Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Antequera Guerra, Ana Teresa; Espinel Febles, María Candelaria

Resolución de juegos cotidianos con árboles de decisión: aportaciones de una experiencia con alumnos de secundaria

Educación Matemática, vol. 23, núm. 2, agosto, 2011, pp. 33-63
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Resolución de juegos cotidianos con árboles de decisión: aportaciones de una experiencia con alumnos de secundaria

Ana Teresa Antequera Guerra y María Candelaria Espinel Febles

Resumen: Se presentan algunos juegos de estrategia, conocidos y populares, con el propósito de incentivar el desarrollo del pensamiento estratégico en alumnos de secundaria obligatoria. Mediante el diagrama de árbol se muestran todas las posibilidades que tienen los jugadores. Dicha representación permite el estudio de todas las contingencias y es una técnica para escoger la mejor estrategia posible. Se pueden utilizar los juegos como una ayuda para analizar el comportamiento humano en situaciones de conflicto de intereses en la vida diaria. Los resultados del estudio, teniendo en cuenta las componentes de los procesos cognitivos en la resolución de problemas, muestran que los alumnos son capaces de trazar los árboles de los juegos propuestos y que tienen algunas dificultades para asignar los pagos a los jugadores. Se observan mejores resultados entre los alumnos de nivel más alto.

Palabras clave: juegos, árboles, decisión, resolución de problemas, competencia matemática.

Solving daily games through decision trees: Contributions of an experience with secondary school students

Abstract: Some well known and popular strategy games are used to encourage the development of strategic thinking of students in secondary school. Tree diagram shows all possibilities for players involved in those games. This representation allows the study of all possible contingencies and it is a technique to choose the best possible strategy. It can be used as an aid to analyze human behaviour in situations of conflict of interest in everyday life. The study results, taking into account cognitive process components in problem solving, show that students are able to map the trees of the proposed games and have some difficulties in allocating payments to players. Best results were observed among students in higher level.

Keywords: games, trees, decision, problem solving, mathematical literacy.

Fecha de recepción: 20 de septiembre de 2010.

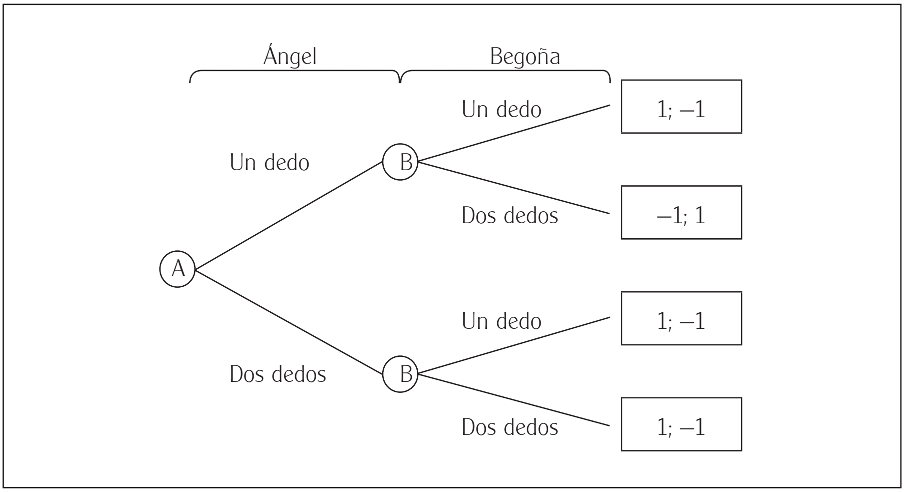
INTRODUCCIÓN

Dos amigos, Ángel y Begoña, juegan a *Pares y nones*. Ambos muestran al mismo tiempo uno o dos dedos. Si el número de dedos coincide, el jugador que apuesta a pares, por ejemplo Ángel, gana la apuesta, digamos un euro, al jugador que va a nones, Begoña. Si el número no coincide, Ángel paga un euro a Begoña. Cada jugador tiene dos estrategias: "mostrar un dedo" o "mostrar dos dedos". Las alternativas y los pagos se recogen en la siguiente tabla de doble entrada:

		Begoña	
		Un dedo	Dos dedos
Ángel	Un dedo	1; –1	–1; 1
	Dos dedos	–1; 1	1; –1

Otra manera de reorganizar la información de la tabla es mediante un diagrama de árbol, en el que da lo mismo cuál de los dos jugadores se sitúe primero, puesto que ambos toman sus decisiones al mismo tiempo. Un ejemplo de cómo puede desarrollarse el árbol asociado a este juego con los pagos correspondientes a cada jugador se recoge en el cuadro 1.

Cuadro 1. Juego *Pares y nones*



Este juego de *Pares y nones* es un clásico que normalmente se utiliza para dirimir la prioridad a la hora de realizar alguna acción. Al examinar este tipo de juegos relativamente sencillos, se distinguen fácilmente las estrategias de los jugadores para, así, modelarlos y analizarlos. Otra manera de modelar este juego es considerar las filas como las estrategias del primer jugador, Ángel; y las columnas como las estrategias del segundo jugador, Begoña, y usar elementos positivos para denotar la ganancia de Ángel sobre Begoña y elementos negativos para la ganancia de Begoña sobre Ángel. Se organizan los pagos de la situación en la siguiente tabla (Zagare, 1989):

		Begoña	
		Un dedo	Dos dedos
Ángel	Un dedo	1	–1
	Dos dedos	–1	1

Hay multitud de juegos basados en la confrontación directa de dos o más jugadores, como pueden ser *Piedra, papel o tijera* o *Lanzar monedas*. Comúnmente se entiende como juego un conjunto de acciones que, con sujeción a ciertas reglas, se realizan como diversión (Moliner, 2001). El concepto de juego que se tiene desde las matemáticas es significativamente distinto y a ello se dedica parte de la introducción de este artículo. Se recogen primero algunos conceptos teóricos sobre juego matemático, luego se presenta la relación existente con el currículo de secundaria y la resolución de problemas y se finaliza la introducción con el marco conceptual. En el segundo apartado del artículo se presentan y analizan las aportaciones hechas por un grupo de alumnos de secundaria cuando se les pide que modelen cinco juegos de confrontación. La actividad que se les presenta a los alumnos consta de las cinco tareas en las que se utiliza el diagrama de árbol, entendido éste como la representación extensiva de los juegos o árbol de decisión, donde las etiquetas de los vértices finales recogen los pagos que reciben los jugadores. Se finaliza con los resultados y las conclusiones de la experiencia.

Conceptos teóricos

Con el nombre de juego matemático se entiende un conjunto de reglas que condicionan el comportamiento de ciertos individuos, que se llaman *jugadores* e intervienen en el juego (Binmore, 1994). En el juego de *Pares y nones*, los jugadores son Ángel (A) y Begoña (B). Las reglas establecen las posibles alternativas de los jugadores y cada una de ellas se llama *estrategias*. Para los jugadores son iguales: mostrar un dedo o mostrar dos dedos. Como consecuencia de las estrategias seguidas por los jugadores se espera un resultado, obtener un número par o impar. Además, se supone que los jugadores, Ángel y Begoña, tienen claras sus preferencias sobre los resultados posibles y prefieren unos resultados sobre otros. Este rango de preferencias se representa asignando a cada resultado un pago para cada jugador, ganar o perder un euro en el juego considerado.

De manera más precisa, en cualquier juego existe una serie de *movimientos* posibles para cada jugador que están bien definidos. Cada movimiento es un *punto de decisión* dado de entre un conjunto de alternativas para un jugador. La alternativa concreta, es decir, la *estrategia* elegida por un jugador en un punto de decisión dado es una *elección,* mientras que la totalidad de las elecciones posibles en ese punto de decisión constituyen el *movimiento*. En el juego anterior, tanto Ángel como Begoña poseen un solo movimiento en el que tendrán que decidir de entre dos elecciones posibles, mostrar uno o dos dedos.

Existen distintas herramientas que hacen posible recoger toda la información del juego que se está analizando. En el ejemplo, aparecen la tabla de doble entrada, llamada *matriz de pago,* y el *diagrama de árbol*. Ambas herramientas son equivalentes y se puede trasladar la información de una a otra de manera sencilla.

