Marmolejo Avenia, Gustavo Adolfo; Vega Restrepo, Myriam Belisa
La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje
Educación Matemática, vol. 24, núm. 3, diciembre, 2012, pp. 7-32
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje[1]

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia y Myriam Belisa Vega Restrepo

Resumen: Si bien las figuras geométricas son un importante soporte intuitivo para el desarrollo de actividades geométricas, no es obvio ni espontáneo que en la resolución de un problema matemático los educadores y estudiantes hagan de ellas elementos claves para realizar exploraciones heurísticas. Por el contrario, múltiples investigaciones evidencian la complejidad de tal aprovechamiento y el requerimiento de un aprendizaje específico. En este artículo se destacan, entre otros, los procedimientos –cognitivamente potentes y económicos– realizados por un grupo de estudiantes que, habiendo participado de una secuencia de enseñanza sobre maneras de transformar figuras geométricas, luego realizaron actividades de comparación de figuras según sus cantidades de área.

Palabras Clave: visualización, figuras geométricas, aprehensión operatoria, configuración, visibilidad.

The display in the geometric figures. Importance and complexity

Abstract: Although geometric figures are an important intuitive support for the development of geometric activities, it is not obvious or spontaneous for teachers and students to make them key elements of heuristics exploration in the resolution of mathematical problems. By contrast, many investigations show the complexity of this type of use and the requirement of a specific learning. This article is outlined, between others, powerful and economic cognitively procedures, they were maid by a group of students that participated in an education sequence, about some ways to transform geometric figures, then they realized activities of figures comparison according to their area quantities.

Key words: visualization, geometric figures, operative apprehension, configuration, visibility

Fecha de recepción: l de junio de 2012. Fecha de aceptación: 30 de octubre de 2012.

[1] Una versión previa, parcial y simplificada de este documento se publicó como Marmolejo, G. y Vega, M. (2005). Geometría desde una perspectiva semiótica: Visualización, figuras y áreas, en *Memorias XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y III Encuentro de Aritmética* (Tomo II). (661-693). Bogotá, Colombia.

INTRODUCCIÓN

La historia de las matemáticas entre los siglos XVII y gran parte del XX puso en evidencia una “desvisualización” o “desespacialización” en la geometría (Davis, 1993). Esa tendencia a dejar de lado la visualización se debió no solo a que no se la consideró necesaria, sino a que se la supuso un obstáculo para el desarrollo de las matemáticas. La aparición de los computadores gráficos y de los programas informáticos, junto al desarrollo de estudios sobre el funcionamiento de la mente, hicieron que el interés de los investigadores en el campo de la educación matemática por el papel e importancia que juega la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas creciera en los últimos decenios (Presmeg, 2006). Muchos investigadores de finales del siglo XX, entre los que destacamos a Zimmerman y Cunnighan (1991), afirmaron que estaban viviendo una etapa de renacimiento de la visualización. En la actualidad, existe una tendencia cada vez más fuerte a reconocer la gran importancia y el especial interés de la visualización en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas (Villani, 1998; Arcavi, 2003; Duval, 2003; Presmeg, 2006).

La visualización tiene matices y características diferentes según el tipo de representación semiótica[2] que se considere (Duval; 1988a, 2003). En nuestra investigación la atención recae en la visualización asociada a las figuras geométricas de naturaleza bidimensional. Asumimos que la visualización es una actividad cognitiva compuesta por dos maneras de proceder sobre las figuras geométricas: una, la acción de discernir en una figura geométrica inicial (figura de partida) las transformaciones que permiten modificarla en otra (figura de llegada) (Duval, 2003); y dos, los cambios de focalización aplicados sobre la figura, sub-figuras y/o sub-configuraciones que conforman la figura de partida y que han de considerarse en el desarrollo y comprensión de la tarea propuesta.

