Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Martínez-Planell, Rafael; Carmen González, Ana; Di Cristina Yumet, Gladys; Acevedo, Vanessa
Construcciones SERLIST y SERFUNC de series infinitas
Educación Matemática, vol. 23, núm. 3, diciembre, 2011, pp. 183-207
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Construcciones SERLIST y SERFUNC de series infinitas

Rafael Martínez-Planell, Ana Carmen González,
Gladys Di Cristina Yumet y Vanessa Acevedo

Resumen: Éste es un estudio de cómo construyen estudiantes universitarios la noción de serie infinita como sucesión de sumas parciales. Usando la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), se muestra cómo los estudiantes suelen construir dos objetos cognitivos diferentes que describimos en el artículo y que denominamos SERLIST y SERFUNC. Esencialmente, en la conceptuación SERLIST se percibe una serie como una suma infinita, mientras que en la conceptuación SERFUNC, ésta se percibe como una sucesión de sumas parciales. Las nociones SERLIST y SERFUNC generalizan nociones análogas anteriormente usadas en el caso de sucesiones infinitas. El estudio cualitativo está basado en entrevistas semiestructuradas a 14 estudiantes de pregrado. Hallamos que 12 de los 14 estudiantes entrevistados tuvieron gran dificultad en construir una noción de serie como sucesión de sumas parciales. Nuestro estudio sugiere algunas actividades que podrían ayudar a remediar esta dificultad.

Palabras clave: cálculo, series infinitas, APOE, sucesión de sumas parciales, sucesiones.

Construcciones serlist y serfunc de series infinitas

Abstract: This is a study of how college students construct the notion of an infinite series as a sequence of partial sums. Using Action-Process-Object-Schema theory (APOS) it is shown that students tend to construct two different cognitive objects, SERLIST and SERFUNC, which are described in the article. Essentially, in a SERLIST conception a series is perceived as an infinite sum while in a SERFUNC conception it is perceived as a sequence of partial sums. The SERLIST and SERFUNC notions generalize analogous notions that have been used in the case of infinite sequences. The qualitative study is based on semi-structured interviews to 14 undergraduate students. We found that 12 of the 14 interviewed students

Fecha de recepción: 9 de febrero de 2009.

had great difficulty constructing a notion of infinite series as a sequence of partial sums. Our study suggests some activities that may help remedy this situation.

Keywords: calculus, infinite series, APOS, sequence of partial sums, sequences.

INTRODUCCIÓN

El concepto de serie infinita causa gran dificultad en muchos estudiantes (Bagni, 2000; Sierpińska, 1987). Por ello, es importante conocer cómo construyen los estudiantes este objeto cognitivo para así poder guiarlos a un mejor entendimiento del concepto.

El entendimiento intuitivo de series infinitas como sumas infinitas es un obstáculo para el entendimiento formal de series infinitas. Para algunos estudiantes, la naturaleza de un proceso infinito es tal que no se puede completar en una cantidad finita de tiempo y esto puede causarles dificultad en el momento de sumar una serie (Sierpińska, 1987). Esto puede observarse en el caso de estudiantes que no han tenido enseñanza formal en series infinitas, como en Fischbein, Tirosh y Melamed (1981), donde se explora la posibilidad de medir la "aceptación intuitiva" *(intuitive acceptance)* de una idea, asignándole un valor numérico a esta noción con base en una serie de seis preguntas diseñadas para tratar de medir cuánta confianza tiene el estudiante en su respuesta a un problema y qué tan obvia le parece su respuesta al problema. En cada uno de los ocho problemas del cuestionario que utilizaron, los participantes debían contestar el problema, justificar su contestación y, además, contestar las seis preguntas que los investigadores usaron para clasificar su "aceptación intuitiva" de la respuesta que dieron. Dos de los problemas incluidos en su cuestionario fueron:

1) Dado un segmento $AB = 1$ m. Supongamos que se añade otro segmento BC = $\frac{1}{2}$ m. Continuemos añadiendo de esta manera segmentos de $\frac{1}{4}$ m, $\frac{1}{8}$ m, etc. ¿Este proceso de añadir segmentos, como se describe arriba, terminará? (se incluía una figura)

2) Consideremos nuevamente la pregunta anterior. ¿Cuál será la suma de los segmentos $AB + BC + CD + \ldots$ (y así sucesivamente)?

Los resultados del cuestionario de Fischbein, Tirosh y Melamed (1981), que fue usado con 107 estudiantes en el octavo o noveno año de estudio preuniversitario, incluyen:

La mayoría (84.1%) de los sujetos admiten la infinidad del proceso en la pregunta 1, dando justificaciones tales como: "siempre es posible añadir un segmento de recta que mida la mitad que el anterior", "una recta consiste de una infinidad de puntos y cada segmento se puede dividir una infinidad de veces. Por tanto, se puede continuar añadiendo segmentos", "1/2, 1/4, 1/8, 1/16 ... los números no tienen fin", "Para cada número es posible hallar un número que sea su mitad y, por tanto, el proceso no tiene fin". Más aún, estos estudiantes mostraron un alto grado de "aceptación intuitiva" según las preguntas diseñadas por los investigadores para tratar de medir ésta noción. Sólo seis de los 107 estudiantes (5.6%) contestaron que la suma de los segmentos en la pregunta 2 era 2 y los que así contestaron lo hicieron con un grado muy bajo de "aceptación intuitiva", según las preguntas diseñadas para medir esto. De hecho, tres de los estudiantes que dijeron que la suma era 2 no dieron justificación alguna de su respuesta. Los otros tres hicieron referencia a la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ... La mayoría de los estudiantes dieron una contestación diferente de 2 en la pregunta 2, pero consideraron que su respuesta tenía un grado relativamente alto de "aceptación intuitiva". Entre las respuestas dadas estaban que la suma era infinita y que la suma sólo se acerca a 2. Algunas de las justificaciones que dieron fueron: "el proceso se puede continuar sin fin", "va a haber una infinidad de segmentos", "la suma tiende a 2. Sin importar cuánto continuemos añadiendo segmentos, nunca vamos a alcanzar 2", "$S = 2 - (1/\infty)$, porque no hay fin para la suma de los segmentos". Este estudio de Fischbein, Tirosh, y Melamed evidencia la percepción de serie infinita que se tiene de manera natural antes de recibir instrucción formal en el tópico.

