Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Saiz, Irma Elena; Gorostegui, Edith; Vilotta, Diego
Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales
Educación Matemática, vol. 23, núm. 1, agosto-abril, 2011, pp. 123-151
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

ENSAYO

Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales[1]

Irma Elena Saiz, Edith Gorostegui y Diego Vilotta

Resumen: La Didáctica de la Matemática inaugura una nueva vía de acceso al análisis de los fenómenos didácticos: el estudio del contenido. Repensar la enseñanza de un contenido exige problematizarlo, cuestionarlo, en suma, plantearse preguntas intentando desnaturalizar los conocimientos involucrados.

En este artículo, presentamos el estudio didáctico del contenido Conjuntos numéricos, en particular, la tarea de determinar la naturaleza de un número, estudio que pone en evidencia la complejidad de los conceptos involucrados, las múltiples relaciones que se establecen con otros conocimientos y que provee, a la vez, categorías de análisis de propuestas didácticas.

Para repensar la enseñanza de los conjuntos numéricos, partimos de problematizar la relación entre las expresiones decimales de los elementos de dichos conjuntos y el conjunto de los números decimales.

Palabras clave: números decimales, expresiones decimales, conjuntos numéricos, naturaleza y representación de un número.

Problematize numerical sets to rethink their teaching: among decimal expressions and decimal numbers.

Abstract: Mathematics Didactics inaugurates a new way of access to the analysis of didactic phenomena: the study of content. Rethinking the teaching of certain content requires problematize it, to question it, that is, to ask questions intended to denaturalize the knowledge involved.

In this article we present the didactic study of the content *numerical sets* and, particularly, the task of determining the nature of a given number. The study makes evident the complexity of the concepts involved, the multiple relations that are established with other knowledge and, at the same time, it sets categories for the analysis of didactic proposals.

Fecha de recepción: 11 de enero de 2011.

[1] Agradecemos especialmente a la profesora Silvia Etchegaray los comentarios y sugerencias aportadas durante la elaboración de este trabajo.

In order to give a new thought to the teaching of numerical sets, we began by problematizing the relationship between the decimal expressions of the elements belonging to such sets and the set of decimal numbers.

Keywords: decimal numbers, decimal expressions, numerical sets, nature and representation of a number.

INTRODUCCIÓN

El trabajo que presentamos en este artículo forma parte del proyecto: "¿Qué matemática vive hoy en las aulas de EGB3? Una aproximación a la complejidad del aula".

El tema conjuntos numéricos constituye una parte importante de los contenidos por aprender en los primeros años de la escuela media[2] y con frecuencia se asume que su aprendizaje puede considerarse como concluido después de los dos o tres primeros años de este nivel.

Sin embargo, en los alumnos puede detectarse –incluso varios años después– que muchas de las dificultades a las que se enfrentaron durante su estudio, debido en particular a la complejidad del propio conocimiento, no siempre han podido ser superadas.

Los conocimientos iniciales son necesariamente provisorios, incompletos e incluso erróneos, por tanto, su tratamiento posterior es ineludible.

Nos referimos, por ejemplo, a la confusión entre número y representación –en particular entre número decimal y representación decimal de un número–, a la falta de discusión sobre la naturaleza de los números, a la falta de relación entre los conjuntos numéricos y a la ausencia de identificación del conjunto de referencia en el cual se desarrolla la actividad matemática, etcétera.

El artículo está organizado en tres apartados: "Acerca de la construcción de los conjuntos numéricos"; "Análisis de la tarea de pertenencia de un número a un conjunto" y "Problematización del contenido Conjuntos numéricos".

Acerca de la construcción de los conjuntos numéricos

Los conocimientos que se poseen hoy sobre los números reales y sobre los conjuntos numéricos incluidos en este último son la consecuencia de un largo,

[2] La escuela media comprende a los alumnos de 12 a 17 años.

paciente y laborioso trabajo de matemáticos de muy distintas civilizaciones. A lo largo de más de 20 siglos se fueron construyendo muy lentamente conceptos que hoy día pretendemos con frecuencia que los jóvenes alumnos aprendan en un poco más de un cuatrimestre escolar. Basta citar los números naturales, que tan "naturalmente" aparecen desde el principio de la escolaridad y cuya formalización como conjunto numérico, sin embargo, fue la última en lograrse con la axiomatización realizada por Peano a fines del siglo XIX, incluso después de la de los números complejos y negativos.

A partir de su invención para resolver problemas prácticos, los matemáticos lograron, apenas 2 500 años después de su aparición, una definición de número y de conjunto numérico, basada totalmente en fundamentos lógicos, evitando la intuición y rechazando los recursos a la percepción.

Siguiendo la exposición de González, Iriarte y otros (1990)[3] en el siglo XIX es cuando la matemática dio un formidable salto hacia su liberación de lo concreto. Tal como lo señalaba Hermann Hankel (1987)[4] en su libro *Teoría del sistema de los números complejos,* publicado en 1867: "La condición para construir una aritmética universal es, por tanto, la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles".

"Al igual que otros matemáticos de su época estaba convencido de que las matemáticas son una *creación humana* y, en consecuencia, sus conceptos no se deducen de hechos empíricos ni vienen impuestos desde afuera, sino que son *construcciones intelectuales* y, como tales, no han sido *descubiertas* sino *inventadas*".[5]

Hankel no buscó la justificación de la existencia de los números en situaciones reales que "expliquen" su comportamiento, sino en las leyes formales, concretamente, en el "principio de permanencia" que había sido introducido por George Peacock algunos años antes, a fin de fundamentar el álgebra y justificar las operaciones con expresiones literales.

El principio de permanencia afirma que todas las reglas que se verifican al operar con los números naturales –conmutativa y asociativa de la multiplicación y de la suma y distributiva de la multiplicación respecto de la suma– siguen verificándose para todos los demás números u objetos representados por las letras. Así, la importancia del significado de los símbolos quedó relegada a un segundo

[3] González, Iriarte y otros (1990), *Números enteros*, Editorial Síntesis, p. 48
[4] H. Hankel (1967), citado en *op. cit.*
[5] *Op. cit.*

plano ante la primacía de los símbolos por sí mismos y sus leyes de combinación; la adición significará cualquier proceso que se ajuste a determinadas leyes.

Retomando la iniciativa de Peacock, Hankel formuló el principio de permanencia de las leyes formales que establece el criterio general de algunas ampliaciones del concepto de número:

1. La palabra *número* responderá a símbolos o agregados de símbolos que no necesariamente representan números del campo numérico previamente dado o conocido, sino que su significado puede ser cualquiera.
2. Se definirán, para el nuevo campo numérico, las operaciones fundamentales de la aritmética (adición y multiplicación) y el concepto de igualdad, de manera que las definiciones en el campo menos amplio se conserven como caso particular de las nuevas definiciones y subsistan las leyes formales de uniformidad, asociativa, conmutativa, distributiva y conservación del elemento neutro.[6]

Tal como afirman Courant y Robbins (1962): "La ampliación del dominio natural introduciendo nuevos números, de forma tal que las propiedades o leyes válidas en aquel dominio se cumplan también en la extensión del conjunto natural, es un aspecto característico en el proceso matemático de generalización".