Como lo indica una exhaustiva revisión de la literatura especializada, son enormes y variados los aportes que la investigación en educación matemática ha realizado en torno a la visualización. Entre ellos destacan, por su cantidad, los estudios sobre el papel que desempeña la visualización de las figuras geométricas en el desarrollo de otras actividades cognitivas, por ejemplo, el

[2] “Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas... permiten una mirada del objeto a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos...) que tienen el valor de significantes” (Duval, 1999: 34). Las figuras geométricas, los gráficos cartesianos, los esquemas, la escritura aritmética y algebraica, las tablas son algunas de las representaciones semióticas de mayor uso en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

razonamiento deductivo (Sánchez, 2003), la argumentación (Mezquita, 1989) y la modelación (Ribera y Becker, 2008) y aquellos que procuran dar cuenta del papel de la visualización en el desarrollo de conceptos matemáticos en contextos educativos, por ejemplo, la homotecia (Lemonidis, 1991) y el área (Outherd y Mitchelmore , 2000). Hay, además, serios estudios sobre la incidencia que pueden tener los educadores en el desarrollo cognitivo gracias al uso de elementos visuales por parte de sus estudiantes (Presmeg, 1986; Markovits, Rosenfeld y Eylon, 2006) y otros más que se interesan por el papel que juegan los materiales didácticos en entornos informáticos en el desarrollo de la visualización (Kordaky, 2003). También hay estudios respecto a cómo los manuales escolares promueven o inciden en el aprendizaje de la visualización (Marmolejo y González, 2012).

Sin embargo, aún son incipientes los estudios que exploren la pertinencia y necesidad de constituir la visualización como objeto de la enseñanza en reconocimiento de que se trata de una actividad cognitiva que, de no orientarse adecuadamente, puede dificultar aún más el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, Villani (1998) y Presmeg (2006) hacen un urgente y reiterativo llamado a la comunidad educativa para convertir esta actividad cognitiva en objeto de enseñanza explícito en los currículos escolares. Duval (1999) y Markovits, Rosenfeld y Eylon (2006), por su parte, ponen en evidencia que las figuras geométricas, como potentes herramientas heurísticas en la resolución de problemas matemáticos, están lejos de ser un asunto obvio y espontáneo tanto para los estudiantes como para los educadores. En un sentido distinto, Clements, Swaminathan, Zeitler y Sarama (1999), Moriena y Scaglia (2003) y Walcott, Mohr y Kastberg (2009) muestran las dificultades que tienen los estudiantes para discriminar y clasificar figuras bidimensionales. Así mismo, se ha reportado la existencia de factores que facilitan o dificultan la visualización tanto de las sub-figuras, como de las transformaciones figurales que han de tenerse en cuenta en la solución de un problema geométrico dado; Padilla (1992), por ejemplo, identificó la composición de elementos distintos que generan niveles de complejidad diferente en la discriminación de la operación de reconfiguración;[3] Marmolejo (2007), por su parte, resalta que las características del contorno de una figura junto a la orientación de los trazos que han de introducirse en ella, son aspectos que explican la dificultad que tienen los estudiantes para descomponer una figura en sub-figuras previamente determinadas. En relación

[3] **"... tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente" (Duval, 1999: 156).**

con la posibilidad de discriminar en una figura las unidades de dimensión 1 y dimensión 2 que le conforman e "inferir" a partir de ellas las propiedades matemáticas relevantes al problema planteado, Duval (2005) y Gal y Linchevski (2010) han encontrado que los estudiantes privilegian una visualización de naturaleza estática o icónica, centrada en lo que "a primera a vista se ve" en la figura geométrica en estudio; de quedarse en esta manera de ver, esta actividad cognitiva resulta no solo insuficiente, sino que además dificulta la aplicación y desarrollo de conceptos y relaciones geométricas.

Por nuestra parte, asumimos una perspectiva teórica que considera, por un lado, que la particularidad de los objetos matemáticos exige para su aprendizaje que actividades cognitivas fundamentales como la representación, la conceptualización, el razonamiento, la visualización, la comprensión de textos, la resolución de problemas, requieran simultánea y articuladamente de variados sistemas de representación semiótica (Duval, 1999). Por otro, que el aprendizaje de la geometría, en particular, ocurre necesariamente mediante la coordinación de actividades de visualización, razonamiento y construcción, cada uno con sus funciones epistemológicas específicas. Si bien el desarrollo del funcionamiento cognitivo de cada una de estas actividades ocurre de manera separada, la visualización puede privilegiarse en la enseñanza escolar básica de la geometría como la puerta de entrada, soporte e impulso para las actividades de razonamiento y construcción geométricos (Duval, 1998).