El diagrama de árbol, considerado como grafo, está formado por vértices y aristas. Cada vértice representa los movimientos posibles para cada jugador y se señalan con la inicial de cada uno de los jugadores: A y B. En las aristas se indican las elecciones disponibles para cada jugador en ese instante del juego. En el ejemplo, se escribe sobre cada arista "un dedo" o "dos dedos", según corresponda. Cada uno de los vértices terminales del árbol es un punto final del juego que caracteriza completamente la jugada que llega a él, es decir, partiendo de la raíz del árbol, existe sólo una secuencia de elecciones en el árbol que lleva al vértice final considerado. Por último, en cualquier sistema de reglas proporcionado para un juego, habrá un conjunto fijo de resultados o pagos específicos para cada jugada. Estos resultados se señalan con unas etiquetas situadas en los vértices finales en las que se detallan los pagos para cada uno de los jugadores en el orden en el que intervienen.

Los juegos en los que se enfrentan sólo dos jugadores se llaman *juegos bipersonales,* destacan por ser los de análisis más simple y los que permiten desarrollar mejor actividades que modelan situaciones de la vida cotidiana. Si el juego corresponde a una situación en la que las ganancias de uno de los jugadores son exactamente las pérdidas del otro, se denominan juegos de *conflicto puro* o *juegos de suma nula*. En el ejemplo, Ángel y Begoña participan en un juego bipersonal de suma nula o de conflicto puro.

Cuando las ganancias de uno de los jugadores no corresponden exactamente a las pérdidas del otro, se denominan *juegos de suma no nula*. En estos juegos aparece una componente de cooperación que hace que este tipo de juegos sean más representativos de otras situaciones reales.

Cabe la posibilidad de que las reglas del juego no permitan a los jugadores conocer ningún movimiento concreto de todas las elecciones hechas con anterioridad e incluso puede suceder que no conozcan sus elecciones en el movimiento anterior. En este sentido, se define como *conjunto de información* en el árbol de decisión el conjunto de vértices de un nivel en el que el jugador que debe elegir (decisor) sabe que está, pero no puede distinguir entre ellos. En el juego de *Pares y nones,* el conjunto de información de Begoña está formado por los dos vértices señalados con la letra B en el cuadro 1. Cuando en una situación de enfrentamiento ambos jugadores tienen conocimiento de todo el desarrollo del juego, es decir, los conjuntos de información son unitarios, se dice que son *juegos de información perfecta*. Con esta definición, el juego de *Pares y nones* no sería de información perfecta, porque cuando Begoña hace su movimiento tiene claro cuáles son sus elecciones, pero no puede distinguir si está en el vértice de arriba o en el vértice de abajo, ya que no conoce la elección que ha hecho Ángel con anterioridad.

Diagramas de árbol en el currículo

En los currículos de matemáticas de Primaria y Secundaria los árboles se suelen emplear principalmente para visualizar de manera sencilla hechos y relaciones, especialmente como una representación que ayuda a comprender mejor las situaciones de enumeración y a encontrar con sencillez la regla del producto. Por ello, su presencia en los currículos está muy ligada a cuestiones de probabilidad y combinatoria (Bailo, Casals, Gema y Tuderi, 1997; Grupo Cero, 1982).

La relación de los diagramas de árbol con la probabilidad y la combinatoria ha mostrado ser más relevante de lo esperado, pues son recursos didácticos imprescindibles para introducir a los alumnos en los nuevos conceptos de estas ramas de la matemática. Se considera que el árbol es una herramienta destacada para explicar la enumeración en combinatoria y probabilidad. Aunque la capacidad de enumeración sistemática se supone adquirida al llegar el niño al periodo de las operaciones formales, hay estudios en los que se pone de manifiesto que esta capacidad no siempre se alcanza y es entonces cuando el diagrama de árbol juega un papel destacado. Usar una metodología basada en juegos, utilizando diagramas de árbol y la manipulación debe ser una pieza importante del desarrollo en el aula de la probabilidad y la combinatoria (Engel, Varga y Walter, 1976).

Las representaciones en árbol, siempre y cuando estén adecuadamente determinadas, permiten tratamientos probabilísticos más asequibles. Así, frente a las explicaciones basadas en la teoría de conjuntos y los diagramas de Venn que muestran conjuntos y elementos, los árboles representan experiencias. Esto permite comprender mejor conceptos más complejos, como la independencia, que se entiende mejor por experiencias que por eventos (Pluvinage, 2005, pp. 94-95). Algunos estudiantes que son hábiles con otros contenidos matemáticos tienen grandes dificultades para comprender los conceptos de la probabilidad y sólo consiguen el éxito a fuerza de repeticiones, mostrándose inseguros cuando las situaciones se salen de las ordinarias. En consecuencia, no cabe duda sobre la importancia que tiene la construcción de árboles como modelo generativo en cuanto que sugiere y facilita una generalización iterativa y una generalización constructiva, características esenciales del razonamiento recursivo (Fischbein, 1975).

Conviene señalar que, en la experiencia que se describe en este artículo, los diagramas de árbol tienen un tratamiento distinto al de la combinatoria y probabilidad que se desarrolla de manera habitual en los currículos oficiales. La propuesta que se aporta es la de considerar estos diagramas como una herramienta que ayuda a resolver situaciones de conflicto en las que se tengan que tomar decisiones cuando hay distintas alternativas donde elegir. El árbol es considerado en la experiencia no sólo como una herramienta de enumeración, sino también como una imagen gráfica de un juego cuyas reglas se han dado previamente. Los alumnos que resuelven la actividad han de considerar los árboles como una sucesión de turnos de los jugadores, comprendiendo que el resultado de la elección de cada uno de los jugadores está condicionado por la del otro, siempre que éstos actúen de manera racional.

La idea que yace detrás de este uso que se da a los diagramas de árbol es la de usarlos como una herramienta para realizar análisis y reflexiones sobre cualquier situación de conflicto (Sicilia y González-Alcón, 2000), en la que los individuos involucrados tienen como objetivo obtener el mejor resultado posible. Para ello, observan los pagos finales que les sean óptimos y retroceden a través del árbol en busca de las elecciones adecuadas en cada movimiento. Este tipo de razonamiento sobre el árbol de decisión se denomina comúnmente *inducción hacia atrás*.

Con el fin de precisar lo anterior desde un punto de vista teórico, el juego de *Pares y nones* es un juego bipersonal de suma cero o de conflicto puro, pero no de información perfecta, el cual se ha modelado mediante una matriz de pago y un diagrama en árbol. A los alumnos que participan en la experiencia, dicho juego se les muestra como ejemplo prototipo que ilustra la formulación de un juego mediante un procedimiento gráfico, como es el árbol asociado al juego, para que lo sigan como pauta en otras cuatro tareas. Estas otras tareas que se recogen más adelante en este artículo, también son juegos bipersonales de suma cero, pero no de información perfecta, sobre situaciones o juegos distintos, pidiéndoles a los alumnos que los modelen usando diagramas de árbol.

Marco conceptual

El desarrollo de la sociedad actual, impulsado por la aparición de nuevas tecnologías, requiere un incremento significativo de habilidades en resolución de problemas en distintos niveles. Para resolver los problemas y los retos de la vida privada o profesional, las estrategias basadas puramente en experiencias dirigidas suelen fracasar debido a la gran cantidad de información a la que cualquier individuo se tiene que enfrentar para resolverlas. Se hace necesario utilizar estrategias flexibles y las adecuadas habilidades en resolución de problemas para hacer frente a la ingente cantidad de información que llega cada vez más desde medios distintos (OCDE, 2006). Por esto, la resolución de problemas en contextos cotidianos desempeña un papel crucial en las pruebas PISA (OCDE, 2004), donde en las discusiones sobre competencias a través del currículo se ha tenido en cuenta desde el principio la resolución de problemas (Niss, 2004).

En PISA se entiende por *competencia matemática* la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. Ahora bien, en el momento de evaluar el grado de consecución de esta competencia por parte de los estudiantes es cuando la resolución de problemas adquiere una importancia significativa, puesto que se entienden las matemáticas como un conjunto de procesos que proporcionan respuestas a problemas. Se enfoca la evaluación en cómo pueden utilizar los estudiantes lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido. Es decir, en el uso de herramientas matemáticas en contextos cotidianos se manifiesta la competencia matemática de los estudiantes (Rico, 2006, p. 50). En definitiva, se desea que los alumnos, cuando terminen la etapa de educación obligatoria, sean competentes matemáticamente, es decir, sean capaces de pensar matemáticamente, formular y resolver problemas matemáticos, construir y utilizar modelos matemáticos, razonar matemáticamente, representar entes matemáticos, manejar símbolos y fórmulas matemáticas, comunicarse en, con y sobre matemáticas, y, por último, hacer uso de herramientas y recursos (Niss, 2004).