Y en particular, cuando describen el proceso de construcción de los números racionales, señalan:

> En matemática, una subunidad obtenida dividiendo la unidad inicial en n partes iguales se designa con el símbolo $\frac{1}{n}$ y, si una cantidad contiene exactamente m de estas subunidades, su medida se denota con el símbolo $\frac{m}{n}$. Este símbolo se llama fracción o razón. El paso siguiente, verdaderamente decisivo, sólo se dio de modo consciente después de varios siglos de tentativas. El resultado fue que el símbolo m/n quedó desposeído de referencias concretas a procesos de medidas y a las cantidades medidas y fue considerado simplemente como un número, un ente en sí mismo, en el mismo plano que los números naturales (p. 61).
>
> ...La generalización del concepto de número natural al de número racio-

[6] *Op. cit.* p. 49.

> nal satisface, por una parte, la necesidad teórica de suprimir las restricciones a la sustracción y a la división y cumple, por otra, la necesidad práctica de tener números para representar los resultados de mediciones. Del hecho de que los números racionales satisfagan esa doble necesidad resulta verdaderamente su gran importancia. Como hemos visto, esta extensión del concepto de número ha sido posible por la creación de nuevos números en forma de símbolos abstractos, tales como 0, -2, y $\frac{3}{4}$. Hoy, acostumbrados como estamos a tratarlos como cosa corriente, resulta difícil creer que hasta el siglo XVII no fueron admitidos con los mismos derechos que los enteros positivos y que, aunque usados cuando se hacían necesarios, no era sin ciertas dudas y prevenciones. A la natural tendencia humana se debe la lentitud con que se dio este paso inevitable. Únicamente en el dominio de lo abstracto puede ser creado un sistema satisfactorio de aritmética (pp. 64 y 65).

Esta breve revisión de la construcción de los conjuntos numéricos siguiendo a Courant y Robbins (1962) nos permite, además, poner en evidencia aspectos fundamentales de la actividad matemática, a menudo ausente en la enseñanza, relacionados con la necesidad de tomar decisiones para garantizar algunas propiedades como la coherencia de escrituras o la unicidad de los objetos y la relación entre ambas problemáticas.

Tomemos el caso en el que se pretende definir en Q el opuesto de una fracción, por ejemplo el opuesto de $\frac{2}{3}$, la notación de su opuesto sería $-\frac{2}{3}$; sin embargo, esta escritura no corresponde a la de un elemento de Q. Entonces, ¿cuál fracción podría ser el opuesto de $\frac{2}{3}$? $\frac{-2}{3}$ cumple con la condición $\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = 0$, así como cualquier otra fracción equivalente a $\frac{-2}{3}$. Se puede, por tanto, elegir la fracción irreducible –representante de esa clase– como opuesto de $\frac{2}{3}$. Y es aquí donde aparece el interés de preservar la unicidad, puesto que tanto $\frac{-2}{3}$ como $\frac{2}{-3}$ son equivalentes, verifican la propiedad del opuesto y son irreducibles. Por tanto, ¿cuál de las dos fracciones $\frac{-2}{3}$ o $\frac{2}{-3}$ sería el opuesto de $\frac{2}{3}$? Es necesario elegir una de ellas, por ejemplo la del denominador positivo. Esto llevaría a incluir la condición de denominador positivo en la definición de fracción irreducible o en la del opuesto de una fracción.

Resulta entonces que el opuesto de $\left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$.

Podemos señalar que el signo igual asume en la afirmación anterior significados muy diferentes: la primera igualdad proviene de la coherencia con escrituras anteriores (los opuestos de... se indican con un signo menos delante del número) en el contexto de una estructura; la segunda se valida poniendo a funcionar la propiedad necesaria y suficiente –es decir la definición– que caracteriza al elemento opuesto de otro, en este caso de una fracción, y la tercera expresa la independencia del representante de una misma clase de equivalencia.

En las tres instancias, el signo igual atrapa relaciones algebraicas, pero éstas corresponden a distintos niveles del proceso de algebrización que transforman los significados de un mismo conjunto numérico.

Develar las diferentes relaciones que atrapa cada uno de los iguales anteriores no forma parte, en general, de las discusiones presentes en la formación docente en el tratamiento de la construcción de los conjuntos numéricos.

De los naturales a los enteros

Siguiendo las ideas anteriores, podemos revisar brevemente la construcción del conjunto de números enteros a partir de los naturales para empezar a identificar, precisar y profundizar algunas cuestiones constitutivas puestas en juego en estos conceptos y aproximarnos, a la vez, a una tarea específica de nuestra investigación relacionada con el problema de la pertenencia de un número a un conjunto.

¿Cuál es la razón de ser de la introducción de esos nuevos números que se llamarán posteriormente enteros negativos?

> En la aritmética ordinaria de los números naturales se pueden efectuar siempre las dos operaciones fundamentales: adición y multiplicación. En cambio, las operaciones inversas no son siempre posibles. La diferencia $b - a$ de dos enteros a y b, es el entero c tal que $a + c = b$, es decir, es la solución de la ecuación $a + x = b$. Pero en el dominio de los números naturales, el símbolo $b - a$ posee significación únicamente cuando es $b > a$, ya que únicamente

> entonces la ecuación $a + x = b$ tiene una solución que sea un número natural. Un gran paso para suprimir esta restricción se dio cuando se introdujo el símbolo 0 mediante la relación $a - a = 0$. De mayor importancia aún fue la introducción de los símbolos $-1, -2, -3$,... junto con la definición $b - a = -(a - b)$ para el caso $b < a$, lo que permitió la sustracción, sin restricciones, en el dominio de los enteros positivos y negativos (Courant y Robbins, 1962, p. 62).

Se constituye así un conjunto diferente, formado por los números naturales, el cero y unos nuevos números que, aunque hoy pueden ser representados por un número precedido por un signo menos, tal como lo señalamos antes, podrían ser imaginados, por el momento, como un conjunto de elementos cuya única característica conocida es la de ser el resultado de la diferencia de algún par de números naturales y los cuales podrían representarse sin relación con ellos, por ejemplo, con letras del alfabeto griego.

Ahora bien, ¿qué tipo de estructura se puede imaginar para este nuevo conjunto? ¿Es posible operar con sus elementos? Es posible, si se trata de operar con los números naturales entre sí, restar incluso dos números naturales, ya que en este nuevo conjunto la diferencia entre naturales es una operación cerrada, pero no entre los "nuevos", es decir entre dos "resultados de diferencia de naturales", o incluso entre uno "nuevo" y uno natural, o entre cualquiera de ellos y el cero.

Por otro lado, para que sean considerados números de pleno derecho, es necesario definir las operaciones con ellos, es decir una nueva suma y una nueva multiplicación y estas definiciones se realizan de manera tal que

> ...las reglas de las operaciones aritméticas con los números naturales se conserven para el nuevo dominio; por ejemplo, la regla $(-1)(-1) = 1$, que servirá para regir la multiplicación de los enteros negativos, es una consecuencia del deseo de conservar la ley distributiva $a(b + c) = ab + ac$. Fue necesario mucho tiempo para que los matemáticos comprendieran que la "regla de los signos" junto con todas las demás definiciones que se refieren a los enteros negativos y a las fracciones no podían ser "demostradas" (p. 63).

Tal como afirma Hankel (1967): "Todas son creaciones hechas con objeto de alcanzar libertad en las operaciones, conservando siempre las leyes fundamentales de la aritmética. Lo que puede y debe probarse es únicamente el hecho de que, con tales definiciones, las leyes conmutativa, asociativa y distributiva de la aritmética se conservan".