Como veremos en nuestro estudio, es común que los estudiantes sigan pensando en una serie como un proceso infinito aun después de recibir instrucción formal. En Tall (1992) se observó que ideas informales de límite traen consigo un sentido dinámico de algo acercándose a un valor límite y se dio como ejemplo que, cuando n aumenta, la suma $1 + \frac{1}{2} + \ldots + (\frac{1}{2})^n$ se acerca al límite 2. De aquí se argumenta que esto tiene como consecuencia la creencia que se llama "la propiedad genérica del límite", o sea, que una propiedad común a todos los términos de una sucesión también aplica a su límite. Esta creencia la vemos ejemplificada repetidamente en nuestras entrevistas. Bagni (2000, 2005) usó la historia de la matemática para obtener información de posibles obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes. Él observó que, para Guido Grandi (1671-1742), se puede obtener 1 o 0 como la suma de la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ Según Grandi: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$, cuya suma debe ser 0 y 1 − 1 + 1 − 1 + ... = 1 − (1 − 1) − (1 − 1)− ..., cuya suma debe ser 1. Además, también Grandi sustituyó x=1 en la expansión $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$ para obtener que 1 − 1 + 1 − 1 + ... = ½. Bagni (2000, 2005) y otros historiadores (véase, por ejemplo, Kline, 1972) presentan múltiples ejemplos en los que la falta de una clara noción de convergencia lleva a matemáticos de la talla de James, John y Daniel Bernoulli, Lagrange, Leibniz, Newton, Euler, entre otros, a cometer lo que hoy día serían reconocidos como errores. No fue sino hasta el siglo XIX cuando Cauchy trabajó sobre las aportaciones de Gregory, Maclaurin, Euler y Gauss para construir la teoría de convergencia que usamos en la actualidad (véase Smith, 1958). Traduciendo a Kline (1972): "es justo decir que, en el trabajo en series del siglo XVII, dominaba el punto de vista formal. En general, los matemáticos hasta resentían cualquier tipo de limitación, tal como la necesidad de pensar acerca de convergencia". Observamos que, en las manipulaciones formales que hacían los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, éstos se permitían asociar términos de la serie de maneras diferentes, mientras que la formalización de Cauchy esencialmente sólo permite asociar los términos de una serie como: $\left(\left(\left(a_1+a_2\right)+a_3\right)+a_4\right)+a_5+\cdots$ Bagni (2000, 2005) consideró la opinión de estudiantes sobre la serie de Grandi, $1-1+1-1+\ldots$, y observó que sus respuestas eran similares a las que históricamente se dieron en la comunidad matemática, viendo en esto una instancia que sustenta la observación de Piaget y García (1983) de que, en algunos casos, el desarrollo del conocimiento en un individuo es paralelo al desarrollo histórico. Esto también se puede observar en nuestro estudio, donde se utiliza la serie de Grandi como parte de las entrevistas. Veremos en nuestro estudio que la mayor parte de los estudiantes, aun después de haber sido definida la convergencia de una serie infinita, siguen haciendo las construcciones de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII.

Recordemos que, dada una sucesión infinita $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, la serie infinita $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ se define como la sucesión de sumas parciales $\left(S_n\right)_{n=1}^{\infty}$, donde $S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$. Por ende, una serie infinita es una sucesión y, como tal, es importante considerar lo que se conoce acerca de cómo entienden los estudiantes la noción de una sucesión infinita. Mamona (1990) halló que los estudiantes se resisten a la idea de considerar que una sucesión es una función. McDonald, Mathews y Strobel (2000) mostraron que los estudiantes suelen construir dos objetos cognitivos diferentes del concepto de sucesión. En una construcción, SEQLIST, los estudiantes piensan en una sucesión como una lista infinita. En la otra, SEQFUNC, piensan en una sucesión como una función con dominio en los números naturales. En un resultado similar, Przenioslo (2006) halló que las percepciones que tienen los estudiantes de sucesión infinita se pueden dividir en dos grupos. Como en McDonald, Mathews y Strobel (2000), un grupo percibe una sucesión como una función, mientras que el otro lo asocia con elementos ordenados. En el estudio de Przenioslo participaron 446 estudiantes de escuela secundaria y 156 que comenzaban sus estudios universitarios. La mitad de los participantes eran considerados talentosos matemáticamente. De todos los estudiantes sólo 12% percibió una sucesión como una función, lo que también sustenta la observación de Mamona (1990). Más aun, sólo la mitad de ese 12% fue capaz de usar eficientemente la noción de sucesión como función.

El artículo de McDonald, Mathews y Strobel (2000) nos sirve de base para el presente trabajo. Ellos aplicaron la teoría APOE para estudiar las construcciones que hacen los estudiantes del concepto de sucesión infinita. Los resultados de su estudio se resumen más adelante en este artículo.

MARCO TEÓRICO

Sólo proveemos una breve descripción de la terminología que se utiliza en la teoría APOE. Para mayor información puede consultar Dubinsky (1991, 1994), Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas (1996) o Dubinsky (1996). En la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), un individuo tiene una conceptuación de acción de una noción matemática cuando está limitado a transformar un objeto matemático de acuerdo con algún algoritmo explícito que percibe como externo o cuando se ve limitado a recurrir a datos memorizados. A medida que un individuo reflexiona sobre sus acciones, puede *interiorizar* éstas en un proceso. Una conceptuación de proceso es esta transformación interna de un objeto. El individuo puede describir o reflexionar sobre cada paso de la transformación sin tener que llevarlo a cabo explícitamente. Los procesos se pueden transformar revirtiéndolos o coordinándolos con otros procesos. Cuando un individuo reflexiona sobre acciones que se aplican a un proceso, puede llegar a cobrar conciencia del proceso como una totalidad, o sea, lo *encapsula* en un objeto. Un esquema de un concepto matemático es la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas previamente construidos que se coordinan y sintetizan para formar estructuras matemáticas a las que se puede recurrir para resolver problemas (Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Trigueros, 2005). Los esquemas evolucionan a medida que se construyen y reconstruyen nuevas relaciones entre acciones, procesos, objetos y otros esquemas nuevos y existentes. Su evolución se puede describir usando los niveles de la "tríada", *intra, inter* y *trans*, de Piaget y García (1983). Se dice que el desarrollo de un esquema está en nivel *intra* cuando las acciones, procesos, objetos y otros esquemas que lo componen están mayormente aislados los unos de los otros. Cuando hay algunas conexiones, transformaciones repetibles o subestructuras entre diferentes componentes del esquema, se dice que éste está en un nivel *inter* de desarrollo. En el nivel *trans*, los diferentes componentes del esquema se interrelacionan de una manera coherente, formando una nueva estructura que, a su vez, pasa a ser un nuevo objeto matemático para el individuo (Cooley, Trigueros y Baker, 2007).

Aunque pueda pensarse que en la teoría APOE hay una progresión lineal de acción a proceso a objeto y luego a organizar diferentes acciones, procesos y objetos en esquemas, esto frecuentemente se presenta como una progresión dialéctica en la que puede haber desarrollos parciales y retrocesos de una a otra conceptuación (Czarnocha, Dubinsky, Prabhu y Vidakovic, 1999). Lo que la teoría dice es que la manera en que un individuo trabaja con un problema matemático relacionado con un concepto es diferente, dependiendo de la conceptuación que se tenga.