Nuestro interés, como ya hemos mencionado, se centra en la visualización vinculada al registro semiótico de las figuras, en particular de las figuras geométricas bidimensionales, puesto que son soportes intuitivos que ayudan de manera importante a dotar de sentido y significado el aprendizaje de las matemáticas. Las representaciones figurales son las que permiten la conducta de abducción (Duval, 1999); esto es, la de delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración. Hablar del papel heurístico de las figuras es decir que la conducta de abducción es la que guía la deducción.

No obstante el reconocimiento generalizado de lo anteriormente dicho en diferentes investigaciones, incluida la presente, pone en evidencia que hacer de las figuras herramientas heurísticas potentes para la comprensión y la resolución de problemas geométricos está lejos de ser obvio y espontáneo (Duval, 1999; Padilla, 1992; Marmolejo, 2007, 2010). Por el contrario, es necesario aprender a discriminar entre diferentes formas de ver para reconocer las que son pertinentes y potentes para la resolución de la actividad matemática planteada;

es decir, es indispensable aprender no solo a detectar, sino también a aprovechar o vencer, según sea el caso, la presencia de factores que hacen posible discriminar sobre una figura las sub-figuras o sub-configuraciones pertinentes a la resolución del problema planteado.

Privilegiamos en este trabajo la temática área de regiones poligonales[4] frente a otras presentes en los currículos de matemáticas, pues su aprendizaje coincide, en gran medida, con características del aprendizaje de la visualización (Duval, 1999): aplicación de modificaciones sobre las figuras, no requiere razonamientos de naturaleza deductiva y no exige construcciones con instrumentos geométricos.

El propósito de esta investigación es comparar las visualizaciones privilegiadas por estudiantes que tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre las posibilidades heurísticas y operativas que permiten las figuras geométricas, gracias a actividades propuestas por su profesor en las que, implícitamente, se compararon áreas de regiones poligonales, con las maneras de ver introducidas por alumnos, que al contrario, no participaron en tales procesos de reflexión.

REFERENTES TEÓRICOS

De acuerdo con Duval (1998), la enseñanza y el aprendizaje de la geometría involucran, como mínimo, tres actividades cognitivas: la construcción, que alude al diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos; el razonamiento relacionado con procesos discursivos y la visualización, cuya atención recae en las representaciones espaciales. Cada actividad tiene funciones epistemológicas distintas; la visualización, por ejemplo, permite la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, miradas sinópticas sobre ellas y verificaciones subjetivas. Si bien cada una puede ser aprendida o enseñada de manera independiente o separada, la articulación entre ellas es requisito ineludible para asegurar el aprendizaje de la geometría. Para lograr que haya sinergia entre esas actividades, es necesario, en primera instancia, separar las diferentes maneras de ver que subyacen a su aprendizaje y luego diferenciar los tipos de razonamiento que conviven en el aprendizaje de esta disciplina, lo uno y lo otro es lo que da base para el aprendizaje de las construcciones. La visualización, pues, se impone como elemento crucial en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

[4] **Definimos como región poligonal a la unión de un polígono simple con su interior. Al polígono se lo llama contorno o frontera de la región poligonal.**