Puede hablarse, entonces, de un nuevo conjunto al que se denomina habitualmente *Z*, en el cual algunos elementos son los "viejos" números naturales. Sin embargo, estos números han adquirido ciertas propiedades que no poseían en cuanto números naturales, como la de tener elemento opuesto y nuevas formas de representación**,** exigidas por el proceso de construcción de un nuevo conjunto numérico. Considerar las propiedades y las formas de representación que adquiere un número según el conjunto en el cual se inserta constituye un aspecto fundamental en la temática desarrollada en este artículo.

En su calidad de naturales, cada uno de ellos podía ser representado de distintas maneras, por ejemplo el número 9 como $10 - 1$; $4 + 5$; $18 \div 2$; $\sqrt{81}$; 3^2, etc. , es decir, poseían en *N* distintas escrituras equivalentes. Al insertarse en el nuevo conjunto *Z*, el mismo número puede ahora escribirse también como $-(-8 - 1)$ o como $(-3)^2$; $8 - (-1)$; $-(-9)$; etcétera.

ANÁLISIS DE LA TAREA DE PERTENENCIA DE UN NÚMERO A UN CONJUNTO

Tal como lo señalan los diseños curriculares en vigencia, el estudio de los conjuntos numéricos en el nivel medio se realiza a partir de distintas tareas. Para cada uno de los conjuntos: enteros, decimales, racionales y reales, se plantean actividades que permiten identificar sus elementos, representarlos de distintas maneras (expresión fraccionaria y decimal de los números racionales, en la recta numérica, etc.), operar con ellos, ordenarlos, conocer las propiedades de las operaciones, etcétera.

En nuestro trabajo, decidimos estudiar la tarea de determinar la naturaleza de un número, es decir, la pertenencia a un conjunto y, en particular, estudiar la influencia de sus distintas representaciones en esa tarea.

En principio la pregunta sobre si un número pertenece o no a un conjunto puede responderse en términos sintácticos, es decir, en relación con la definición o caracterización de cada conjunto: un número racional es un cociente de enteros; los enteros son los naturales, los negativos y el cero, etcétera.

De esa manera, puede afirmarse que 2 es un número entero, tal como $\frac{72}{18}$ es un número racional. Sin embargo, la pregunta de si $\frac{72}{18}$ es o no una fracción decimal, no puede responderse tan sólo "mirando".

Más aún, para responder la pregunta de si $\frac{2.5}{4.5}$ pertenece a *D* (conjunto de números decimales), recurrir a la definición de número decimal no aparece como una solución simple, ya que no es evidente que ese número posea una escritura decimal finita o que pueda escribirse como una fracción decimal. Entonces, ¿a qué se puede recurrir para responder? Una posibilidad es analizar si se puede usar el hecho de que todo cociente de números decimales es decimal, otra manera sería realizar el cociente y analizar el resultado.

El conjunto de referencia

En párrafos anteriores, al analizar las distintas representaciones del mismo número que aparecen al extender los conjuntos numéricos, surge la necesidad de identificar cuál es el conjunto de referencia en el cual se plantea la pregunta sobre la pertenencia de un número a un cierto conjunto, ya que la representación que se utilice para presentar el número puede no tener sentido en el conjunto indicado en la pregunta. Por ejemplo en: *¿El número* $(-3)^2$ *pertenece a* N?, la pregunta remite al conjunto *N*, pero si el contexto en el que está planteada la pregunta es ese mismo conjunto, no es posible responderla, puesto que en *N*, el cuadrado de un número sólo está definido para los elementos de *N*.

Si el conjunto de referencia es *Z* (o los conjuntos que lo contienen como *D*, *Q* y *R*), las operaciones definidas en ese conjunto poseen ciertas propiedades que permiten plantear esa pregunta y responder que se trata de un número entero que es a la vez natural. En el caso de preguntarse si *el número* $(-2)^3$ *pertenece a* N, si el conjunto de referencia es *N*, la pregunta no tiene sentido, ya que el cubo de un número no está definido para un número que no pertenece a *N*; sin embargo, si nos ubicamos en el conjunto *Z*, la pregunta puede ser planteada, aunque la respuesta es "No" en este caso. Es decir, se trata de analizar, en primer lugar, si tiene sentido plantear la pregunta en el conjunto de referencia y, posteriormente, si la respuesta es Sí o No en dicho conjunto. Por ejemplo, si el conjunto de referencia es *N*, no tiene sentido plantear ninguna de las dos preguntas siguientes: ¿$(-3)^2$ *pertenece a* N? y ¿$(-3)^3$ *pertenece a* N? En cambio, si se trata de *Z* –o de cualquier otro conjunto numérico que lo contenga–, la respuesta a la primera pregunta es sí y a la segunda es no.

Se muestra, de esta manera, que pensar en los naturales en relación con nuevos conjuntos numéricos "exige" nuevas representaciones, ya que su significado cambia y además "habilita" –para tales números– el uso de propiedades específicas del nuevo conjunto.

Algo similar ocurrirá cuando se considere Q construido a partir de los resultados de las divisiones de números enteros cuyo cociente no sea entero, es decir, eliminando las restricciones de la división de enteros. También en este caso, al considerar los números enteros como racionales, aparecen nuevas representaciones de tales números como $\frac{9}{3}$; $\frac{25}{-5}$ ...

Y, a su vez, en relación con los reales, la ampliación de Q por medio de los irracionales hace aparecer nuevas representaciones de los racionales, incluso de los naturales, por ejemplo, $\left(\sqrt{2}\right)^2$ como una nueva representación del número 2. Entonces, si el contexto de trabajo es R, $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ y, por tanto, puede afirmarse que se trata de la expresión de un número natural.

En conclusión, hemos puesto en evidencia la importancia de identificar –al trabajar con estas cuestiones en cualquier nivel educativo– el conjunto en el cual se pretende desarrollar la actividad matemática, sin que esto signifique ubicarse por defecto en R, como sucede habitualmente en la formación de grado de los futuros profesores de matemática. Si no se discute el conjunto en el que se está trabajando, resultará difícil entender por qué, por ejemplo, al estudiar las operaciones y las propiedades de los números racionales en el nivel medio se presenta la igualdad $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ y no se puede a la vez tratar la equivalencia con el número $\left(\sqrt{2}\right)^2$.

Algo similar sucede con la falta de identificación del dominio de definición de una ecuación. En relación con el número de soluciones, se habla de una, ninguna o infinitas, pero difícilmente se trabaja con situaciones en las que el número de soluciones puede ser una cantidad finita, dependiendo del conjunto de referencia. Carmen Sessa alude a esta situación:

> ...La ecuación, en definitiva, define un conjunto: el conjunto de valores de x para los cuales es verdadera. Ahora bien, para que ese conjunto esté bien definido, hay que explicitar sobre qué dominio numérico se está considerando la ecuación: por ejemplo, si nos restringimos a los números naturales, el conjunto solución de la ecuación $2x + 4 = 7$ no tiene ningún elemento. Mientras que, si consideramos la misma ecuación definida en el conjunto de

números racionales, el conjunto solución está conformado por el número $\frac{3}{2}$. En la escuela, el dominio de definición de la ecuación suele ser implícito y, en general, no se presenta la ocasión de resolver una misma ecuación en dos conjuntos numéricos diferentes (Sessa, p. 67).