La teoría APOE puede utilizarse para la investigación de dos maneras diferentes. Por un lado, se puede emplear la teoría para estudiar las construcciones que hacen los estudiantes luego de haber tomado uno o varios cursos relacionados con el tópico en estudio (Trigueros, 2000; Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001; Dubinsky, Weller, McDonald y Brown, 2005; Martínez-Planell y Trigueros, 2009; Trigueros y Martínez-Planell, 2010) y, por otro lado, la teoría también se puede usar para diseñar actividades destinadas a enseñar un tópico y luego analizar las construcciones que hicieron y las que no hicieron los estudiantes (Brown, De Vries, Dubinsky y Thomas, 1998; Dubinsky y Yiparaki, 2000; McDonald, Mathews y Strobel, 2000). Este estudio cae en la primera vertiente; usamos la teoría APOE para analizar las construcciones que hacen los estudiantes del concepto de serie infinita luego de que éstos han recibido instrucción formal en el tópico en uno o varios cursos.

Una descomposición genética de un concepto en APOE es una conjetura que establece el investigador basándose en su experiencia, en el concepto matemático según como es aceptado por la comunidad matemática y en la data que tenga disponible de las acciones, procesos, objetos, esquemas y coordinaciones que un estudiante puede hacer para construir el concepto. Debemos aclarar que una descomposición genética no es única. Diferentes investigadores pueden proponer diferentes descomposiciones genéticas. Lo que es importante es que ésta se compruebe utilizando data obtenida de estudiantes. A menudo, la data que se obtiene revela aspectos de la descomposición genética que deben describirse en mayor detalle para destacar construcciones en la descomposición que algunos estudiantes no están haciendo o construcciones que hacen los estudiantes que resultan ser diferentes de las esperadas en la descomposición genética. Esto lleva a crear materiales para ayudar a los estudiantes a hacer las construcciones que no están haciendo y a revisar la descomposición genética, mejorando cada vez más su capacidad descriptiva.

SUCESIONES INFINITAS SEGÚN MCDONALD, MATHEWS Y STROBEL Y UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL CONCEPTO DE SERIE INFINITA

De acuerdo con McDonald, Mathews y Strobel (2000), los estudiantes pueden hacer una construcción SEQLIST (SEQ, del inglés "*sequence*" que significa "sucesión"– y LIST, "lista") o SEQFUNC (SEQ, "sucesión", y FUNC, "función") como acción, proceso u objeto de sucesión infinita. En la construcción SEQLIST, los estudiantes piensan en una sucesión como en una lista infinita de números, mientras que en SEQFUNC piensan en una sucesión como en una función con dominio en los números naturales. En ese artículo, todos los estudiantes entrevistados tenían una construcción de objeto SEQLIST y/o un proceso u objeto SEQFUNC.

En el mismo artículo nos dicen que los estudiantes han hecho una construcción de un *objeto* cognitivo SEQLIST cuando pueden referirse a una lista de números separados por comas como a una entidad en sí y pueden aplicar acciones a estas listas tales como compararlas. También exhiben comportamiento consistente con el de una construcción de un objeto SEQLIST, poniendo la lista en paréntesis o corchetes o refiriéndose a la lista en singular. Los estudiantes exhiben comportamiento consistente con el de una construcción SEQFUNC como proceso, cuando se sienten cómodos dando ejemplos de sucesiones en forma cerrada o cuando dicen que una sucesión es una función o que una función con su dominio apropiadamente restringido es una sucesión. Su construcción SEQFUNC es un *objeto* cognitivo cuando pueden hacer acciones tales como manipular las formas cerradas de sucesiones o dar sus propiedades. Se dice que un estudiante que aun no ha encapsulado su construcción de sucesión en un objeto está limitado a un *proceso* en su construcción del concepto. Este parecería ser el caso de un estudiante que se refiere a la sucesión en plural y a la función en singular. También los estudiantes pueden mostrar su construcción de un proceso SEQFUNC cuando son capaces de discutir sucesiones como un proceso de dar valores de entrada y obtener valores únicos de salida.

Pensemos ahora en cómo puede ser que un estudiante construya su noción de serie infinita. Nuestra discusión incluye los elementos de una posible descomposición genética de este concepto. Para comenzar, es necesario que el estudiante tenga una construcción de sucesión infinita como objeto cognitivo. Dada una serie infinita, el estudiante puede comenzar aplicando la acción de sumar consecutivamente unos cuantos de los primeros términos de la serie. Es crucial que se vayan sumando términos consecutivos. Mientras se interioriza ésta acción, podemos conjeturar que el estudiante con una conceptuación SEQLIST de sucesión pensará que, al ir sumando los primeros términos de la serie, está formando una lista de números en la que el último número que aparece le va dando un total parcial. No tiene la noción de que a un entero positivo le corresponde una suma parcial específica y que, por ende, los resultados parciales se pierden al no llevar constancia de ellos. Este estudiante puede perder de vista que debe sumar términos consecutivos de la serie y, para obtener resultados parciales más rápidamente, puede llegar a agrupar términos de diferentes maneras. El estudiante estará, en efecto, pensando en la serie como un proceso de suma que no termina. En este caso, el estudiante va a estar construyendo un proceso diferente del que se espera en la descomposición genética, pues no está interiorizando la acción de sumar términos *consecutivos* de una serie. Llamaremos a éste un proceso SERLIST, "SER" de "serie" y "LIST" de lista. Observe que la terminología SERLIST es análoga a la SEQLIST utilizada por McDonald, Mathews y Strobel (2000), lo único es que ahora empezamos con "SER" de "serie" en vez de con "SEQ" del inglés "sequence" que significa "sucesión". Un estudiante con una conceptuación SEQFUNC de sucesión (McDonald, Mathews y Strobel, 2000) está en posición de ver que, al ir sumando consecutivamente los términos de una serie, está formando una nueva sucesión de números, la sucesión de sumas parciales. Su conceptuación SEQFUNC de sucesión le permite ver que a cada entero positivo le corresponde una suma parcial. Cuando se interioriza esta acción, el estudiante puede reflexionar sobre el proceso de sumar términos consecutivos de una serie y explicar este proceso sin tener que llevarlo a cabo explícitamente. Llamaremos a éste un proceso SERFUNC, "SER" de "serie" y "FUNC" de "función". Que un estudiante esté en posición de cobrar conciencia de la sucesión de sumas parciales como un ente en sí mismo no implica que necesariamente procederá a hacer esta construcción. Un estudiante con una conceptuación de proceso puede ir y venir entre su noción de sucesión como lista y su noción de sucesión como función, por lo que podría ser inconsistente en su tratamiento de series infinitas, tratando la serie a veces como un proceso de suma que no termina y, otras, como una sucesión de sumas parciales.

La necesidad de aplicar acciones a series, ya sea para discutir su convergencia o computar su suma, obliga a que el estudiante encapsule la noción de proceso que tenga en un objeto cognitivo. Debemos tener en cuenta que, aplicar propiedades a una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que sólo requieran la manipulación de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no implica que se haga uso ni que se tenga conciencia de la sucesión de sumas parciales; como consecuencia, problemas que sólo requieren este tipo de acción no permiten distinguir entre las conceptuaciones SERLIST y SERFUNC. Finalmente, observamos que la acción de sumar una serie puede requerir que el estudiante coordine su construcción de serie con su esquema de límites.