Entre los distintos tipos de representaciones que se movilizan en la geometría, las figuras juegan un papel determinante, pues constituyen un importante soporte intuitivo para la actividad geométrica (Duval, 1999). Como todo tipo de sistema de representación semiótico, los requeridos por la geometría exigen la puesta en acto de dos clases de transformación para asegurar la comprensión de los objetos matemáticos en que se reflexiona: la conversión y el tratamiento, este último interior, la primera exterior al sistema de representación en juego (Duval, 1999). Para describir cuál es el aporte heurístico de una figura en el desarrollo de una actividad matemática, es necesario distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución al problema planteado. Duval (1995) mostró que una figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente: perceptual (identificación perceptiva espontánea), operatoria (transformación heurística de las figuras) y discursiva (reconocimiento de unidades figurales y variabilidad dimensional intrafigural). Y que en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, se relacionan y, en otros, se oponen (Duval, 2003). El interés de la presente investigación recae en la segunda de estas aprehensiones y en los cambios de focalización bidimensionales que se introducen sobre una figura al desarrollar una tarea geométrica. Enseguida describimos estos elementos conceptuales.

Aprehensión operatoria

Las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras se encuentran íntimamente relacionadas con la gama de modificaciones posibles que se pueden realizar sobre ellas. Son cuatro las clases de modificaciones que es factible realizar sobre las figuras que se consideran en nuestra investigación: las mereológicas (Duval, 1988b), centradas en las relaciones entre las partes y el todo; las ópticas (Duval, 1988b), cuando la transformación apela a la imagen de la figura; las posicionales (Duval, 1988b), cuando la transformación se realiza teniendo en cuenta el cambio de la figura en cuanto a su orientación en el campo en que destaca y, finalmente, las intrínsecas (Marmolejo y González, 2011), cuando se transforma la organización perceptiva de la figura de partida a nivel interno bajo la introducción o inhibición de trazos. Con cada modificación se realizan varias operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística: la reconfiguración, cuando la modificación es mereológica; la superponibilidad y la anamorfosis, cuando es óptica; la rotación y la traslación en el caso de la modificaciones posicionales y el fraccionamiento, cuando es intrafigural. La productividad heurística de una figura tiene que ver con las modificaciones que se producen en ella gracias a una operación cognitiva determinada. La productividad heurística genera ideas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos matemáticos susceptibles de traer a colación para resolver la actividad propuesta.

De otra parte, sucede que "las unidades figurales que se han podido identificar perceptivamente, no siempre concuerdan con las que están designadas en el enunciado, o con las que son pertinentes para la resolución del problema planteado" (Duval, 1999: 160). La no-congruencia entre lo que muestra la introducción discursiva de la figura y lo que se privilegia en su organización perceptiva o, a la inversa, la presencia de una fuerte congruencia entre estos dos aspectos, junto a que las unidades que han de considerarse no son las directamente visibles en la figura y designadas en el enunciado, se constituyen, uno y otro, en fuertes obstáculos para la resolución del problema planteado. Por el contrario, la existencia de congruencia y de coincidencia entre las unidades que se evidencian en la figura y el enunciado con aquellas que es necesario tener en cuenta, pone en evidencia un espectacular aumento de éxitos en relación con el desempeño en tareas donde esto no sucede (Duval, 1999).

Otro aspecto relacionado con la complejidad de operar en las figuras tiene que ver con que no es suficiente que un alumno pueda acceder a los diferentes tratamientos que permiten las figuras; es decir, que pueda realizar o resaltar trazos sobre una figura, dibujar sobre ella sub-figuras, realizar transformaciones y rotaciones, transformar una figura dada en otra figura de contorno global diferente; también es necesario que pueda discriminar aquellas transformaciones que, por su naturaleza, son pertinentes, potentes y económicas cognitivamente en la solución del problema planteado. Distintas investigaciones han identificado factores que facilitan, o por el contrario, dificultan la visualización tanto de las sub-figuras, como las transformaciones figurales que han de tenerse en cuenta (factores de visibilidad) en la solución del problema planteado (Duval, 1998; Padilla, 1992; Marmolejo, 2007). Así mismo, se ha demostrado que estos factores de visibilidad inciden en los tiempos de respuestas, con lo cual se resalta la complejidad cognitiva que subyace en la visualización al interior del registro semiótico de las figuras (Padilla, 1992). Entre los factores de visibilidad se destacan: que la figura de partida sea presentada sobre un fondo cuadriculado o sobre uno no cuadriculado, que el reagrupamiento de las partes en que ha sido dividida la figura forme una configuración convexa o no-convexa, que sea necesario aplicar una o varias operaciones posicionales sobre las sub-figuras claves para lograr una adecuada colocación, que una misma parte de una figura deba entrar simultáneamente en dos reagrupamientos intermediarios que han de compararse, que solo se deba tener en cuenta las características del contorno de la figura que ha de reconfigurase, que las partes en que está dividida la figura que se reconfigurará deban ser desplazadas a su interior o, al contrario, que algunas deban desplazarse a su exterior, y que el fraccionamiento de la figura que se transformará en las partes claves sea dado de entrada o deba ser introducido.