PROBLEMATIZACIÓN DEL CONTENIDO CONJUNTOS NUMÉRICOS

El marco teórico de la investigación es la didáctica fundamental, que surge alrededor de fines de los años 1960, a partir de vislumbrar la necesidad de elaborar un modelo propio de la actividad matemática. Guy Brousseau (1986), como fundador de dicha teoría, fue el primero en plantear la importancia de la problematización y cuestionamiento del conocimiento matemático involucrado en los fenómenos de enseñanza y aprendizaje estudiados. Tal como afirman Chevallard, Bosch y Gascón (1997): "Todo fenómeno didáctico (...) tiene un componente matemático esencial, inaugurándose una nueva vía de acceso al análisis de los fenómenos didácticos: el propio conocimiento matemático."[7] La perspectiva epistemológica que plantea esta teoría involucra volver la mirada sobre el conocimiento en juego –en nuestro caso, los conjuntos numéricos– para cuestionarlo, interrogarlo y problematizarlo; básicamente para plantearse preguntas.

Nuestra investigación también incluye el análisis de las prácticas escolares habituales: tipo de actividades, temarios de evaluaciones y formas de validación, análisis de libros del nivel medio y una indagación sobre los conocimientos que los alumnos de profesorados de matemática –poco tiempo antes de recibirse– poseen acerca de los conjuntos numéricos. No obstante, en este artículo presentaremos únicamente el estudio didáctico del contenido matemático en juego en relación con la tarea citada, ya que será este marco el que sirva de referencia para los análisis mencionados antes.

Metodológicamente, abordamos el estudio formulando preguntas que problematizan la tarea de identificar la naturaleza de un número, seleccionando "ciertos" números, representados de "ciertas" maneras y "ciertos" conjuntos. Esta selección estuvo comandada por la posibilidad de poner en evidencia las cuestiones que nos planteábamos. A la vez, la puesta en juego de la tarea en los números,

[7] *Op. cit.*, Anexo A, p. 71.

representaciones y conjuntos elegidos abrió nuevos cuestionamientos que enriquecieron el estudio.

Las preguntas que planteamos –si bien en ocasiones hacen referencia a los mismos conceptos–, al ser formuladas de manera diferente, ponen en evidencia distintas propiedades, desnaturalizando de ese modo los conceptos involucrados más allá de las respuestas que puedan darse, las cuales estarán necesariamente ligadas a los conocimientos y significados que les atribuyan los que las respondan.

En el artículo nos centraremos en el conjunto D de números decimales, ya que no sólo nos permite profundizar el conocimiento sobre estos números, sus propiedades y estructura, sino también cuestionar las definiciones de otros conjuntos numéricos, discutir la diferencia entre número y su representación, propiedades de las operaciones, etc. Consideraremos, así, cuestiones del orden de lo ontológico, lo semiótico y lo didáctico en relación con el contenido Conjuntos numéricos, a fin de identificar cuestiones que permitan definir categorías de análisis de las prácticas escolares.

Números decimales y representación decimal de los números

Números con punto

Un primer significado que se le atribuye a los números decimales es, sin duda, el de números con punto. Cabe entonces preguntarse:

- ¿Todo número que tiene punto es un número decimal?
- ¿Un número que se escribe sin punto puede ser un número decimal?
- Para que un número sea decimal, ¿tiene necesariamente que escribirse con un punto?

El conjunto de los números decimales tiene una existencia ambigua en la escolaridad obligatoria. Son los números que, junto con las fracciones, aparecen tempranamente en la escuela primaria en oposición al conjunto de los números naturales y ligados al tratamiento de problemas de medición de longitudes, dinero, etcétera.

Se aprende a compararlos, operarlos, representarlos en la recta numérica, etc., lo que permite, en principio, aceptarlos como números de pleno derecho. En general, su uso en la resolución de situaciones en contextos extramatemáticos y lo que puede hacerse con ellos es lo que define su naturaleza en este nivel. Aparecen, en cierto modo, en paralelo con el tratamiento de las fracciones y no necesariamente a partir de ellas, si bien en el nivel de 6° grado se inicia la puesta en relación con las fracciones decimales.

Por el contrario, en la escuela media, el tratamiento de los números decimales está incluido habitualmente en el capítulo destinado a los racionales y, en este caso, se introducen como una escritura diferente de la fraccionaria –la llamada expresión decimal– de tales números. A veces, esa expresión decimal se identifica con el nombre de número decimal y, por tanto, se verán aparecer tipos de números como: números decimales periódicos o incluso números decimales irracionales, el objeto matemático *número decimal* está ausente. Los números decimales, considerados como conjunto numérico, se identifican con expresiones del tipo: números con expresión decimal finita, exacta o que termina.

No queda claro cómo se transforman en números las escrituras decimales, a pesar de que las tareas planteadas son específicas del tratamiento de número, como comparar expresiones decimales, operar con ellas, etcétera.

Coherentemente con la presentación como escritura diferente, las tareas que aparecen remiten a obtener la escritura fraccionaria a partir de la decimal, o bien, lo contrario.

Sin embargo, se trata de una versión "restringida" de expresiones equivalentes de un número, pues se establece una relación uno a uno entre una expresión fraccionaria y su correspondiente decimal sin ampliar esta presentación a otras escrituras también equivalentes como las aditivas, cocientes, etc. Por ejemplo, expresiones equivalentes como $\frac{3}{4} = 0.75 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 3 \cdot 0.25 = 1 - 0.25$ resultan de gran utilidad incluso para obtener expresiones decimales de otros números. Por otro lado, no es frecuente encontrar en las prácticas en aula actividades que permitan aprender a seleccionar la escritura más conveniente para la tarea que se va a realizar.

Puesto que, en la primaria, la primera aproximación a los números decimales aparece ligada fuertemente a su representación "con punto", en oposición a los números naturales "sin punto", la caracterización de tales números como "números con punto" es inevitable, sin que esto sea cuestionado en los estudios posteriores de los alumnos. En este sentido, es importante señalar que el tratamiento posterior –en la escuela media– debería problematizar las relaciones entre los conjuntos y, en particular, se debería aprender que, si bien una de las formas de representación de los números decimales incluye el punto, ni todos los números con punto son decimales ni todos los que no lo tienen no son decimales.

Por ejemplo, el número 2.345555555... tiene punto en su representación, pero se trata de un número racional no decimal;[8] por su parte, el número 7 es un número decimal, aunque no tenga punto en su representación, ya que posee una expresión decimal finita, en este caso, formada por ceros. Así como un número entero p puede ser considerado racional a partir de la escritura $\frac{p}{1}$, también puede ser identificado como decimal mediante la escritura p.0000. Por otra parte, algunos números racionales que son periódicos, como 4.59999... poseen una expresión decimal finita, en este caso 4.6 y, por consiguiente, se identifican como números decimales.

En el apartado anterior se empezaron a poner en evidencia ciertas diferencias entre número y representación de un número, en particular, con la representación decimal ligada a una expresión con punto. Y, por otra parte, se establecen algunas relaciones entre conjuntos: los números naturales son también decimales y no todos los racionales son números decimales.

Sistema de numeración decimal

Ya mencionamos en el apartado anterior que, en libros de texto y prácticas escolares, a menudo número decimal y expresión decimal se utilizan indistintamente para referirse a un mismo concepto.

La palabra decimal procede de la palabra diez y hace referencia a la base de numeración decimal. Distinguir el objeto matemático "número decimal" de una de las formas de representación de los números, precisamente la representación decimal, aparece como una discusión importante.

En este sentido nos preguntamos:

- ¿Qué significa que un número –no necesariamente natural– esté escrito en sistema de numeración decimal? ¿Se puede afirmar que el número $\sqrt{2}$ está escrito con base 10? Y ¿el número $\frac{12}{34}$? ¿Cuáles son los números que se pueden escribir con base 10?