Arriba hemos conjeturado dos posibles construcciones de serie infinita de acuerdo con la construcción de sucesión infinita que tenga el estudiante. Hay estudiantes que pueden exhibir la construcción de un objeto SERLIST (de SER, "serie", y LIST,"lista") cuando se refieren a una lista de números separados por signos de suma como a una entidad de por sí y pueden efectuar acciones sobre series así expresadas tales como clasificarlas, sumarlas o comparar dos de ellas. También pueden exhibir comportamiento consistente con una conceptuación SERLIST objeto cuando pueden expresar una tal suma infinita empleando notación sigma o cuando se refieren a una tal suma en singular. Estudiantes con una conceptuación SERFUNC (SER de "serie" y FUNC de "función") pueden considerar una serie numérica infinita como una función, o sea, están conscientes de que, dado un entero positivo, hay una suma parcial que corresponde a ese entero, aunque no se esté pidiendo explícitamente que se produzca tal suma. Siguiendo con esta idea, diremos que un estudiante exhibe una construcción de un objeto SERFUNC cuando es capaz de tratar una serie como una sucesión de sumas parciales, por ejemplo, al discutir la convergencia de una serie haciendo uso explícito de la sucesión de sumas parciales. Un estudiante también exhibe comportamiento consistente con una conceptuación SERFUNC cuando dice que una serie es una sucesión de sumas parciales o cuando expresa la suma de una serie infinita como el límite de la sucesión de sumas parciales. En la discusión de sucesiones que se da en McDonald, Mathews y Strobel (2000) se dice que un estudiante exhibe comportamiento SEQFUNC cuando se muestra cómodo trabajando con la forma cerrada de sucesiones. En el caso de series, la forma cerrada de una serie, o sea, una fórmula para la enésima suma parcial, sólo se puede hallar fácilmente en algunas situaciones especiales, como en el caso de series geométricas o en casos en que podemos usar fracciones parciales para expresar la enésima suma como una suma telescópica. De aquí que también decimos que un estudiante exhibe una conceptuación SERFUNC cuando se muestra cómodo trabajando con la fórmula para la enésima suma parcial de una serie geométrica o cuando puede usar fracciones parciales para obtener una fórmula para la enésima suma parcial de una serie.

En resumen, en la conceptuación de objeto SERLIST, el estudiante está limitado a pensar en una serie como un proceso de suma que no termina al cual le puede aplicar acciones. En la conceptuación de objeto SERFUNC, el estudiante cobra conciencia de que la serie es una sucesión de sumas parciales a la cual puede recurrir cuando sea necesario. Un estudiante que se muestre inconsistente en su uso de la sucesión de sumas parciales, en situaciones donde es necesario usarla, exhibe la construcción de un proceso SERFUNC; aún no ha encapsulado completamente su construcción de la sucesión de sumas parciales en un objeto y, por tanto, puede recurrir ocasionalmente a una conceptuación SERLIST, aun cuando ésta pueda ser insuficiente para la situación dada. Esto también puede suceder en el caso en que un estudiante con una conceptuación de objeto SERLIST pueda estar en el proceso de construir una conceptuación SERFUNC de serie, al reflexionar sobre situaciones que requieren la manipulación mental de la sucesión de sumas parciales, como puede suceder para sumar algunas series infinitas o entender algunas demostraciones. En este caso, podemos esperar ver muestras del comportamiento asociado con ambas conceptuaciones.

MÉTODO

La pregunta que nos planteamos en esta investigación es: ¿los estudiantes tienden a hacer las construcciones SERLIST y SERFUNC del concepto de serie infinita según hemos conjeturado anteriormente?

Esta conjetura se puso a prueba llevando a cabo entrevistas semiestructuradas a un grupo de 14 estudiantes de pregrado (primeros 2 o 3 años de universidad). Primero se les administró un instrumento escrito que luego sirvió de base para las entrevistas. Éstas fueron grabadas, transcritas, analizadas independientemente por cada miembro del grupo de investigadores y, finalmente, discutidas en grupo hasta llegar a un consenso. Los participantes eran estudiantes de matemática e ingeniería de una universidad pública que ya habían tomado el curso de cálculo elemental donde se introduce la noción de serie infinita. Se escogieron estudiantes que conocíamos como buenos estudiantes, pues habían tomado el curso con nosotros o porque habían sido recomendados como buenos estudiantes por nuestros colegas. Todos ellos obtuvieron las mejores calificaciones, A o B, en el curso. Se escogieron buenos estudiantes, ya que nos interesaba su construcción de la noción de series como sucesión de sumas parciales y conjeturamos que sólo este tipo de estudiante sería capaz de hacer esta construcción. Sin embargo, al escoger solamente buenos estudiantes, inadvertidamente perdimos la capacidad de obtener suficientes datos acerca de conceptuaciones de acción y proceso SERLIST, pues éstas son las que podría esperarse que tengan los estudiantes más débiles. Por tanto, en este artículo nos referimos únicamente a conceptuaciones de objeto SERLIST y de acción, proceso y objeto SERFUNC. En cuanto al libro de texto que usaron los estudiantes entrevistados (Stewart, 2001), podríamos decir que muestra preferencia por presentar los conceptos en un contexto matemático, pero haciendo hincapié en la mecanización de la solución de ejercicios. Cada entrevista duró de 45 minutos a 1 hora.

Reproducimos a continuación parte del cuestionario que utilizamos para las entrevistas.

1) En sus propias palabras defina lo que es una serie.

Se incluyó esta pregunta porque la manera en que un estudiante describe verbalmente una serie puede darnos algún indicio del tipo de conceptuación SERLIST o SERFUNC que tiene.

2) Considere la siguiente expresión:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Indique si la serie converge o diverge. En cualquiera de los dos casos justifique su contestación tan cuidadosamente como pueda.

Si se puede calcular esta suma, ¿cuál es su valor?

Esta serie, aunque posiblemente ha sido vista anteriormente por algunos estudiantes, puede darnos evidencia de la conceptualización SERFUNC que pueden tener. La serie es suficientemente sencilla como para que estudiantes de pregrado puedan hacer referencia a su sucesión de sumas parciales para discutir su divergencia. Sin embargo, esta serie también admite el argumento de que diverge, pues la sucesión de sumandos 1, −1, 1, −1,... no converge a 0. Por supuesto, este último argumento no nos dice nada acerca de su posible conceptuación SERFUNC.

3) Considere la sucesión $a_n = (1/2)^n$, $n = 1,2,3...$

a) Escriba los primeros cuatro términos de la sucesión $\{a_n\}$.

b) Sea $S_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$. Escriba los primeros cuatro términos de $\{S_N\}$.

c) Dibuje la gráfica de $\{S_N\}$.

d) ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{N\to\infty} S_N$?

e) Explique el significado del enunciado $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$.