Los diagramas de árbol son un recurso potente que se emplea de manera habitual para enumerar todas las posibilidades lógicas de una secuencia de sucesos, en la que cada suceso puede ocurrir de un número finito de maneras y, por tanto, también se pueden considerar como un recurso en la resolución de problemas en general, no sólo en los de combinatoria y probabilidad. En esta investigación, se trata el árbol como un recurso con potencial para desarrollar en los alumnos estrategias en toma de decisión y elección. El diagrama de árbol es tratado como la representación extensiva de escenarios de conflicto o enfrentamiento, presentados como juegos cotidianos que se enmarcan dentro de los juegos bipersonales de suma nula en el ámbito de la Teoría de Juegos. Para ello, en este estudio se presentan tareas con distinto grado de dificultad, desde la reproducción de un proceso rutinario hasta la integración del modelo para resolver tareas más complejas con el ánimo de observar cómo se desenvuelven los alumnos.

Por tanto, para analizar las producciones de los alumnos, el estudio se desarrolla dentro del marco de la resolución de problemas, entendida ésta como una herramienta para pensar matemáticamente. Ello supone formar individuos con capacidad autónoma para pensar, siendo críticos y reflexivos con las soluciones (Schoenfeld, 1992). Además, se emplea en la actividad una de las estrategias desarrolladas por Polya (1945), la de la utilización de un método gráfico para la resolución de problemas.

De acuerdo con Reeff, Zabal y Blech (2006, pp. 12-13), los procesos cognitivos que se activan en el curso de la resolución de problemas son diversos y complejos y se pueden organizar de una manera no lineal. En estos procesos se deben identificar los siguientes componentes:

1. Búsqueda de información, estructurándola e integrándola en una representación mental del problema (*modelo situacional*).
2. Razonamientos, basados en el modelo situacional.
3. Acciones de planificación y otros pasos de la solución.
4. Ejecutar y evaluar los pasos de la solución.
5. Procesamiento continuo de información externa o retroalimentación.

El estudio que se desarrolla en este trabajo no contiene todos los procesos cognitivos propuestos por Reeff *et al.* (2006), puesto que a los alumnos se les dio un modelo situacional con el cual guiarse. En esta investigación, los componentes que se tratan comprenden sólo los puntos 2, 3 y 4. Tampoco se les pide que procesen nueva información y por eso no hay posibilidad de la retroalimentación a la que alude el punto 5.

La experiencia que se analiza en este artículo se considera que corresponde a la implementación de una actividad de Teoría de Juegos dentro del ámbito de Matemática Discreta. De este campo de las matemáticas interesan especialmente los temas de toma de decisiones, repartos justos y elección social (COMAP, 1999). En este sentido, este estudio pretende valorar la capacidad de los alumnos a la hora de modelar situaciones que les permitan trabajar en estas cuestiones en un ambiente cotidiano, así como dar al alumno la oportunidad de ser constructivo y reflexivo. El desarrollo de los nuevos currículos de secundaria, basados en la obtención de competencias facilita la introducción de este tipo de actividades en las que se utiliza una amplia gama de herramientas y habilidades matemáticas fácilmente adaptables al nivel educativo (Espinel y Antequera, 2008). La integración de la Matemática Discreta en los currículos de secundaria podría traer consigo el alcance de metas muy importantes. Primero porque se daría una imagen de las matemáticas como un área dinámica e interesante, pero también porque permitiría a los profesores desarrollar estrategias innovadoras y a los alumnos tener contacto con contenidos matemáticos no estandarizados, pudiendo así resolver problemas del mundo real (Rivera-Marrero, 2007).

Se ha de señalar que la búsqueda de un marco de análisis no ha resultado fácil. Esta actividad está compuesta por una serie de tareas en la que se utiliza el diagrama de árbol, no como la clásica concepción que se le da en combinatoria, sino que se trabaja con él desde la perspectiva de los árboles en la Teoría de Grafos. Éste es un ámbito en el que la investigación en enseñanza no se ha prodigado demasiado, si bien comienzan a ser frecuentes los textos relacionados con la Matemática Discreta a través de aplicaciones (COMAP, 1999; Crisler y Froelich, 2006; Parks, Musser, Burton y Siebler, 2000). El árbol que se trabaja en esta actividad es un tipo particular de grafo jerárquico y, en relación con éstos, se sabe que su dominio no es innato, sino que requiere una enseñanza y un aprendizaje para su total comprensión (Körner, 2005, pp. 282-284).

El estudio que se presenta en este artículo forma parte de una investigación más amplia donde se diseña material curricular a partir de contenidos propios de la Teoría de Juegos (Antequera y Espinel, 2003, 2011; Espinel y Antequera, 2008) desde el ámbito de la Matemática Discreta (Rosentein, Franzblau y Robert, 1997). El objetivo es el desarrollo del pensamiento estratégico que se puede incentivar desde la Teoría de Juegos y puede llegar a ser de ayuda para la toma de decisiones responsables en la vida real (Dixit y Nalebuff, 1986).

Los objetivos de la experiencia que se plantean son los siguientes:

- Determinar la capacidad de los estudiantes de secundaria para interpretar y construir diagramas de árbol que modelen juegos conocidos y asignar pagos a ambos jugadores en cada uno de los resultados posibles.
- Presentar e incentivar un enfoque nuevo del uso de árboles que ayude a desarrollar el pensamiento racional y estratégico en situaciones complicadas de la vida diaria.

METODOLOGÍA

PARTICIPANTES

En el estudio participan un total de 52 alumnos de dos institutos de secundaria de las Islas Canarias (España), situados en la isla de La Palma y en la de Tenerife. La distribución de estos alumnos en tres niveles de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) se recoge en la tabla 1. Son estudiantes que tienen edades comprendidas entre 13 y 16 años.

Tabla 1. Número de alumnos distribuidos por niveles y edades

		4º ESO	3º ESO	2º ESO
Nivel	Secundaria	(15-16 años)	(14-15 años)	(13-14 años)
Alumnos	Total = 52	23	15	14

Instrumento

La actividad que se presenta a los alumnos consta de cinco juegos entre dos personas en los que las ganancias de uno de ellas representan exactamente las mismas pérdidas de la otra, es decir, juegos bipersonales de suma cero. La actividad se presenta a los alumnos con el título *Árbol para decidir* y se desglosa en cinco tareas o juegos con los siguientes títulos:

Tarea I. Juego de pares y nones
Tarea II. Juego de piedra, papel o tijera
Tarea III. Un juego de contienda
Tarea IV. Lanzar monedas
Tarea V. Sumar números.

Las tareas están relacionadas con juegos conocidos por la sociedad en general y se han estructurado para su resolución a través de diagramas de árbol. No todas las tareas muestran un mismo grado de concreción. Así, la primera tarea, que corresponde al conocido juego de *Pares y nones*, aparece en la actividad totalmente resuelta y tiene como principal objetivo que los alumnos observen el proceso de resolución que han de seguir en lo sucesivo en el resto de los juegos. Las dos siguientes tareas están semiestructuradas en distinto grado y se recogen en el cuadro 2 y el cuadro 3 tal como se les presentan a los alumnos. En el juego de *Piedra, papel o tijera*, se les da el árbol a los alumnos en blanco y tienen que rellenarlo, mientras en el *Juego de contienda* entre un bateador y un lanzador de beisbol, las distintas opciones vienen bien definidas. Las dos últimas tareas, *Lanzar monedas* con pagos no simétricos y *Sumar números*, con ganancias o pérdidas dependientes del número elegido, presentan situaciones totalmente libres para su resolución y se recogen en los cuadros 4 y 5, respectivamente. En resumen, primero se muestra la primera tarea con el juego totalmente resuelto.

Luego, en la segunda tarea se da el árbol para que los alumnos lo completen y en las tres últimas tareas se pide a los alumnos que construyan el árbol asociado a cada una de esas situaciones o juegos. Se estructura la actividad completa siguiendo un proceso educativo clásico: se parte de un ejemplo que permite mostrar el modelo que se va a seguir, para luego presentar una serie de tareas en las que la dificultad de resolución va creciendo paulatinamente.

La actividad se presenta a los alumnos como complementaria al desarrollo normalizado de las clases en secundaria, por lo que se le dedica una sesión habitual de clase de una hora. Hay que señalar que el tiempo dado se mostró insuficiente para algunos de los alumnos, hecho que se ve reflejado en el número de alumnos que dejan alguna de las tareas en blanco y el cual se observa cuando se analizan las producciones *a posteriori*.

Análisis de la información

La resolución de las tareas que se plantean en la actividad tiene un doble propósito; por un lado, la construcción del árbol de elección en cada uno de los juegos y, por otro, la asignación de pesos o pagos a cada una de las hojas finales del árbol, con valores diferenciados por cada jugador. Por ello, como marco de análisis para el estudio de las respuestas de los alumnos, se hace una evaluación por categorías de cada una de las tareas en función del grado de consecución de los propósitos previstos. La codificación seguida en este análisis se recoge en la tabla 2, siguiendo la categorización del proceso de resolución de problemas citado por Reeff *et al.* (2006).