[8] Asumimos en esta escritura que los puntos sucesivos señalan que continúa repitiéndose indefinidamente la cifra 5.

En principio, podemos afirmar que un número está escrito en el sistema de numeración decimal cuando su escritura es una yuxtaposición de cifras –que incluye o no un punto– y cuyo valor es el resultado de la suma de cada dígito multiplicado por la potencia de la base –10 en este caso– correspondiente a la posición que ocupa en el número.

Simbólicamente, un número N escrito con base 10 corresponde a la siguiente expresión:

$N = d_{-k} \ldots d_1 d_0, d_1 d_2 \ldots d_n$; donde d_i son dígitos

y su valor corresponde a:

$$N = d_{-k} \ldots d_1 d_0, d_1 d_2 \ldots d_n = \sum_{i=-k}^{n} \frac{d_i}{10^i}$$

Está claro que esta escritura permite escribir los números naturales y decimales positivos con base 10, pero ¿también permitirá escribir los enteros negativos, racionales e irracionales?

Podemos preguntarnos si el número –4.582 está escrito con base 10 o no. ¿Cuál sería la sumatoria que le corresponde?

–(4 · + 5 · 100 + 8 · 10 + 2) o tal vez (–4)1 000 + (–5)100 + (–8)10 + (–2) o (–5)1 000 + 4 · 100 + 1 · 10 + 2

Si las cifras pudieran ser negativas, se modificaría totalmente el sistema habitual de escritura y se perdería la unicidad. Por ejemplo, ¿tendría sentido hablar del número formado por –7 centenas, 2 decenas y –4 unidades? ¿Se escribiría así: (–7)2(–4)? y ¿cuál sería su descomposición polinómica: (–7) × 100 + 2 × 10 + (–4)?, pero entonces su valor sería –684.

Vemos que tiene sentido convenir que todas las cifras de la escritura de un número de base 10 sean dígitos y que un número, tanto entero como decimal negativo, se escriba como los positivos con un signo menos delante.

Para escribir un número fraccionario no decimal o, en general, números reales no necesariamente naturales o decimales en el sistema de numeración decimal, es necesario ampliar el concepto de sumatoria finita de potencias de 10 a infinitos términos a partir de la definición de serie.

Así:

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i}$$

y en general cualquier número real x se escribe como:

$$x = \sum_{i=-k}^{\infty} \frac{d_i}{10^i}$$

El anterior es un resultado matemático general válido para todos los números reales, si bien, para algunos números, no es posible escribir la totalidad de sus cifras ni conocer todas y cada una de ellas.

Entonces, podemos afirmar que si bien tanto $\sqrt{2}$ como $\frac{12}{34}$ son números reales y, por tanto, poseen una escritura de base 10, las dos escrituras anteriores (que utilizan un signo radical y una fracción) no corresponden a una escritura de base 10, ya que no se trata de una yuxtaposición de cifras cuyo valor se obtiene a partir de la suma de productos de sus cifras por potencias de 10, a pesar de que tanto el radicando del primer número como el numerador y denominador del segundo están escritos con base 10.

En algunos casos, la escritura de base 10 no es única, ya que, por ejemplo, 2.34 y 2.33999... (ambas de base 10) son dos escrituras diferentes que corresponden al mismo número. Por otra parte 2.34 = 2.34000...

Pero cabe señalar que esta situación sólo puede aparecer en el caso de los números decimales, que son los que poseen una expresión periódica de periodo 9 o 0 y, a la vez, una cantidad infinita de expresiones decimales finitas: 2.34 = 2.340 = 2.3400 = ... Para los naturales ocurre, por supuesto, algo similar, ya que 4 = 4.000... = 3.999... e incluso poseen infinitas escrituras finitas 4 = 4.0 = 4.00 = 4.000 = ...

En definitiva, el que todos los números reales se puedan escribir con base 10 nos permite afirmar que todos poseen una expresión decimal, es decir una escritura con punto,[9] si bien, en los casos de reales no decimales, puede suceder que no sea posible escribir todas sus cifras o incluso no conocerlas y, en el caso de los enteros, existe una expresión sin punto.

Las expresiones decimales pueden ser:

- finitas, que corresponden a los números decimales (incluidos los enteros) o
- infinitas (números no decimales), las cuales pueden ser periódicas (racionales no decimales) o no (números irracionales).

Estas expresiones decimales –que existen para todo número real– son las que no deberían ser confundidas con los números decimales.

Lo analizado previamente muestra que, aun cuando “sistema de numeración decimal”, “representación con punto” y “expresiones decimales de los números”

[9] El punto es reemplazada por una coma en algunos países y la denominación “números con punto” corresponde a “números con coma”.

pueden responder a cuestiones diferentes, las relaciones que pueden establecerse entre ellas deberían ocupar, sin duda, un lugar importante tanto en la enseñanza obligatoria como en la formación de futuros docentes.

Como ejemplo de lo que sucede a menudo en la escolaridad podemos mencionar el tratamiento de los sistemas de numeración, cuyo estudio se organiza, en general, sólo en los capítulos dedicados a trabajar con los números naturales y no se retoma para los demás conjuntos numéricos ni se relaciona con expresiones decimales de los números. Cuando años más adelante se trabaja con la existencia de la expresión decimal de un número real, se plantea la escritura decimal genérica para un número real genérico, sin discutir qué sucede con números "concretos" como: $\frac{1}{3}$, $-2.3666...$, etc., objeto central de la futura tarea de un profesor de matemática.

Definición, estructura y representación de los números decimales

En los párrafos anteriores ha ido quedando en evidencia que, en el lenguaje matemático habitual, existe una serie de palabras que incluyen el término "decimal". Nos referimos, por ejemplo, a: "sistema de numeración decimal", "expresión decimal", "notación decimal", "desarrollo decimal", "cifras decimales", "números decimales", "número racional decimal", etc. Cada uno de estos términos o expresiones tiene su propio significado que es necesario distinguir, aunque en ocasiones se puede permitir cierta ambigüedad en el discurso. Tal como expresa Centeno (1988):

> ...La expresión número decimal es ambigua, porque la palabra número exige un adjetivo que se refiera a su naturaleza intrínseca. Por ejemplo, los adjetivos natural, racional, real nos permiten identificar la naturaleza de los números de los que hablamos. Naturaleza que es independiente de la forma de representar estos números y, en particular, del sistema de numeración elegido. En cambio, la palabra decimal, que procede de "diez", hace referencia a la base de numeración más extendida, llamada numeración decimal (...) En la práctica, se comete abuso de lenguaje cuando se identifica "escritura con punto" y "número decimal". Pero los abusos de lenguaje son indispensables en el curso escolar –y hasta en todo discurso matemático–, porque hablar y escribir con la máxima precisión alargaría indefinidamente las frases. Es importante,

sin embargo, que los abusos de lenguaje sean conscientes y conocidos por profesores y alumnos, de modo que no exista ambigüedad ni confusión en el lenguaje (p. 67).

Si bien en general es posible distinguir en una tarea si se alude al concepto de número o a una de sus representaciones, es necesario tener claro que sólo es posible el acceso a una conceptualización de los números mediante alguna de sus representaciones.

El conjunto de números decimales puede definirse a partir de los números enteros, o bien, una vez construido el conjunto de los racionales, como ciertos elementos especiales de éste.