Las partes *a* y *b* de la pregunta buscan descubrir si los estudiantes están conscientes de las dos sucesiones que se pueden asociar de manera natural a una serie infinita; la sucesión (a_i) de los sumandos y la sucesión (S_N) de sumas parciales. La siguiente parte *c* también nos permite ver si los estudiantes distinguen entre estas dos sucesiones. Asimismo, nos permite ver si el estudiante puede tomar la acción de construir la representación gráfica de la serie infinita dada. La parte *d* se incluyó pensando en que ésta da al estudiante la oportunidad de expresar formal o verbalmente que el límite de la sucesión de sumas parciales es la suma de la serie, lo que podría darnos más evidencia de una conceptuación SERFUNC. Finalmente, la manera en que el estudiante trate la serie geométrica en la parte *e* puede potencialmente dar evidencia de su conceptuación SERFUNC o SERLIST.

4) Determine si las siguientes series convergen o divergen. Justifique su contestación.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{i}} + \frac{1}{i^5}$$

5) Se sabe que $\ln(n) < n$ para toda $n > 1$. Basado en esto, ¿qué puede decir del comportamiento de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ comparada con el de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$?

Las preguntas 4 y 5 no nos permiten distinguir si un estudiante tiene una conceptuación SERFUNC, ya que no requieren que se use ni se tenga conciencia de la sucesión de sumas parciales; las preguntas se pueden responder aplicando resultados que se articulan en términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sin embargo, estas preguntas nos pueden dar evidencia de que un estudiante tiene una conceptuación de objeto SERLIST (en vez de proceso o acción): identificar una serie como serie-*p*, determinar su convergencia, y comparar series son acciones que se aplican a un objeto.

RESULTADO DE LAS ENTREVISTAS

A continuación presentamos parte de las entrevistas a dos estudiantes. Comenzaremos con Juan, que exhibió una conceptuación de objeto SERFUNC. Luego consideraremos a Daniel, que muestra una conceptuación de proceso SERFUNC. Daniel también tiene una conceptuación de objeto SERLIST. El resto de los estudiantes mostró no haber interiorizado la acción de formar la sucesión de sumas parciales en un proceso, quedándose limitados a una conceptuación de acción SERFUNC y de objeto SERLIST.

Se le pidió a Juan que explicara lo que entiende por una serie:

Juan: Pues una serie... pues una acumulación de sucesión...

Entrevistador: ¿Una acumulación?....

Juan: ...de sucesiones, pues en vez de ponerle sucesión, pues tú vas acumulando, o sea, primero, los primeros dos términos, después los primeros terceros, después los cuatro términos, después una serie, a donde... hasta... dicho hasta donde llega la coma.

En su definición, Juan exhibe comportamiento asociado con una conceptuación SERFUNC; reconoce que se forma una nueva sucesión, la sucesión de sumas parciales. Para obtener más confirmación de esto se le pregunta:

Entrevistador: Dame un ejemplo de una serie.

Juan: S_1 es $1 + 2$, S_2 es igual a $1 + 2 + 3$, S_3... $1 + 2 + 3 + 4$, hasta S_n... que sería $1 + 2 + 3 \ldots + n + n + 1$.

Observe que el ejemplo de serie que da es el de una sucesión de sumas parciales. Al preguntarle sobre la serie $1 - 1 + 1 - 1$..., comienza argumentando su divergencia, basándose en el hecho de que la sucesión de sumandos $1, -1, 1, -1, \ldots$ no converge a 0. Sin embargo, también da un argumento basado en la sucesión de sumas parciales:

Juan: Diverge porque no tiende, la sucesión, a ningún valor específico, no tiende a cero, para empezar, y las sumas van a dar 0 o 1.

Entrevistador: ¿Cómo obtienes eso?

Juan: Porque tiene que, la sucesión tiene que, primero que nada tiene que converger a 0, y la sucesión no va a converger a 0 porque oscila entre 1 y −1.

Entrevistador: Bien, pero mira, aquí dices que va entre 1 y −1, pero aquí escribiste 1 y 0...

Juan: Pero eso es la serie... la serie va entre 1 y 0, porque la suma nunca da −1.

Entrevistador: Ok y ¿cómo llegas a eso?

Juan: Bueno, la primera da 1, la segunda 1 − 1, la tercera... 1 − 1 + 1, la tercera... esto es 1, esta otra es 1 − 1 + 1 − 1 que es 0..., ése es el patrón.

Juan puede evaluar los primeros términos S_1, S_2, S_3 y S_4 de la sucesión de sumas parciales, como le pide la parte *b* del problema *2* y es capaz de producir la gráfica de la sucesión de sumas parciales como pide la parte *c* (véase la figura 1). Esto provee evidencia adicional de su conceptuación SERFUNC. Parece ser que la conceptuación de Juan es de objeto, pues es capaz de aplicar acciones a la serie: la acción de decidir convergencia y la acción de conversión de una representación simbólica de la serie a una representación gráfica.

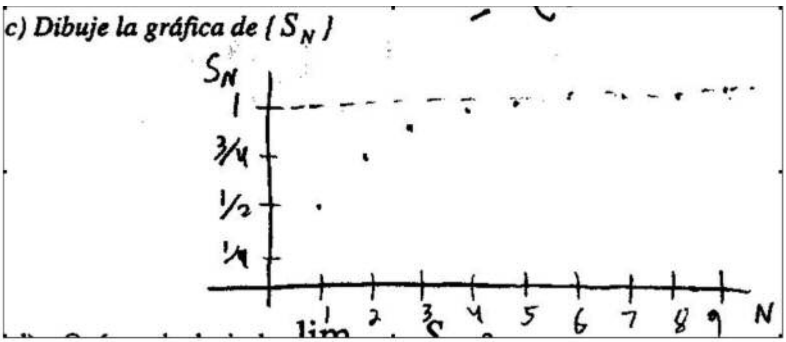

Figura 1 Respuesta escrita de Juan a la pregunta *3c*

Otro de los estudiantes entrevistados, Daniel, muestra un comportamiento diferente. Se le pregunta si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i$ converge o diverge. El estudiante la identifica como una serie geométrica e indica que converge a 1. Esto es consistente con una conceptuación de objeto: una serie es un objeto al cual se le pueden aplicar acciones tales como clasificarla y sumarla. Sin embargo, en ocasiones también puede exhibir una conceptuación de proceso, como en la siguiente discusión:

Entrevistador: Si escribo $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i = 1$, ¿qué significa esto?

Daniel: Eso significa que cuando tomamos todos los términos de esta serie, o sea, tomamos la sucesión de $(1/2)^i$, entonces pues cada término es $1/2$ elevado al valor de *i* donde estemos, pues al sumar todos esos términos el valor al que se va a ir acercando esa suma va a ser a 1. Mientras más grande tomemos el valor donde llega la *i*, más y más se va a acercar a 1 hasta que lleguemos a un punto donde tomamos todos los números entre 1 e infinito entero y sumamos cada término de la sucesión pues el valor va a ser tan y tan parecido a 1 que asumimos que es 1.