Para ilustrar la diferencia entre respuestas consideradas dentro de las categorías C3 y C2 se muestran varias producciones dadas por los alumnos en distintas tareas. Así, la figura 1 corresponde a un alumno que ha construido correctamente el árbol y ha asignado los pagos a cada jugador en la tercera tarea, *Lanzar monedas*, y por tanto, en el análisis se considera que corresponde a la categoría C3.

En cambio, la figura 2 muestra las producciones de dos alumnos en la segunda tarea, *Juego de contienda*, y en la tercera tarea, *Lanzar monedas*. Ambas son consideradas dentro de la categoría C2 pues, aunque construyen el árbol correctamente y asignan, de alguna manera, un resultado a cada una de las alternativas, un alumno sólo da los pagos para uno de los jugadores y el otro indica el jugador que sale vencedor en la contienda.

Tabla 2. Niveles de categorías

Categorías	Indicadores
C 0	Deja en blanco la actividad.
C 1	C 1.1. Construye el árbol incorrectamente.
	C 1.2. Da una respuesta utilizando una herramienta distinta (cuadro).
C 2	C 2.1. Construye el árbol pero no indica los pagos o lo hace mal.
	C 2.2. Construye el árbol e indica el jugador ganador.
	C 2.3. Construye el árbol e indica sólo uno de los pagos en todos o alguno de los resultados.
C 3	Construye el árbol e indica los pagos para ambos jugadores.

Figura 1. Aportación de un alumno considerada en la categoría C3

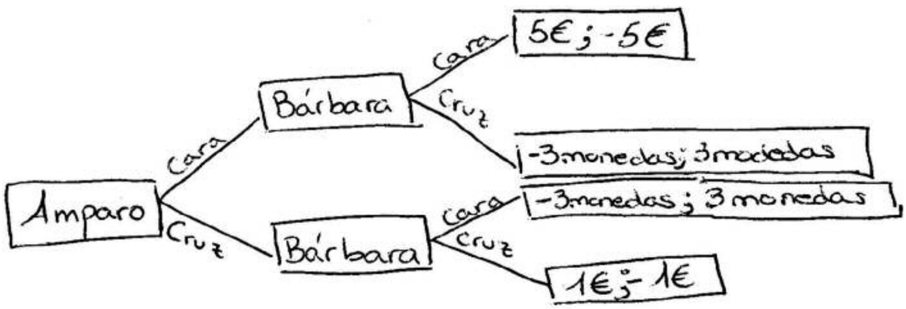
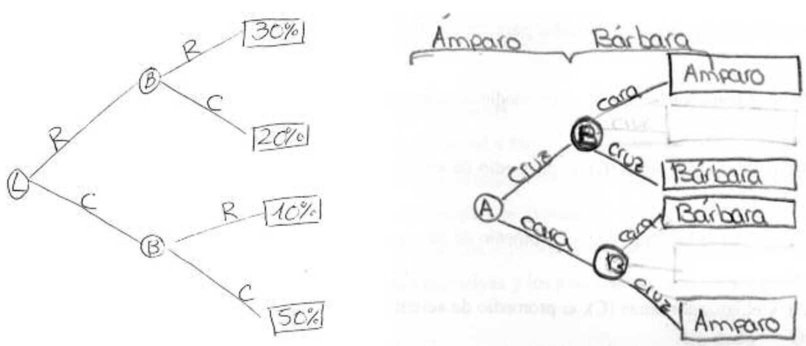


Figura 2. Aportaciones de alumnos consideradas en la categoría C2



RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los resultados obtenidos del análisis de los datos se presentan desde tres puntos de vista distintos. Primero se hace un análisis pormenorizado de las tareas, utilizando las categorías señaladas anteriormente, para luego realizar un análisis cualitativo de las estrategias propuestas y los errores cometidos por los alumnos. En tercer lugar, se realiza un análisis de la construcción del árbol de juegos según el nivel educativo de los alumnos.

Resultados de las tareas según categorías

Al analizar las respuestas dadas por los alumnos en las cuatro tareas utilizando la clasificación por categorías presentada anteriormente en la tabla 2, se obtienen los resultados recogidos en la tabla 3, según porcentaje de alumnos situados por categorías.

Tabla 3. Porcentajes de alumnos según las categorías en las tareas

Categorías	C 0	C 1		C 2			C 3
		C 1.1.	C 1.2.	C 2.1.	C 2.2.	C 2.3.	
Piedra, papel o tijera	0	19	0	23	6	21	31
Juego de contienda	27	23	6	6	0	36	2
Lanzar monedas	17	31	0	8	2	6	36
Sumar números	35	28	0	6	2	6	23

En la tabla 3, se observa cómo, en general, hay un porcentaje importante de alumnos situados en las categorías C2 y C3. Es decir, construyen el diagrama de árbol alrededor de 40%, contando los alumnos situados en las dos categorías más altas, C2 y C3. Sin embargo, si se considera sólo la categoría C3, esto es, construir el árbol y asignar los pesos adecuadamente, este porcentaje baja de manera significativa. Hay que resaltar el caso del *Juego de contienda,* en el que solo 2% de los alumnos lo hace correctamente; esto se debe a que, en su mayoría, no asignan pagos a ambos jugadores y se limitan a hacerlo sólo a uno, como se ilustra en la figura 2.

Otro aspecto por señalar es el porcentaje de alumnos que dejan en blanco las tres últimas tareas. Además, como se observa en los porcentajes, este hecho no tiene que ver con el orden o la estructuración de las tareas, sino con la semejanza que tiene la tarea de *Lanzar monedas* con la situación resuelta al principio de la actividad *Pares y nones* mostrada como ejemplo.

Presentación y análisis de cada una de las tareas

Juego Piedra, papel o tijera

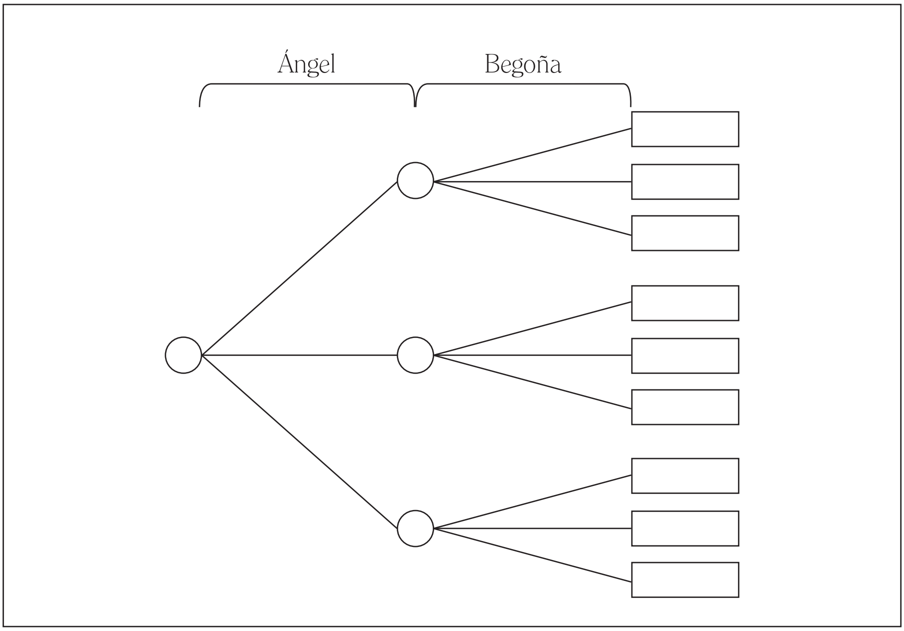
La tarea II, *Piedra, papel o tijera*, corresponde a uno de los más populares juegos de enfrentamiento y es conocido universalmente (Fisher y Ryan, 1992). Normalmente se utiliza para asignar un orden entre los jugadores, aunque en la tarea que se les presenta a los alumnos, recogida en el cuadro 2, muestra una variante del juego.

Cuadro 2. Tarea II. *Piedra, papel o tijera*

Ángel y Begoña pronuncian simultáneamente una de las tres palabras o hacen un signo equivalente (piedra (P) = puño cerrado; papel (M) = mano extendida; tijera (T) = dos dedos), de forma que el que gane recibe un euro del otro.
Las reglas de este juego son:

- El papel le gana a la piedra, porque la envuelve.
- La piedra le gana a las tijeras, porque las mella.
- Las tijeras le ganan al papel, porque lo corta.

