,* vol. 1, Cambridge, The MIT Press.
Herrán, A. de la y J. Paredes (2011), *Técnicas de enseñanza para todos los niveles educativos,* Madrid, Síntesis (*preprint* facilitado por los autores).
Orantes, J. L. (1983), "Leyes físicas de la acústica musical", *Nueva Revista de Enseñanzas Medias,* núm. 2, pp. 87-93.
Orton, A. (1990), *Didáctica de las matemáticas,* Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia/Ed. Morata.
Peralta, J. (2003), "Matemáticas para no desafinar", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* (sección Educación), vol. 6, núm. 2, pp. 437-456.
——— (2008), "Las matemáticas y las artes liberales", en *Dibujo Técnico y Matemáticas: una consideración interdisciplinar,* Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia, Secretaría General Técnica, pp. 91-118.
Soler, J. (1982), *La música-I. De la época de la religión a la edad de la razón,* Barcelona, Montesinos.
Zamacois, J. (1975), *Teoría de la música,* Libro II, Barcelona, Labor.

## DATOS DEL AUTOR

**Javier Peralta**
Departamento de Didácticas Específicas,
Facultad de Formación de Profesorado y Educación,
Universidad Autónoma de Madrid, España.
javier.peralta@uam.es