Con esta contestación, sospechamos que Daniel ve una serie como un proceso interminable de suma al cual se le pueden aplicar acciones, o sea, que tiene una conceptuación SERLIST. Su conceptuación de proceso puede verse cuando dice "...al valor de *i* donde estemos..." y luego, "...al sumar... el valor al que se va a ir acercando..." Esta conceptuación de serie es la que va a encapsular para aplicar acciones, tal como sumar la serie. Vemos en Daniel el mismo tipo de respuesta que ha sido documentada en algunas investigaciones del concepto de límite, por ejemplo en Fischbein, Tirosh, y Melamed (1981), donde se observa que dada $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$, la mayor parte de los estudiantes dice que la suma es infinita o que tiende a 1. Son pocos los que dicen que es 1. También, como observan en Gray y Tall (1987), puede ver el símbolo $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i$ como un proceso ejemplificado en la discusión anterior o como el resultado de ese proceso, como se muestra a continuación:

Entrevistador: Pero, ¿podrá ser menor que 1?

Daniel: Cuando nos acercamos a infinito, a medida que nos acercamos va a ser menor que infinito, pero cuando tomamos un número infinito no va a ser menor, va a ser 1. O sea, cuando llegamos hasta infinitos términos el valor va a ser 1.

Entrevistador: ¿Esto tiene algo que ver con límites?

Daniel: Sí, sí, esto lo podemos, esto lo podemos expresar también como sumatoria de *i* igual a 1 hasta *n* de $(1/2)^i$, donde el límite de *n* tiende a infinito. En este caso, estamos tomando la sumatoria y estamos viendo lo que sucede cuando la *n* se va acercando a infinito, o sea, cuando sumamos *n* términos de la sucesión, cuando se acerca a infinito decimos que esa sumatoria equivale a 1.

Observamos que, al principio, Daniel no usa terminología de límites para describir la serie; sin embargo, cuando se le pregunta directamente, es capaz de expresar correctamente la serie como un límite de su sucesión de sumas parciales, lo que abona a pensar que podría tener una conceptuación SERFUNC. Más aún, también fue capaz de hacer la gráfica de la sucesión de sumas parciales en el problema 3c, lo que también es consistente con una conceptuación SERFUNC.

Sin embargo, sostenemos que, aunque puede haber algunos indicios de conceptuación SERFUNC, Daniel muestra predominantemente una conceptuación de objeto SERLIST, pues su tendencia natural es a pensar en una serie como un proceso interminable de suma al que puede aplicar acciones. Parece ser frecuente que estudiantes como Daniel, a pesar de ser capaces de expresar una serie como un límite de sumas parciales, en el momento de hacer algún trabajo con series, dependen mayormente de su conceptuación SERLIST. Esto lo vemos a continuación:

Entrevistador: Ahora vamos a ver otro ejemplo, vamos a ver el ejemplo 1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 etcétera, continúa de esta manera. ¿Qué puedes decir de esta serie?

Daniel: En esta serie, cuando sumamos los términos, se puede observar que hay un término que se puede cancelar con el próximo, en este caso tenemos -1 que cancela con 1 que es 0 y entonces −1 con 1 y −1 con 1 hasta que sigamos. Pero lo que sucede entonces es que, cuando nos vamos acercando a la infinidad, no se puede saber precisamente el valor que vamos a tener en el último. En este caso, todos los valores entre el primero sin incluirlo y el último en la infinidad cancelarían entre sí, pero no sabemos si el último valor sería −1 o 1. En ese caso si el último valor sería −1 pues entonces la suma sería 0, si no, la suma daría 1. Y no podemos determinar exactamente entre cuál de los dos valores es que podría ser.

Entrevistador: Si la sucesión es infinita, ¿tiene un último valor?

Daniel: Se podría decir que, si tomamos la sucesión con el valor en infinito, pues es posible que encontremos un último valor. Para algunas sucesiones sí ocurre, para otras sucesiones no ocurre. Depende de la sucesión, podemos decir si el, o sea si escribimos la sucesión como un límite cuando *n* tiende a infinito de términos enésimos de la sucesión, pues el término puede ser un número exacto o puede ser que no exista, que sea un número en infinito, que no sea un número. En ese caso, si cuando tomamos ese límite de la sucesión en el término enésimo cuando *n* tiende a infinito nos da un número, pues sabemos que ese vendría siendo, pues, el último término, se podría llamar, de la sucesión.

Observamos que Daniel no interioriza la acción contemplada en la descomposición genética de sumar *consecutivamente* los primeros términos de la serie, sino que los agrupa. Esto no le permite formar la sucesión de sumas parciales. También podemos ver que Daniel parece llamar "último término" de una sucesión, al límite que tenga la sucesión. También podemos ver la debilidad de su esquema de límites. Ésta debilidad puede contribuir a que prefiera no tratar la suma de una serie como el límite de su sucesión de sumas parciales. Más adelante, a instancias del entrevistador, Daniel logra computar correctamente los primeros términos de la sucesión de sumas parciales. Refiriéndose al instrumento escrito, donde aparece $S_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$:

Entrevistador: Vamos a suponer que S_n es como tú tienes escrito ahí... ¿qué será S_1, S_2, S_3, S_4? ¿Qué valores tienen ésos?

Daniel: S_1 sería entonces cuando evaluamos la sumatoria desde el término primero hasta el término primero, o sea, que solamente tomamos en consideración el primer término, sería $(-1)^0$ que es 1. Para S_2 evaluamos la sumatoria desde el primer término hasta el segundo, en ese caso sería $(-1)^0 + (-1)^1$ y aquí tenemos $1 - 1$ que es 0. De la misma manera, proseguimos en S_3, evaluamos y vamos a obtener $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2$ y esto es $1 - 1 + 1$ que es 1, y S_4 es $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3$ y esto es $1 - 1 + 1 - 1$ que es igual a 0.

Entrevistador: Si uno continuara esa sucesión de números S_1, S_2, S_3 y S_4, esa sucesión ¿tendría un límite?

Daniel: ¿A qué se refiere?

Entrevistador: Bueno, hay sucesiones que tienen límite y otras que no tienen límite y la pregunta es si esta sucesión que se forma de este modo tendría un límite.

Daniel: Si llega a un número, o sea, si seguimos tomando cada vez mas términos, pues en ese caso no, porque como se puede observar, con S_1 el valor fue 1 con S_2 fue 0, S_3 otra vez 1 y S_4 otra vez 0, cada vez que se sigue tomando un próximo término pues el valor cambia o 1 o 0 y seguimos añadiendo otro y es 0, otra vez 1 y después 0, después 1 y, cuando seguimos hacia infinidad, no se sabe exactamente si estamos en uno donde la suma nos dé 0 o nos dé 1.

El entrevistador trata nuevamente de ver si Daniel relaciona la suma de la serie con el límite de la sucesión de sumas parciales:

Entrevistador: Ese límite de esa S_n ¿tendrá algo que ver con la serie original $1 - 1 + 1 - 1$?

Daniel: Sí, porque esta serie original es la sumatoria expresada cuando tomamos el límite de n tiende a infinito, pues entonces acabaríamos con la serie original donde tenemos $1 - 1 + 1 - 1$ y así sucesivamente y expandimos la sumatoria hasta infinidad.

Aquí vemos que cuando Daniel dice "y expandimos la sumatoria hasta infinidad", está viendo el límite de la sucesión de sumas parciales como una notación conveniente que, al expandir, le permite recuperar su familiar y preferida suma infinita. Sin embargo, no usa el límite de la sucesión de sumas parciales para argumentar la divergencia de la serie.