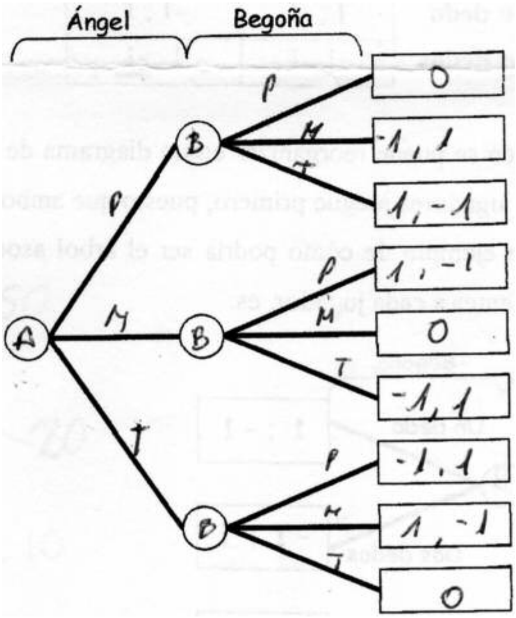
Si ambos muestran o dicen lo mismo, entonces hay un empate y ninguno ganaría nada.
a) Completa el siguiente árbol con la información anterior:



La tarea se presenta a los alumnos de manera estructurada. Además del enunciado que describe la situación de enfrentamiento, aparece el esquema de un diagrama de árbol que corresponde al juego. Es decir, se muestra claramente el modelo que han de seguir para resolver la cuestión planteada. Los alumnos deben, simplemente, rellenar el árbol con las estrategias y los pagos para cada uno de los jugadores. Los resultados muestran que ninguno de los alumnos que participan en la experiencia deja de intentar completar el esquema. Hay un porcentaje próximo a 20% que es incapaz de razonar sobre el modelo. Es decir, son incapaces de extrapolar o reproducir la situación que se les plantea como ejemplo en la tarea I de *Pares y nones* a la tarea II. El error más común se debe a que colocan las estrategias del primer jugador en los nodos del árbol, lugar destinado al segundo jugador y que designa su conjunto de información en ese momento del juego.

Dentro de las respuestas correspondientes a la categoría C2, destaca un importante número de alumnos que no indican el pago para un jugador, sino que utilizan una notación mixta. En la figura 3 se muestra la respuesta de un alumno con estas características.

Figura 3. Aportación de un alumno con problemas de notación



Se encuentra que 19 de los 52 alumnos indican correctamente el pago para ambos jugadores, salvo en el caso en el que ninguno de los dos gane, situación que señalan con un único cero o escribiendo la palabra: *empate*. Se pueden entender estas respuestas de los alumnos como un intento de economizar en sus producciones, puesto que juzgan que es suficiente con indicar de esta manera que no hay una relación ganancia-pérdida entre los jugadores.

Juego de contienda

Esta tarea III, *Juego de contienda,* se basa en un deporte conocido, el beisbol, aunque no necesariamente muy practicado en España. El beisbol tiene una gran presencia en la cultura estadounidense, que a su vez marca una importante influencia en las sociedades occidentales, y por eso la situación que se presenta a los alumnos no les resulta totalmente desconocida. La tarea tal y como se muestra a los alumnos se recoge en el cuadro 3.

Cuadro 3. Tarea III. *Juego de contienda*

Un determinado Lanzador (L) de béisbol puede lanzar una bola rápida o una curva, luego tiene dos estrategias: lanzar rápida (R), o curva (C). Este lanzador tiene que enfrentarse a un Bateador (B), el cual intentará adivinar antes de cada lanzamiento si la bola será rápida o curva. Luego, también el bateador tiene dos estrategias puras, que serán: adivinar rápida (R), o curva (C).
Además, se conocen los porcentajes de acierto del bateador para cada golpe, de modo que tenemos los siguientes datos:

- Si el bateador adivina (R) y el lanzador lanza (R), el promedio de acierto es de 30%.
- Si el bateador adivina (R) y el lanzador lanza (C), el promedio de acierto es de 20%.
- Si el bateador adivina (C) y el lanzador lanza (R), el promedio de acierto es de 10%.
- Si el bateador adivina (C) y el lanzador lanza (C), el promedio de acierto es de 50%.

b) Construye el árbol correspondiente a este juego de contienda.

La tarea III está parcialmente estructurada, ya que en el enunciado aparecen todas las posibles combinaciones entre las acciones del *bateador* y el *lanzador,* así como el porcentaje de acierto para el bateador en cada caso. El proceso de razonamiento sobre el modelo que se plantea es más complejo que en la tarea II, ya que ahora son los alumnos los que tienen que construir el árbol que refleje la situación que se formula en el enunciado. Los resultados son aceptables, ya que, al observar la tabla 3, se obtiene un porcentaje de alumnos de 44%, correspondiente a las categorías C2 y C3, que construye el diagrama correctamente. Sin embargo, no son capaces de cerrar por completo el modelo que se les da en un principio, puesto que esto sólo lo consigue 2% de los alumnos (C3). En este punto, los alumnos obvian señalar los pagos (porcentajes de acierto) para los dos jugadores y se ciñen solamente a indicar el porcentaje que aparece en el enunciado, con lo que su respuesta cae dentro la categoría C2.3. Esta divergencia de las respuestas de los alumnos con respecto al resultado esperado no se encuentra en la construcción del diagrama de árbol y la asignación de los pagos, sino en la evaluación que los alumnos hacen de la solución que han dado. En las tareas que han visto hasta el momento, se señalaba claramente que había que escribir los pagos para ambos jugadores, pero en esta tarea sólo uno de los alumnos lo hace. Se trata de un hecho tan generalizado que cabe pensar que se debe a la concepción que los alumnos tienen del porcentaje. Es decir, al aparecer un porcentaje de aciertos de 30% para uno de los jugadores, los alumnos entienden como evidente que el porcentaje para el otro jugador es de 70% y ven como innecesario señalarlo en el diagrama. Se trata de una circunstancia paradójica, puesto que 14 de los alumnos que dan esta respuesta resuelven correctamente alguna de las dos tareas posteriores asignando pagos para los dos jugadores.

La problemática anterior y la descrita en los resultados de la tarea II, cuando los alumnos economizan sus respuestas escribiendo un único cero o *empate*, se puede interpretar como un ahorro de ostensivos por parte de los alumnos. Se entiende por ostensivos cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro, es decir, son representaciones (notación, símbolos, gráficas,...) del pensamiento y la acción de un sujeto (Godino, Batanero y Font, 2008). Luego, el hecho de que un alto número de alumnos señale sólo los pagos para uno de los jugadores o los englobe en una respuesta única se debe posiblemente a que entienden como suficientes estos ostensivos para reflejar el proceso mental que los ha llevado a la solución del problema.

Lanzar monedas

El uso de monedas para dirimir situaciones en las que el azar desempeñe un papel predominante es incuestionable. En esta tarea IV de *Lanzar monedas*, al clásico empleo que se hace de las monedas se le añade un premio o pérdida asociado que, además, no es simétrico como cabría esperar. La tarea que se presenta a los alumnos se recoge en el cuadro 4.

La estructuración previa en el enunciado desaparece en esta tarea, es decir, el grado de libertad es superior al que hasta ahora se les había presentado a los alumnos en los tres juegos previos. Ahora deben analizar el enunciado en busca de las estrategias de los jugadores y de los pagos que le corresponden a cada uno de ellos.

Aplicar el modelo utilizado en los casos anteriores no les debe resultar tan simple; sin embargo, esta tarea es la segunda actividad que intentan resolver

Cuadro 4. Tarea IV. *Lanzar monedas*

Amparo y Bárbara muestran las dos a la vez la cara (C) o la cruz (X) de una moneda. De esta forma, si aparecen dos caras, Bárbara le paga 5 euros a Amparo; si aparecen dos cruces, Bárbara le paga 1 euro a Amparo; y si aparecen una cara y una cruz, entonces Amparo le paga 3 monedas a Bárbara. c) Construye el árbol asociado:

un mayor número de alumnos. También es significativo que sea la que tiene el índice de acierto (36%) mayor de las tareas que se les proponen a los alumnos para resolver. El motivo de este éxito puede deberse a la semejanza que presenta esta tarea de *Lanzar monedas* con el ejemplo de *Pares y nones* que aparece al principio de la actividad. Es posible que la asociación mental de conceptos que tienen que hacer en esta tarea IV para aplicar el modelo con el que se está trabajando en toda la actividad les resulte más sencilla y también es cierto que estos dos juegos I y IV son dos versiones de un mismo tipo de enfrentamiento.