Como extensión de los enteros, pueden surgir al considerar todas las soluciones de la ecuación $10^n x = a$, donde a es un número entero y n es un número natural. De esa manera, se genera, por ejemplo, 4.5 como el número que multiplicado por 10 da 45. Para lograr esto, se define en $Z \times N$ una relación de equivalencia y operaciones de suma y multiplicación, compatibles con esta relación de equivalencia, que prolonguen las ya definidas en los números enteros. Esta manera de definir los decimales es similar a la que puede darse para los racionales, con la diferencia de que, en lugar de considerar únicamente los enteros de la forma 10^n, se considera cualquier número entero. En este caso, un número decimal se escribe con una parte entera, un punto y un número finito de cifras decimales.

Otra posibilidad de definir D –a partir de los números enteros– es añadir primero a este último conjunto un solo elemento "d", de tal manera que $10 \cdot d = 1$ y, a partir de este nuevo elemento y los enteros, generar todos los números decimales.

Por otra parte, es posible definir D a partir de una restricción de los racionales, definidos por medio del subconjunto de los números racionales cuyo denominador es una potencia de 10, es decir de la forma $\frac{a}{10P}$ con p entero no negativo.

La organización didáctica que se desarrolle para trabajar con los números decimales no será la misma si se parte de N, como sucede en general en la escuela primaria, donde los números decimales –o si se quiere los números con punto– se presentan en paralelo con las fracciones y no a partir de ellas, que si se parte de Q, donde los decimales son ciertos racionales particulares.

Se deberá elaborar, en cada caso, una organización matemática de referencia atendiendo a las propiedades de cada conjunto –por ejemplo *D* no es cerrado con respecto a la división, en cambio, en *Q*, todos los elementos tienen inverso multiplicativo– y, a la vez, a los conocimientos prescritos para el nivel.

También puede percibirse la necesidad de incluir en la formación de los futuros docentes las distintas formas de construcción de *D*.

Construido de una u otra manera, se pueden definir en *D* dos operaciones: suma y multiplicación, que verifican las propiedades aritméticas fundamentales, dotando a este conjunto de una estructura de anillo.[10] Puesto que no todo elemento de *D* posee un inverso multiplicativo, este conjunto no puede tener una estructura de cuerpo. Esta última afirmación nos permite, a la vez, asegurar que no siempre un cociente de decimales será un número decimal, afirmación que aparece con cierta claridad a partir del análisis de la estructura del conjunto *D*.

Ahora bien, si se plantea la pregunta ¿es este cociente de números decimales un número decimal?, para responder, no basta recurrir a que *D* no es cerrado con respecto a la división, ya que si el cociente es $\frac{2.3}{2.5}$ se tratará de un número decimal, mientras que $\frac{2.3}{4.5}$ no lo es.

Para medir la importancia del aprendizaje de los números decimales en la escuela, podemos citar las prácticas sociales de referencia: situaciones de medición, en particular medidas aproximadas de cantidades continuas que forman una gran parte de las actividades humanas; uso generalizado de instrumentos tecnológicos de cálculo y, ya dentro del contexto matemático, situaciones de aproximación de números racionales y reales. Todo número racional no decimal, e incluso todo real, puede ser aproximado dada la densidad de *D* por una sucesión de números decimales. $\frac{1}{3}$ no es un número decimal, pero puede ser aproximado por la sucesión 0.3; 0.33; 0.333;...

En relación con *D*, podemos señalar que, al igual que *Z*, posee una estructura de anillo, aun cuando este último conjunto es, además, un dominio de factorización única.[11] Sin embargo, en la enseñanza de la matemática y en la formación de los futuros profesores, no se le asigna la misma importancia a cada uno de ellos. Así, del conjunto de números decimales, se retoma la propiedad de poder

[10] Para ampliar este concepto, se puede recurrir a Lentin y Rivaud (1961) u otras publicaciones sobre estructuras algebraicas.

[11] Véase Lentin y Rivaud (1961).

aproximar a los números racionales y reales –propiedad que no verifica Z–, pero no se problematiza su estructura.

Escritura decimal y fraccionaria de un número decimal

Los números decimales pueden representarse mediante dos tipos de escrituras: la fraccionaria $\frac{a}{10P}$ y la decimal $b.b_1b_2...b_p$. Cada una de estas escrituras pone en evidencia ciertas propiedades del número y, por tanto, en función de la tarea por realizar, puede resultar más adecuado usar una u otra representación.

Cuando hablamos de número decimal y, en particular, de fracción decimal, nos referimos no sólo a que se encuentre efectivamente escrito como fracción decimal, sino también a que pueda ser escrito de esa manera. Es el caso de fracciones como: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{25}, \frac{5}{50}$ ...

Si se conoce la expresión decimal de un número, su escritura fraccionaria puede obtenerse escribiendo como numerador dicha expresión en cuanto número entero $d_0d_1d_2 \ldots d_p$ y, como denominador, la potencia p de 10 (p: cantidad de cifras decimales).

Si se parte de la expresión fraccionaria de un número decimal, la división por una potencia de 10 permite obtener la expresión decimal de éste.

La tarea de determinar si un número racional es o no decimal

Analicemos ahora una de las tareas en las que se pueden poner en juego las distintas escrituras, la de determinar si un número racional es o no decimal.

a. Si se encuentra representado por su expresión decimal, observar si la misma es finita o no permite responder la pregunta.

Si está escrito en forma fraccionaria y se puede encontrar una fracción equivalente a la dada con denominador potencia de 10, la respuesta es inmediata. Ahora bien, dependiendo del denominador de la fracción, esta búsqueda puede ser compleja, por ejemplo, no es inmediato determinar una fracción decimal equivalente a $\frac{3}{8}$. En este último caso, la división provee un recurso válido para obtener su expresión decimal y, de esta manera, determinar si es o no un número decimal.

El interés por seguir economizando cálculos nos lleva a preguntarnos si es posible anticipar el carácter decimal de un número racional escrito en forma fraccionaria sin realizar la división, ya que, en algunos casos, efectuar la división también puede ser una tarea engorrosa. A partir de la descomposición factorial del denominador, puede afirmarse que, si en ésta los únicos factores primos son 2 o 5, será un número decimal, ya que es posible obtener otra fracción decimal equivalente que tenga como denominador una potencia de 10 multiplicando numerador y denominador por tantos 2 o 5 como sean necesarios.

La descomposición factorial del denominador permite anticipar el factor por el cual habrá que multiplicar para obtener la fracción decimal equivalente. Por ejemplo, en $\frac{3}{8}$ pensamos el denominador $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, luego, multiplicando numerador y denominador por 5^3 resulta la fracción decimal buscada. Situación similar se presentará en $\frac{3}{40}$, donde $40 = 2^3 \times 5$ y, por tanto, el factor por el cual hay que multiplicar numerador y denominador será 5^2.

Podría suceder, no obstante, que el denominador no tenga únicamente como factores primos 2 y 5, como es el caso de $\frac{6}{15}$, cuyo denominador también tiene 3 como factor, no sería entonces un número decimal. Pero dicha fracción es equivalente a $\frac{2}{5}$ que es, a su vez, equivalente a $\frac{4}{10}$ y, por consiguiente, es un número decimal a pesar de tener en la descomposición del denominador un factor distinto de 2 y 5. En el caso de fracciones mayores que la unidad, una técnica que también permite determinar su naturaleza (decimal o no) es descomponerla en una suma de enteros más una fracción menor que la unidad. Por ejemplo $\frac{45}{18}$ es decimal, ya que se puede descomponer en: $2 + \frac{9}{18}$, donde $\frac{9}{18} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.