En la pregunta 4, Daniel escribe que $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^5$ es una serie-p con $p>1$ y que por eso converge, que $\sum_{i=1}^{\infty} 3/\sqrt{i}$ es una serie-p con $p < 1$ y que, por tanto, diverge y concluye correctamente que la serie original diverge. En la pregunta 5, reconoce $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ como la serie armónica que diverge y, por comparación, concluye correctamente que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\ln(n)$ diverge.

En resumen, Daniel no hace uso explícito y voluntario de la sucesión de sumas parciales (S_n) para analizar la divergencia de una serie. Por consiguiente, no tiene una conceptuación de objeto SERFUNC. La entrevista sugiere que tiene una conceptuación SERLIST. Su habilidad para clasificar series, hallar la suma de algunas series, expresarlas en notación $\sum$ y graficarlas sugieren que su conceptuación es de objeto. Sin embargo, también pudo reconocer la sucesión de sumas parciales, al menos como acción, cuando fue capaz de computar los primeros términos a petición del entrevistador. Además pudo expresar las series $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i$ y $1 - 1 + 1 - 1...$ como el límite de su sucesión de sumas parciales y pudo producir la gráfica de la sucesión de sumas parciales (S_n) de $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i$. Esto nos permite pensar que está al menos en transición a construir un proceso SERFUNC. También podemos explicar nuestras observaciones diciendo que el esquema de serie infinita de Daniel está en el estado *inter* de desarrollo, pues puede establecer algunas conexiones entre diversos conceptos: resultados de convergencia y divergencia de series geométricas y series-*p*, comparaciones de series, y la serie armónica. Sin embargo, su definición formal de serie como sucesión de sumas parciales parece estar desconectada de otros componentes de su esquema. Una de las razones que contribuyen a esta falta de coordinación es la debilidad de su esquema de límites. Puede ser que otra razón por la que tiene una conceptuación SERLIST en vez de SERFUNC sea que en el curso que tomó como estudiante de pregrado se encontró con pocas situaciones donde necesitaba ver una serie como una sucesión de sumas parciales.

Al comienzo del artículo, conjeturamos que la noción de sucesión infinita que tiene un estudiante desempeña un papel en la noción de serie infinita que éste logre construir. Cinco de los 14 estudiantes que participaron en el estudio mostraron haber hecho una construcción de objeto de sucesión infinita SEQFUNC, según lo definido por McDonald, Mathews y Strobel (2000). De esos cinco, dos lograron construir una conceptuación de serie infinita SERFUNC, uno como proceso y el otro como objeto. Ninguno de los estudiantes con noción SEQLIST de sucesión infinita logró una conceptuación SERFUNC más allá de acción. Estos datos sugieren que la noción de sucesión SEQFUNC puede ser necesaria, pero no es suficiente para la conceptuación SERFUNC de serie infinita.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS

Las investigaciones de McDonald, Mathews y Strobel (2000) y Przenioslo (2006) muestran que los estudiantes tienden a construir dos conceptuaciones diferentes de sucesión infinita: una como una lista infinita (SEQLIST), la otra como función (SEQFUNC). En este trabajo, nosotros hemos argumentado que, en el caso de series infinitas, los estudiantes también suelen construir dos objetos cognitivos diferentes: en uno de ellos, una serie infinita se percibe como una suma que no termina (SERLIST) y, en el otro, se construye la sucesión de sumas parciales (SERFUNC). Mostramos ejemplos de estudiantes con cada una de esas diferentes conceptuaciones. Nuestros resultados sugieren que, así como es difícil para los estudiantes construir una noción de sucesión infinita como función (Mamona, 1990; Przenioslo, 2006), también lo es construir una noción de serie infinita como sucesión de sumas parciales. Sólo 1 de 14 estudiantes que habían sido escogidos como "buenos" estudiantes por los investigadores pudo consistentemente tratar serie como sucesión de sumas parciales y usar esto como herramienta en el análisis de convergencia de una serie. O sea, sólo 1 de 14 estudiantes participantes exhibió una conceptuación de objeto SERFUNC. Se pudo considerar que únicamente otro estudiante tenía una conceptuación de proceso SERFUNC.

CONCLUSIONES

Los estudiantes suelen hacer las dos construcciones distintas, SERLIST y SERFUNC, para el concepto de serie infinita que han sido descritas en este artículo. La construcción SERFUNC parece ser particularmente difícil para los estudiantes. Algunas de las razones para esta dificultad pueden tener que ver con la naturaleza y demandas del curso o cursos donde se estudia. Otras dificultades, más al alcance de un curso introductorio de cálculo elemental, tienen que ver con la necesidad de construir una noción de sucesión infinita como objeto SEQFUNQ y la necesidad de desarrollar el esquema de límites, particularmente límites de sucesiones. Nuestro estudio puede sugerir estas últimas dos razones, mientras que las otras las ofrecemos como observaciones que requerirían más investigación para ser substanciadas.

No obstante, es bastante claro que, si los estudiantes rara vez se encuentran con situaciones que requieran el uso de la sucesión de sumas parciales, difícilmente podemos esperar que hagan una construcción de serie infinita basada en esa idea. La sucesión de sumas parciales puede aparecer en situaciones donde se sume una serie, sin incluir, por supuesto, el uso de la fórmula para una serie geométrica. Sin embargo, estas situaciones son poco comunes. Además, la gran mayoría de los resultados de convergencia se pueden expresar usando solamente la sucesión de sumandos (a_n) en vez de la sucesión de sumas parciales. La sucesión de sumas parciales se utiliza en las demostraciones de esos teoremas. En un curso de cálculo elemental, como el tomado por los participantes de este estudio, típicamente no se pide a los estudiantes que analicen o produzcan demostraciones. Esto hubiese requerido más reflexión en cuanto al papel de la sucesión de sumas parciales por parte de los estudiantes y es de esperarse que hubiese contribuido a que una mayor porción de ellos hubiera logrado construir una conceptuación SERFUNC de serie. Al no usarse la noción de serie como sucesión de sumas parciales, no se da la reflexión necesaria para interiorizarla como un proceso SERFUNC o encapsularla como un objeto SERFUNC.

La falta de desarrollo del esquema de límites de sucesiones en muchos estudiantes contribuye a la dificultad de construir una conceptuación de objeto de serie infinita SERFUNC. Esto se puede ver en las respuestas de varios estudiantes de nuestro estudio. Si tienen dificultad entendiendo el significado del límite de una sucesión, es poco probable que valoren o entiendan una noción que se basa en un límite. Estos estudiantes no están en posición de considerar la sucesión de sumas parciales como una herramienta con la cual obtener la suma de una serie o que pueden usar para reflexionar acerca de la veracidad de enunciados relacionados con series infinitas.