Sumar números

La última tarea propuesta a los alumnos, que además es la que presenta mayor grado de libertad con un enunciado más complejo, es una versión del juego de *Pares y nones* en la que los jugadores tienen tres elecciones posibles y donde los pagos que reciben están ligados al valor que elijan. En el cuadro 5 se recoge la tarea V, *Sumar números*, tal como se les presenta a los alumnos.

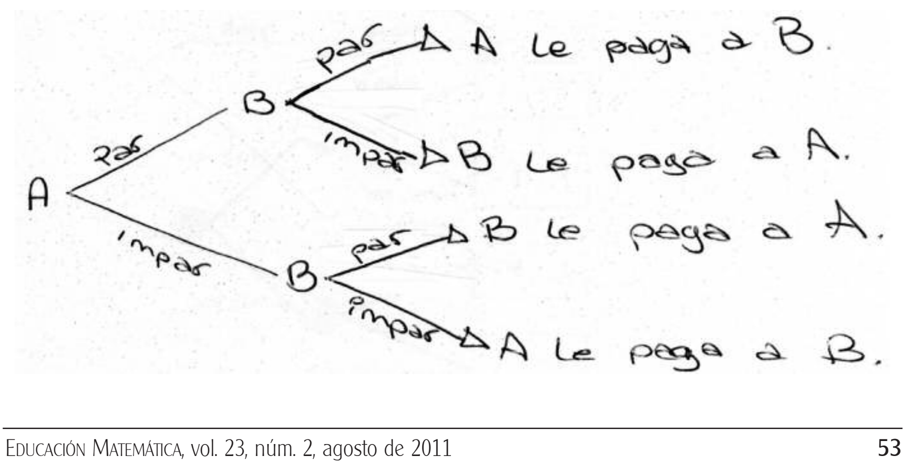
En las producciones escritas de los alumnos se observa que la tarea V es la que más dejan en blanco o contestan incorrectamente. La justificación de este resultado se puede deber a dos aspectos distintos. Por un lado, es la última tarea y a los alumnos sólo se les dio una sesión de clase para realizarla, por lo que posiblemente no les alcanzó el tiempo. Y por otro lado, como se ha señalado, el enunciado es más complejo, está más abierto a las interpretaciones y es más impersonal que las anteriores, puesto que desaparecen los nombres de los jugadores y sólo se indican con iniciales. Se mezclan conceptos que han de con-

Cuadro 5. Tarea V. *Sumar números*

> Dos jugadores A y B escriben en su cuaderno, de manera independiente y al mismo tiempo, uno de estos números: 1, 4 o 7. Si la suma de los números que escriben es un número par, A le paga a B esa cantidad de euros, y si la suma es un número impar, B le paga a A esa cantidad de euros.
>
> d) Construye el árbol asociado:

siderar conjuntamente para dar una respuesta correcta: suma de números, resultados pares o impares, estrategias de cada jugador. El aumento del número de estrategias para cada jugador complica la reorganización del modelo que se les propone. Aunque han visto un caso similar en la tarea *Piedra, papel o tijera,* no han sido ellos mismos los que han construido el árbol y hasta ahora se han limitado a reproducir una misma estructura básica de diagrama de árbol cambiando las estrategias y los pagos según correspondiese. Así, hay alumnos que han identificado como estrategias de los jugadores elegir un número par o impar en lugar de los números señalados. Se trata de un intento de forzar el modelo que estaban usando a la nueva tarea y no de adecuarlo a las nuevas circunstancias, es decir, no son capaces de analizar la solución que han dado y contrastarla con el enunciado propuesto. La figura 4 muestra la aportación de un alumno que ha cometido este fallo al trasladar el modelo a la nueva tarea.

Figura 4. Aportación de un alumno con problemas de aplicación del modelo



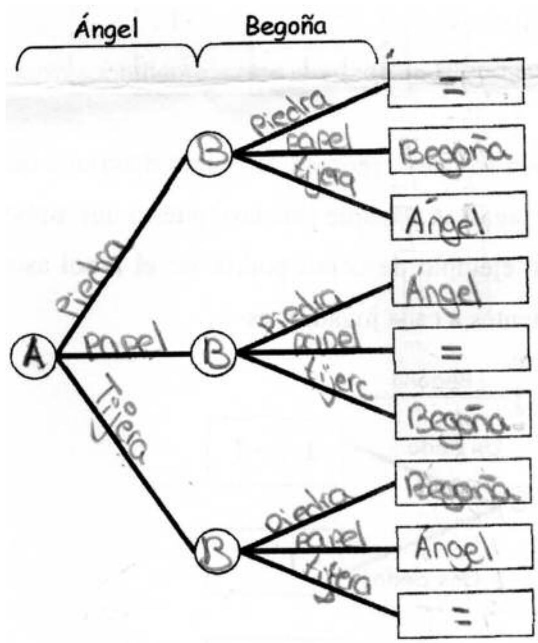
Resultados según un análisis cualitativo

Cuando se analizan las producciones, se encuentran varias situaciones en las soluciones aportadas que aparecen en un número significativo de alumnos y que a continuación se comentan y marcan en cursiva.

Hay un número notable de alumnos que presentan *problemas de notación* a la hora de señalar los pagos para los dos jugadores en cada uno de los resultados. Destacan las aportaciones que hacen algunos alumnos que identifican correctamente al ganador en cada una de las opciones, pero que en lugar de indicar los pagos numéricos que le corresponden, lo que escriben es el *nombre del jugador* correspondiente. Es el caso de la respuesta de un alumno que aparece en la figura 5.

La falta de una respuesta numérica en estos casos parece indicar una comprensión superficial de los enunciados. Es decir, comprenden la situación de juego y las reglas que la rigen, pero son incapaces de asignar un valor numérico a las ganancias o pérdidas de los jugadores en cada posible resultado. De esta

Figura 5. Aportación de un alumno con problemas de notación

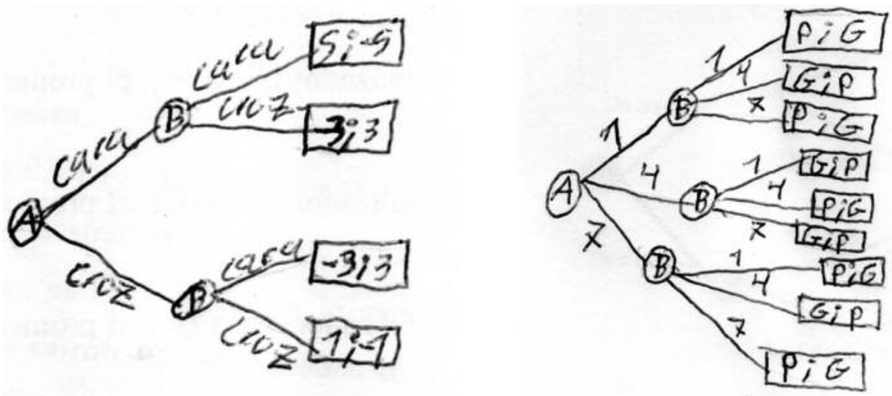


manera, los alumnos pierden gran parte de la riqueza presente en estas tareas, puesto que en la mayor parte de los casos cada rama u opción lleva a pagos distintos y no simétricos, lo que en definitiva conduce al estudio de la mejor elección para cada jugador.

De especial importancia es, también, *la inconsistencia* que presentan algunos alumnos cuando van resolviendo las distintas tareas que conforman la actividad. En sus producciones, se puede observar claramente cómo han resuelto de manera correcta las tareas hasta que, llegado un cierto punto, dejan de hacerlo y comienzan a dar respuestas incorrectas. La figura 6 presenta las aportaciones de un mismo alumno en dos tareas consecutivas que ilustran la situación de estos casos.

Los árboles de la figura 6 corresponden a las tareas *Lanzar monedas* y *Sumar números*, respectivamente, obtenidos de la respuesta de un mismo alumno. En ellos se observa como éste da una respuesta totalmente correcta en un primer momento, construye el árbol y asigna pagos para los jugadores en la tarea IV y, sin embargo, después sólo construye el árbol e identifica al jugador ganador en cada posible resultado, sin señalar los pagos numéricos correspondientes en la tarea V. Esta situación es paradójica, puesto que los enunciados de ambas tareas no difieren en tal medida como para que se dé esta incongruencia en las respuestas.

Figura 6. Aportaciones de un alumno con problemas de inconsistencia



Otra incoherencia en las respuestas de los alumnos es la que se ilustra en la siguiente figura 7, que muestra un árbol dividido por sus ramas sin una raíz.