De lo anterior, ¿se podría concluir que si dos fracciones tienen igual denominador ambas serán o no decimales? Las fracciones $\frac{7}{18}$ y $\frac{45}{18}$ permiten mostrar que esta conclusión no es posible.

Queda claro entonces que, antes de hacer afirmaciones sobre el carácter decimal de una fracción a partir de analizar los factores primos del denominador, debe verificarse si se trata de una fracción irreducible.

Podemos señalar también que, si en el denominador de una fracción se encuentra un factor primo distinto de 2 o 5 que no se encuentra en el numerador –por ejemplo la fracción $\frac{20}{12}$ tiene en el denominador el factor primo 3 que no se encuentra en el numerador–, esto es suficiente para determinar que dicha fracción no es decimal, sin necesidad de obtener la fracción irreducible correspondiente.

b) Se puede plantear si, en todas las tareas relativas a esta temática, siempre es necesario buscar la fracción irreducible. Ya vimos que, si se obtiene una fracción equivalente con denominador potencia de 10, esto no es necesario, como sucede en el caso de $\frac{15}{50}$ que es equivalente a la fracción decimal $\frac{30}{100}$. Para determinar que la fracción no es decimal, tampoco es necesario buscar la fracción irreducible en los casos en los que se encuentre un factor primo distinto de 2 y 5 en el denominador que no sea factor del numerador, por ejemplo en $\frac{20}{12}$, el factor 3 del denominador no se puede eliminar.

Será necesario llegar a una fracción irreducible sólo en los casos en los que no se encuentre en el denominador un factor distinto de 2 y 5 que no esté en el numerador para estar seguros de que dicho factor realmente no existe. De todos modos, incluso en estos casos, puede suceder que, para responder a la pregunta de si una fracción es decimal o no analizando el denominador, no haga falta concluir el proceso de simplificación. Es decir, se debería utilizar esa técnica sin perder ni la pregunta ni el control de si ya se puede contestar o no. Por ejemplo, la fracción $\frac{60}{75}$, si no se percibe que 3 es el único factor primo distinto de 2 y de 5 que posee el denominador, se puede recurrir a la simplificación, pero, al llegar a $\frac{20}{25}$, aunque no es la irreducible, ya se puede afirmar que se trata de una fracción decimal.

Buscar la fracción irreducible aparece en las prácticas escolares como un mandato muy fuerte: toda fracción debe ser dejada en su versión irreducible, tarea justificada únicamente por la obtención de algo "más simple", sin conocer, en general, cuál sería la necesidad de realizarla.

Sobre este punto podemos retomar lo afirmado por G. Cirade (2006):

La razón de ser primigenia de la simplificación de fracciones y de otros gestos de naturaleza similar (como racionalización de denominadores, orden de los polinomios,...) tiene que ver con el esfuerzo de aportar una respuesta uniforme a la pregunta: ¿Cómo reconocer si dos objetos matemáticos de un cierto tipo, designados de una cierta manera, son o no el mismo objeto? Por ejemplo, ¿es $7 \times 5 - 8 = 33$?

También afirma que:

Para un tipo de objetos matemáticos - por ejemplo, para los números racionales - se dispone de una escritura que se la puede calificar de canónica, de modo tal que cada uno de los objetos considerados se escribe usándola de una única manera o, para decirlo de otra manera, recibe un único "nombre"; así $\frac{5}{3}$ es el nombre canónico de un número racional que puede ser designado por otras escrituras $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = 1 + \frac{2}{3}$,...

(...) Encontrar la solución canónica consiste en:

- crear un sistema de escritura de objetos del tipo considerado en el que cada uno tenga una escritura y sólo una;
- "calcular" la escritura canónica de cada uno de los objetos por comparar:

$$7 \times 5 - 8 = 35 - 8 = 27, \ldots.$$

- decidir entonces, sólo con una mirada sobre sus escrituras canónicas, si los dos objetos son idénticos o no: se tiene así $7 \times 5 - 8 = 27$ y $3^3 = 27$ por lo tanto $7 \times 5 - 8 = 3^3$ (p. 221).

Sin embargo, luego de desarrollar este tema, la autora señala que

(...) cualquiera que sea la escritura que recibe un cierto objeto en un momento dado del trabajo, conviene, en función del proyecto matemático que se realiza, reescribirla en una forma en general no canónica, pero apropiada para mostrar ciertas propiedades del objeto, mediando algún razonamiento sobre la forma de la escritura (p. 223).

El ejemplo que plantea es el de un polinomio de grado 2 cuya expresión canónica es $2x^2 + x - 1$, escritura que no revela inmediatamente que se anula en $x = -1$, mientras que escrituras como: $(2x - 1)(x + 1)$ y, más aún, $2(x - \frac{1}{2})(x - (-1))$ sí lo revelan.

c) Siguiendo con la tarea planteada de determinar si una fracción es o no decimal, abordamos otras preguntas que, en su formulación, ponen en evidencia nuevas relaciones o profundizan los aspectos analizados.

Nos referimos a:

¿$\frac{\sqrt{2}}{5}$ es una fracción decimal, porque tiene a 5 como único factor primo del denominador?

Y

¿$\frac{7}{90}$ es una fracción decimal, ya que termina en 0 y las potencias de 10 terminan en 0?

En los dos casos, si bien preguntamos por números particulares, podríamos plantearlas en términos más generales:

- Si una expresión fraccionaria tiene 5 como denominador, ¿es una fracción decimal, ya que multiplicando por 2 numerador y denominador se obtendría como denominador una potencia de 10?
- ¿Toda fracción con denominador múltiplo de 10 es una fracción decimal?

En el primer caso, la expresión fraccionaria $\frac{\sqrt{2}}{5}$ puede escribirse como $\frac{2\sqrt{2}}{10}$, pero está claro que dicha expresión no representa un número decimal por ser un número irracional. En general, saber que una expresión fraccionaria (o racional) tiene denominador 5 no es suficiente para afirmar que se tratará de un número decimal, ya que al hablar de fracción decimal nos referimos a un cociente de enteros, es decir, a un racional.

La segunda pregunta cuestiona la diferencia entre potencia y múltiplo de 10. Parece difícil aceptar *a priori* que la fracción $\frac{a_1}{90}$ no sea decimal, cuando fracciones como $\frac{a_2}{10}$; $\frac{a_3}{20}$; $\frac{a_4}{40}$; $\frac{a_5}{50}$; $\frac{a_6}{80}$; $\frac{a_7}{100}$ sí lo son, independientemente de sus respectivos numeradores. En general, frente a una fracción con denominador múltiplo de 10, para determinar si es o no una fracción decimal, será necesario realizar análisis como los citados anteriormente.

En resumen, hemos mostrado que:

- Para afirmar que una fracción es decimal, es suficiente encontrar una equivalente que tenga como denominador una potencia de 10, asumiendo que se trata de un cociente de enteros; además, no será necesario obtener la fracción irreducible.
- Más general, si el denominador de una fracción no es potencia de 10, habrá que determinar si sus únicos factores primos son 2 y 5. De ser así, se puede afirmar que es decimal y no requerirá que se analice su irreductibilidad.
- En caso de que existan otros factores primos distintos de 2 y 5 en la descomposición factorial del denominador, será necesario analizar si éstos se encuentran o no en el numerador. Para asegurar que es decimal, será necesario mostrar que no existen, por ejemplo, encontrando la irreducible.
- Que el denominador sea un múltiplo de 10 no es suficiente para afirmar que la fracción es decimal, porque un múltiplo de 10 puede poseer un factor distinto de 2 y 5 que, en caso de no estar en el numerador, haría que la fracción no sea decimal.