Podrían conjeturarse algunas actividades para llevarse a cabo en un curso introductorio de cálculo elemental que contribuyan a que los estudiantes construyan una conceptuación SERFUNC de serie infinita. Por supuesto, faltaría poner a prueba la conjetura en clase y validarla. Para comenzar, actividades con sucesiones infinitas que contribuyan a la construcción de una conceptuación de objeto de sucesión SEQFUNC podrían ser las siguientes: dada una sucesión representada como una fórmula para a_n, como una gráfica o como una lista $a_1, a_2, a_3, \ldots$, cambiarla a cualquiera de las otras formas de representación. Otras actividades incluyen el cómputo o discusión de lo que puede aparentar ser el límite de sucesiones en diferentes formatos. Luego, se pueden realizar actividades similares con series infinitas, o sea, cambiando entre las diferentes representaciones de series en todas las direcciones posibles (la simbólica $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$; la numérica $S_1, S_2, S_3, \ldots$; la también numérica $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$; la gráfica; la simbólica (fórmula para S_n).

Todas estas acciones pueden contribuir a interiorizar una conceptuación de acción en una de proceso y a encapsular una conceptuación de proceso en una de objeto. Estas actividades incluyen, por ejemplo, producir los primeros términos de la sucesión de sumas parciales dada la sucesión de sumandos (a_n) o dada una serie en cualquiera de sus representaciones, producir la sucesión de sumandos (a_n) a partir de la sucesión de sumas parciales y obtener fórmulas para el enésimo término de series geométricas y telescópicas. También, por supuesto, hacen falta actividades como las del problema 2, donde se presenta al estudiante una situación que puede dar origen a conflicto cognitivo, o sea, actividades donde la noción SERLIST del estudiante produzca un resultado que entra en contradicción con lo que sigue de la definición formal de suma de serie como límite de la sucesión de sumas parciales. Se busca que el estudiante reflexione sobre la relación que hay en su esquema de serie entre el objeto SERLIST que posee y el conocimiento que tiene como acción o proceso de la noción de sucesión de sumas parciales. La noción de una sucesión de sumas parciales y muchas de estas actividades pueden ser exploradas antes de siquiera hablar de serie infinita. Dada la dificultad que tienen los estudiantes en construir una construcción de serie infinita como objeto SERFUNC, amerita que se pongan en práctica y se estudie el efecto de actividades como las sugeridas.

RECONOCIMIENTO

Agradecemos las sugerencias del profesor Ed Dubinsky, con quien sostuvimos varias conversaciones en la etapa inicial de este estudio. Su colaboración fue posible gracias a una dádiva de la Fundación Educativa Exxon/Mobil. También agradecemos las sugerencias de los árbitros de este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., A. Brown, D. J. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews y K. Thomas (1996), "A framework for research and development in undergraduate mathematics education", en J. Kaput, E. Dubinsky y A. H. Schoenfeld (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II,* Providence, American Mathematical Society, pp. 1-32.

Bagni, G. T. (2000), "Difficulties with series in history and in the classroom", en

J. Fauvel y J. van Maanen (eds.), *History in mathematics education: the ICMI study*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 82-86.

Bagni, G. T. (2005), "Infinite series from history to mathematics education", *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* [revista en línea], University of Plymouth, Reino Unido, leído el 30 de junio de 2005 en http://cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm.

Baker, B., L. Cooley y M. Trigueros (2000), "The schema triad –a calculus example", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, pp. 557-578.

Brown, A., D. DeVries, E. Dubinsky y K. Thomas (1998), "Learning binary operations, groups, and subgroups", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 16, núm. 3, pp. 187-239.

Cooley, L., M. Trigueros y B. Baker (2007), "Schema thematization: a framework and an example", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 38, pp. 370-392.

Czarnocha, B., E. Dubinsky, V. Prabhu y D. Vidakovic (1999), "One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research", en O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME* , vol. 1, Haifa, PME, pp. 95-110.

Czarnocha, B., E. Dubinsky, S. Loch, V. Prabhu y D. Vidakovic (2001), "Conceptions of area: in students and in history", *The College Mathematics Journal*, vol. 32, núm. 2, pp. 99-109.

Dubinsky, E. (1991), "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Press, pp. 95-123.

——— (1994), "A theory and practice of learning college mathematics", en A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Hillsdale, Erlbaum, pp. 221-243.

——— (1996), "Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria", *Educación Matemática*, vol. 3, núm 8, pp. 24-45.

Dubinsky, E., K. Weller, M. A. McDonald y A. Brown (2005), "Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS analysis, Part 1", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 58, núm. 3, pp. 335-359.

Dubinsky, E. y O. Yiparaki (2000), "On student understanding of AE and EA quantification", en E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput (eds.), *Research in collegiate mathematics education IV*, Providence, American Mathematical Society, pp. 239-289.

Fishbein, E., D. Tirosh y U. Melamed (1981), "Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 491-512.

Gray, E. M. y D. O. Tall (1987), "Duality, flexibility, and ambiguity: a proceptual view of elementary arithmetic", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, núm. 2, pp. 116-140.

Kline, M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, vol. 2, Nueva York, Oxford University Press.

Mamona, J. C. (1990), "Sequences and series-sequences and functions: students' confusions", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 21, pp. 333-337.

Martínez-Planell, R. y M. Trigueros (2009), "Students' ideas on functions of two variables: domain, range, and representations", en S. L. Swars, D. W. Stinson y S. Lemons-Smith (eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 5, Atlanta, Georgia State University, pp. 73-80.

McDonald, M. A., D. Mathews y K. Strobel (2000), "Understanding sequences: a tale of two objects", en E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, Providence, American Mathematical Society, pp. 77-102.

Piaget, J. y R. García (1983), *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México, Siglo XXI Editores.

Przenioslo, M. (2006), "Conceptions of a sequence formed in secondary school", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 37, núm. 7, pp. 805-823.

Sierpińska, A. (1987), "Humanities students and epistemological obstacles related to limits", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18, núm. 4, pp. 371-397.

Smith, D. E. (1958), *History of Mathematics*, vol. 2, Nueva York, Dover Publications.

Stewart, J. (2001), *Calculus: Concepts and Contexts*, 2a. ed., Pacific Grove, Brooks/Cole.

Tall, D. O. (1992), "The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, McMillan, pp. 495-511.

Trigueros, M. (2000), "Students' conception of solution curves and equilibrium in systems of differential equations", en M. L. Fernandez (ed.), *Proceedings of* *the XXII Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Columbus, ERIC, pp. 93-97.

——— (2005), "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior", *Educación Matemática*, vol. 17, núm. 1, pp. 5-31.

Trigueros, M. y R. Martínez-Planell (2010), "Geometrical representations in the learning of two variable functions", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 73, núm. 1, pp. 3-19.

DATOS DE LOS AUTORES

Rafael Martínez-Planell
Universidad de Puerto Rico en Mayagüez
rafael.martinez13@upr.edu
Ana Carmen González
Universidad de Puerto Rico en Mayagüez
anacarmen.gonzalez@upr.edu
Gladys Di Cristina Yumet
Universidad de Puerto Rico en Mayagüez
gladys.dicristina@upr.edu
Vanessa Acevedo
Universidad de Puerto Rico en Mayagüez
tatacevedo@yahoo.com