Figura 7. Aportación de un alumno de un árbol sin raíz

El contrasentido surge del hecho de que los alumnos que actúan como el ilustrado en la figura 7, primero, han visto en la actividad dos ejemplos previos de árbol completo con raíz y, segundo, en alguna de las otras tareas construyen el árbol correctamente. Este error de construir *árboles sin raíz* no es exclusivo del tipo de tareas que se presentan aquí, sino que aparece de manera recurrente en los problemas de combinatoria y de probabilidad cuando se utiliza el diagrama de árbol como herramienta de resolución. Los alumnos que cometen este error no han sido capaces de desvincularse de la simultaneidad de los sucesos (tirar monedas, mostrar dedos) y estructurarlos de manera ordenada y sistemática para su análisis exhaustivo a través de un árbol.

Otro tipo de dificultad, relacionada con los conocimientos previos de los alumnos, aparece porque tienen asimilado el uso de los diagramas de árbol para combinatoria. Así, *confunden las elecciones con los electores,* debido a lo cual construyen diagramas más extensos de lo necesario. Un ejemplo de esta confusión se muestra en la última tarea V, *Sumar números*. Al aparecer tres posibles valores numéricos de elección, construyen el árbol con un nivel de más, tal como se recoge en la figura 8.

Por último, de entre las aportaciones que hacen los alumnos, es interesante resaltar el uso que hacen algunos de ellos de las *tablas,* aun cuando en la tarea no se pide. Como se muestra en la figura 9, hay varios alumnos que las utilizan para apoyar sus respuestas dadas en forma de árbol o para realizar un análisis más concreto de las tareas.

El uso más significativo que los alumnos le dan a las tablas es el de considerarlas como una respuesta válida para la tarea que se les ha presentado. Son aportaciones que describen o resuelven la situación que se plantea, pero que no se ajusta a la respuesta esperada, como la que se ilustra en la figura 10.

En cierta manera, se puede considerar que estos alumnos han interiorizado una herramienta de resolución de problemas como es la tabla, pero no son capaces

Figura 8. Aportación de un alumno con influencias de combinatoria

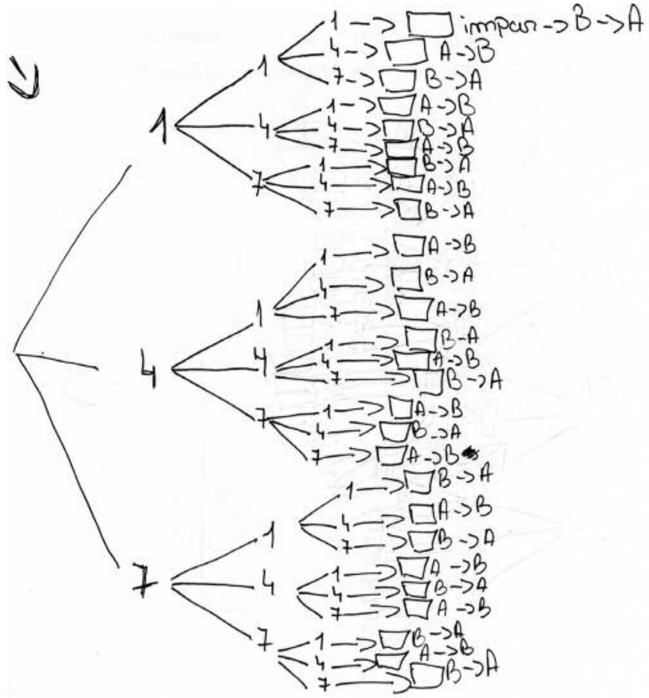


Figura 9. Aportación de un alumno combinando tabla y árbol

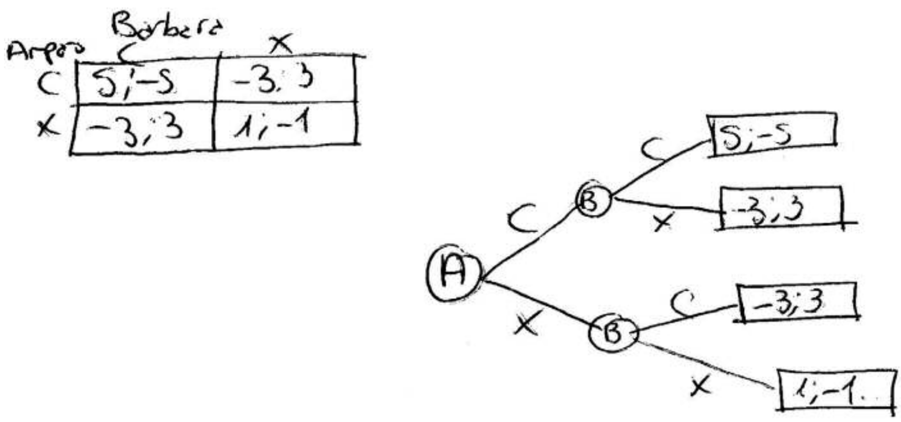
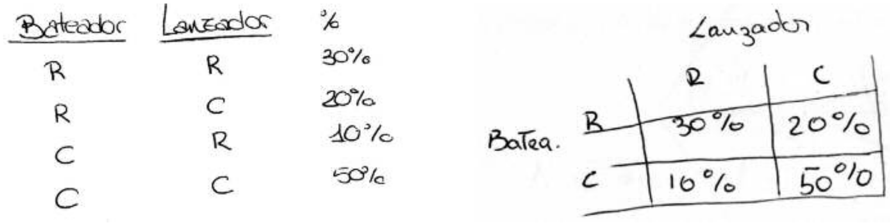


Figura 10. Aportaciones de alumnos que usan tablas



de utilizar otra tan íntimamente relacionada con ella como es el diagrama de árbol y realizar la transposición necesaria entre ambas herramientas.

Resultados según el nivel de los alumnos

Los resultados de los alumnos en los distintos centros de secundaria donde se realiza la experiencia son bastante análogos, aunque cuando se atiende el nivel educativo de los alumnos, se encuentra que hay disparidad en las producciones. La tabla 4 recoge una comparativa entre los tres niveles, contabilizando el porcentaje de aciertos al completar o construir el árbol de decisión en cada una de las tareas que corresponden a las categorías de respuesta C2 y C3 y que se relacionan con las componentes citadas en Reeff *et al.* (2006).

Tabla 4. Porcentaje de alumnos según nivel y por tarea

	Tarea II Piedra, papel o tijera	Tarea III Juego de contienda	Tarea IV Lanzar monedas	Tarea V Sumar números
4º ESO (15-16 años)	74	52	57	48
3º ESO (14-15 años)	100	33	53	40
2º ESO (13-14 años)	71	43	43	14

La tarea II, que consiste en completar el árbol de decisión, presenta un alto grado de acierto, sobre 70% o superior en todos los cursos, incluso con mejores resultados para los alumnos de 14-15 años que para los de 15-16 años. En las tareas que implican la construcción del árbol de decisión, es decir, las tres últimas, se observa cierta relación entre el nivel educativo y el grado de realización de las tareas. Así, el porcentaje de alumnos de 4º ESO (15-16 años) que construyen el árbol correctamente es superior en todas las tareas al de los otros dos cursos, y los alumnos de 3º ESO (14-15 años) lo hacen mejor que los de 2º ESO (13-14 años) en dos de esas tres tareas.

Otros datos que no están recogidos en el cuadro 4, pero que se observan en las producciones escritas, es que los alumnos mayores, 15-16 años, suelen trabajar más tareas que los de cursos inferiores. Así, de estos alumnos, 9% del total deja en blanco alguna de las actividades, mientras que los alumnos de menor edad dejan de contestar dos de las tareas en un porcentaje más elevado, superior a 35%. En cuanto a las causas de este abandono en el proceso de realización de la actividad, se pueden citar dos. Primero, las características del alumnado de 2º ESO (13-14 años) y 3º ESO (14-15 años) hacen que les falte tiempo, ya que todavía no han adquirido hábitos de trabajo efectivos y tardan más en ponerse a trabajar que el alumnado de mayor edad, 4º ESO (15-16 años), que están a punto de dejar la enseñanza obligatoria. Y segundo, puesto que en la secuenciación de las tareas se van eliminando las referencias numéricas y se centran en la comprensión del enunciado, el grado de complejidad en los enunciados se eleva en las tareas finales, lo que exige un grado de competencia lingüística superior, que está más al alcance de los alumnos de mayor edad.