El análisis anterior nos permite aseverar que, lejos del mandato escolar de dejar en su versión irreducible cualquier fracción, en muchas ocasiones, es posible utilizar recursos diferentes, o incluso composición de varios, a fin de economizar cálculos y/o mantener el control de los pasos seguidos.

CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo hemos propuesto algunas ideas que permiten problematizar el contenido Conjuntos numéricos, con la intención de mostrar buena parte de su complejidad y, de esta manera, contribuir a repensar su enseñanza. A menudo realizamos la problematización a partir de cuestionar la relación entre número y representación de un número y, en particular, entre número decimal y expresión decimal de un número. Elegimos plantear preguntas que, como señalamos a lo largo de la exposición, nos permitieron poner en evidencia distintas propiedades, desnaturalizando de este modo los conceptos involucrados.

La larga construcción histórica que concluye siglos después en la compleja formalización matemática actual y los análisis realizados sobre esta temática, nos permite afirmar que su aprendizaje difícilmente puede lograrse con un trabajo concentrado únicamente en los primeros años de la escuela media y, menos aún, si de lo que se trata es de aprender reglas y técnicas sin un control de sentido y sin que se justifiquen con la matemática disponible en este nivel. Por otro lado, la presentación axiomática que tiene lugar en la formación superior tampoco pone en evidencia este largo proceso de construcción, ya que, en general, no se realiza un trabajo que ligue el inicio del estudio –propio de la escuela media– con lo que se realiza más adelante en este nivel. Estas visiones –tanto de la escuela media como de la formación superior– de lo que significa aprender estos contenidos no permite poner al descubierto las dificultades propias de alumnos que están aprendiendo (concepciones, interpretaciones) y las propias del contenido (epistemológicas).

La confusión entre número decimal y expresión decimal revela una confusión más amplia entre el número y su representación. En la formación superior, los números decimales no se reconocen, en general, como conjunto numérico, y a menudo se identifican como los números con punto, lo que corresponde en realidad a la representación decimal, válida para todo número real. Así también, la presentación algebraica de los conjuntos numéricos –donde generalmente no se incluyen las distintas posibilidades de construir *D*– no es suficiente para fundamentar matemáticamente la enseñanza de estos temas en la escuela media, donde el estudio de la estructura de los conjuntos no está presente como contenido.

Tal como señalamos en distintos apartados del artículo, las preguntas que hemos planteado no son de la misma índole que las que se podrían plantear en el estudio de la estructura de los conjuntos y, por otro lado, las que aluden a otro tipo de escrituras semióticas no presentes explícitamente en la definición de los conjuntos plantea cuestionamientos sobre las mismas definiciones. Nos referimos a cuestiones como las siguientes:

- Puesto que la definición de número racional alude a un cociente de números enteros, ¿también un cociente de números decimales será un número racional? ¿Y uno de fracciones?
- Los números decimales ¿son los números con punto?[12]
- ¿Cuáles son los números que se pueden escribir con base 10? Y ¿qué relaciones existen entre esas escrituras, las expresiones decimales y los números con punto?

A lo largo del estudio didáctico realizado, hemos ido identificando aspectos constitutivos de los conceptos involucrados a partir de los cuales definimos categorías de análisis.

Estas categorías nos sirvieron como marco matemático-didáctico de referencia tanto para el análisis de las prácticas educativas como de los libros de texto[13] y, fundamentalmente, para elaborar organizaciones didácticas pertinentes en el aula.

Nos referimos a:

- Distinción entre número y representación de un número y trabajo con distintas representaciones, en particular, con la expresión canónica.
- Determinación de la naturaleza de un número e identificación del conjunto de referencia en la actividad matemática.
- Relaciones entre los conjuntos numéricos.

Por ejemplo, la primera categoría permitiría analizar no sólo cómo se definen los números, sino también qué papel desempeñan las representaciones, si se trabaja con diferentes representaciones, si se seleccionan según la tarea por realizar, si se busca la expresión canónica, etcétera.

[12] La denominación "números con punto" corresponde en otros países a la expresión "números con coma".

[13] "Organizaciones matemáticas en torno a las expresiones decimales en los libros de texto", *Revista Arandú*, núm. 5, DGES, Provincia de Corrientes, 2010; "Estudio comparativo de las organizaciones matemáticas en torno a las expresiones decimales en los libros de texto", *Revista Arandú*, núm. 5, DGES, Provincia de Corrientes, 2010.

El estudio realizado nos proporciona un conjunto de criterios que considerar a la hora de organizar la enseñanza. En primer término, que el conocimiento de la actual formalización matemática no basta para organizar su enseñanza en el nivel medio. Que es necesario indagar sobre los recursos al alcance de los alumnos para validar las afirmaciones que hagan, teniendo en cuenta el nivel escolar en el que se encuentran. Muchos de los recursos de los que dimos cuenta en este trabajo no podrían ser objeto de estudio en este nivel. Es necesario un trabajo sistemático con los distintos tipos de representaciones y sus formas de equivalencia y no pueden quedar reducidas a la mera manipulación de símbolos carente de significación. No tendría sentido organizar una enseñanza de únicamente reglas, por un lado, porque son demasiadas y muy complejas y, por otro, porque es necesario entender y tener recursos de control sobre lo que se hace.

No estamos pensando que todas las preguntas pueden ser planteadas en cualquier nivel de aprendizaje, pero sí que será necesario tenerlas presentes cuando se quiera analizar libros o elaborar propuestas de enseñanza y, por supuesto, deberían ser parte de la formación de profesores. No sólo deben disponer de las herramientas que justifiquen matemáticamente los conocimientos, sino también deben poder reconocer cuáles son las maneras posibles de justificación en el nivel medio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, Guy (1986), *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática,* Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B; *Trabajos de Matemática,* núm. 19, 1993.

Brousseau, Nadine y Guy Brousseau (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* IREM de Bordeaux, Universidad de Bordeaux 1.

Centeno, Julia (1988), *Números decimales ¿por qué? ¿para qué?,* Madrid, Editorial Síntesis.

Chevallard, Y, M. Bosch y J. Gascón (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje,* España, Editorial Horsori/ICE Universitat de Barcelona.

Cirade, Giséle (2006), *Devenir professeur de mathématiques: problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel,* Tesis, Yves Chevallard (director de tesis). [falta qué tipo de tesis y de qué institución]

Courant, R. y H. Robbins (1962), *¿Qué es la Matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*, Madrid, Aguilar.
González, Iriarte y otros (1990), *Números enteros*, Editorial Síntesis.
Lentin, A. y J. Rivaud (1961), *Álgebra moderna*, Aguilar.
Mercier, Alain (1988), "Enseigner les décimaux?", en *Didactique des Mathématiques et formation des maîtres a l'école élémentaire. Actes de l'Université d'Été*, Olivet, Francia.
Sessa, Carmen (2005), *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*, Argentina, Libros del Zorzal.

DATOS DE LOS AUTORES

Irma Elena Saiz
Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.
irmasaiz28@gmail.com

Edith Gorostegui
Instituto Superior de Formación Docente Dr. Juan Pujol,
Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.
egorostegui40@hotmail.com

Diego Vilotta
Instituto Superior de Formación Docente Dr. Juan Pujol,
Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.
dvilotta@arnet.com.ar