CONCLUSIONES

La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas que sirve para estudiar el comportamiento racional en situaciones de conflicto. Intenta mostrar cómo deben actuar dos individuos que compiten para lograr la ventaja máxima para sí mismos. En este estudio con estudiantes de secundaria obligatoria, jóvenes de entre 13 y 16 años, se espera determinar si son capaces de de tener en cuenta todas las estrategias posibles, ayudados del diagrama de árbol, y asignar el pago esperado en cada estrategia.

El número de alumnos que ha participado en esta experiencia, los distintos niveles y el hecho de que la experiencia la llevan a sus aulas varios profesores en distintos centros sugiere que los resultados pueden llegar a ser similares con otros alumnos. Hay que señalar que varios de los juegos son muy conocidos, tanto por alumnos como por profesores, lo que supone un incentivo al ponerlos en práctica en las clases de matemáticas.

El éxito de esta propuesta para resolver situaciones de conflicto está en la relación entre los juegos de estrategia y la teoría del comportamiento social. La propuesta se puede trabajar en la Resolución de Problemas del currículo de Matemáticas en la Educación Secundaria. La idea subyacente es que los alumnos sean capaces de utilizar el diagrama de árbol como una herramienta de su vida cotidiana cuando se enfrenten a situaciones de conflicto, es decir, que usen el árbol para visualizar todas las opciones y caminos en la búsqueda y elección del mejor resultado posible. De esta manera, los alumnos tendrían una prueba matemática que sustentase sus argumentaciones a la hora de justificar la solución de los problemas que les puedan surgir en su vida adulta.

Este tipo de actividad, apoyada en la Teoría de Juegos, constituye un marco novedoso para trabajar con los alumnos, a fin de que, al finalizar su periodo educativo, sean competentes matemáticamente. Se promueve principalmente el desarrollo de las siguientes subcompetencias o procesos generales propuestos por PISA: *comunicar,* entender enunciados de otras personas en forma oral y escrita; *modelar,* traducir la realidad a una estructura matemática e interpretar los modelos matemáticos en términos reales: trabajar un modelo matemático; *resolver problemas,* resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías; *representar,* decodificar, interpretar y distinguir entre distintos tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones; y *uso de herramientas y recursos,* utilizar los recursos y herramientas familiares en contextos, modos y situaciones que son distintos del uso con el que fueron presentados (Rico, 2006).

A modo de conclusión, el diagrama de árbol es una de las herramientas que permite estudiar las diferentes estrategias que tiene cada una de las personas que compiten por un mismo fin. Por ello, el primer objetivo de la experiencia es determinar la capacidad de los estudiantes para interpretar y construir diagramas de árbol que modelen juegos conocidos y asignar pagos. El estudio realizado indica que los alumnos de secundaria han sido capaces de:

- Dibujar el árbol de decisión de un juego y que sus construcciones son más correctas y precisas según aumenta el nivel o la edad de los estudiantes.
- En sus producciones, se manifiesta una fuerte influencia de sus conocimientos previos de los diagramas de árbol en combinatoria y probabilidad.

- Las principales deficiencias se observan cuando los alumnos intentan asignar pagos a las distintas estrategias de los jugadores, que en parte se pueden entender como un ahorro en el uso de ostensivos en sus producciones.

En cuanto al segundo objetivo de esta experiencia, desarrollar el pensamiento racional y estratégico en estudiantes de secundaria, se trata de un objetivo a más largo plazo que por ahora es imposible saber si se alcanza con una experiencia tan delimitada. Pensamos que se puede incentivar con actividades como la recogida en este estudio y otras similares que hemos desarrollado (Antequera y Espinel, 2003, 2011; Espinel y Antequera, 2008) sobre conceptos propios de la Teoría de Juegos. Puesto que se supone que las personas hacen uso del mejor comportamiento racional posible, obtendrán, por tanto, el mejor resultado posible.

NOTA

Esta investigación ha sido realizada en el marco del proyecto de Investi-gación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, programa del Plan Nacional de I+D+I).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Antequera, A. T. y M. C. Espinel (2003), “Decisiones estratégicas y de cooperación desde las Matemáticas”, *Números*, Revista de la SCPM Isaac Newton, núm. 53, pp. 15-27.

——— (2011), “Analysis of a teaching experiment on fair distribution with secondary school students”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 42, núm. 2, pp. 213-228.

Bailo, C., R. Casals, A. Gema y J. Tuderi (1997), *Educación Secundaria Obligatoria, 1º y 4º*. Barcelona, Teide.

Binmore, K. (1990), *Teoría de Juegos*, Madrid, McGraw Hill.

Crisler, N. y G. Froelich (2006), *Discrete Mathematics through applications*, Nueva York, W. H. Freeman.

COMAP (1999), *Las matemáticas en la vida cotidiana*, Madrid, Addison-Wesley/ Universidad Autónoma de Madrid.

Dixit, A. K. y B. J. Nalebuff (1986), *Pensar estratégicamente,* Barcelona, Antoni Bosch.
Engel, A., T. Varga y W. Walter (1976), *Hasard ou strategie?,* París, OCDL.
Espinel, M. C. y A. Antequera (2008), "The decision-making as a school activity", en Topic Study Group 19 of ICME, *Research and development in problem solving in mathematics educations,* 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, México. Disponible en: http://tsg.icme11.org/tsg/show/20. Revisado: 6 de junio de 2011.
Fischbein, E. (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children,* Dordrecht, Reidel.
Fisher, D. C. y J. Ryan (1992), "Optimal Strategies for a Generalized 'Scissors, Paper, and Stone' Game", *The American Mathematical Monthly,* vol. 99, núm. 10, pp. 935-942.
Godino, J. D., C. Batanero y V. Font (2008), *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemática,* versión ampliada y revisada del artículo de J. D. Godino, C. Batanero y V. Font (2007), "The onto semiotic approach to research in mathematics education", *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* vol. 39, núms. 1-2, pp. 127-135. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm. Revisado: 6 de junio de 2011.
Grupo Cero (1982), *Matemáticas de Bachillerato. Curso 1,* Barcelona, Teide.
Körner, C. (2005), "Concepts and misconceptions in comprehension of hierarchical graph", *Learning an Instruction,* núm. 15, pp. 281-296.
Moliner, M. (2001), *Diccionario de uso del español,* edición electrónica (versión 2.0) de la 2ª edición del *Diccionario de uso del español* de María Moliner, Madrid, Gredos.
Niss, M. (2004), *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM Project.* Disponible en: http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf. Revisado: 6 de junio de 2011.
OCDE (2004), *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003,* París, OCDE.
——— (2006), *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura,* España, Santillana Educación.
Parks, H., G. Musser, R. Burton y W. Siebler (2000), *Mathematics in Life, Society, & the World,* New Jersey, Prentice Hall.
Pluvinage, F. (2005), "Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime),* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, México, vol. 8, pp. 91-99.

Polya, G. (1945), *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas.

Reeff, J. P., A. Zabal y C. Blech (2006), *The Assessment of Problem-Solving Competencies. A draft version of a general framework*, Deutsches Institut für Erwachsenenbildung. Disponible en: http://www.die-bonn.de/esprid/dokumente/doc-2006/reeff06_01.pdf. Revisado: 6 de junio de 2011.

Rico, L. (2006), "La competencia matemática en PISA", *PNA*, vol. 1, núm. 2, pp. 47-66.

Rivera-Marrero, O. (2007), *The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses*, tesis de doctorado, Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia. Disponible en: http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-04252007-140123/unrestricted/DM-Dissertation-Olgamary-May2007.pdf. Revisado: 6 de junio de 2011.

Rosentein, J. G., D. S. Franzblau y F. S. Robert (1997) (eds.), *Discrete Mathematics in the Schools*, DIMACS Series in Discrete Mathematics Computer Science, vol. 36, Providence, RI, American Mathematical Society (AMS). Disponible en: http://dimacs.rutgers.edu/Volumes/Vol36.html. Revisado: 6 de junio de 2011.

Schoenfeld, A. H. (1992), "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, sense-making in mathematics", en D. Grouws (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Macmillan, pp. 334-370.

Sicilia, J. y C. González-Alcón (2000), "Teoría de juegos: la matemática del conflicto", en A. Martinón (ed.), *Las matemáticas del siglo XX*, Madrid, Nivola, pp. 263-266.

Zagare, F. C. (1989), "The Mathematics of Conflict", *HiMAP Module 3*. Disponible en: www.comap.com. Revisado: 6 de junio de 2011.

DATOS DE LAS AUTORAS

Ana Teresa Antequera Guerra
IES El Paso, Tenerife, España
aantegue@yahoo.es

María Candelaria Espinel Febles
Departamento de Análisis Matemático,
Facultad de Matemáticas, Universidad de La Laguna, Tenerife, España
mespinel@ull.es