Cambio de focalización bidimensional

Como lo expresan Marmolejo y González (2011), no basta con la discriminación de operaciones que han de realizarse sobre una figura y las transformaciones que se generan en ella, para describir la visualización asociada a las figuras bidimensionales que subyace al desarrollo y comprensión de tareas de áreas de regiones poligonales. Es necesario considerar, además, los cambios en la manera de ver en la figura que ha de medirse, centrados en unidades visuales 2D (figura de partida, sub-figuras y/o sub-configuraciones); es decir, pasar de centrar la atención en las características globales 2D de la figura de partida, a hacerlo en sus partes 2D constituyentes (sub-figuras o sub-configuraciones) y/o, en caso de haber varias figuras de partida, pasar de centrar la atención de una a otra y/o considerar simultáneamente la partes 2D que las conforman.

METODOLOGÍA

En cuanto a la manera como fueron filtrados los datos, la investigación es de carácter cualitativo, puesto que aquellos se consideraron según los criterios de los investigadores. Conforme al propósito de comparar, describir y explicar el procesamiento cognitivo de los estudiantes que participaron en dos grupos distintos de la situación sometida a estudio, la investigación es de naturaleza comparativa, descriptiva e interpretativa. La captación y selección de los datos se realizó de forma inductiva; es decir, las categorías de análisis implementadas en la investigación se extrajeron de las producciones de los estudiantes. Su interpretación consideró el análisis funcional propuesto por Duval (1999) para la actividad cognitiva vinculada a los registros semióticos de representación, en particular el relacionado con las figuras geométricas y la visualización asociada a ellas. Así mismo, considerando el grado de abstracción, se trata de una investigación básica que no pretende establecer aplicaciones prácticas que puedan deducirse del estudio.

Instrumentos de recolección de datos

Los datos se acopiaron por medio de las producciones escritas de los estudiantes al resolver las tareas propuestas y, en casos puntuales, con entrevistas semi-estructuradas para ampliar o precisar las descripciones y explicaciones desarrolladas por ellos.

Población

La población estuvo constituida por 150 estudiantes de cuatro cursos de grado tercero de primaria, de igual número de instituciones educativas de la ciudad de Santiago de Cali (Colombia), con edades entre ocho y nueve años. Previo a la investigación, en ninguno de los cuatro cursos se habían adelantado procesos de enseñanza en los que explícitamente se reflexionara sobre el área de regiones poligonales y su medida.

El trabajo de campo

Los cuatro cursos de tercer grado de primaria se dividieron en dos grupos: el grupo E, uno de los cuatro cursos con 30 estudiantes; el grupo C, los tres cursos restantes con 120 estudiantes. En el primer grupo se implementó una secuencia de enseñanza especial, adicional a la habitual, desarrollada en cinco sesiones de clase, con una duración de 60 minutos cada una. Se hizo énfasis en la reflexión sobre algunos tratamientos que permiten las figuras geométricas y que hacen de estas representaciones soportes heurísticos en el aprendizaje de las matemáticas. Los tratamientos privilegiados fueron: introducir trazos sobre una figura, dividirla en partes, aplicar sobre ellas operaciones posicionales como rotaciones y traslaciones y transformar una figura en otra de contorno global diferente. Los alumnos del segundo grupo, por el contrario, no participaron en ningún proceso de enseñanza sobre las figuras y sus posibilidades operatorias y heurísticas

La secuencia de enseñanza consideró el trabajo individual de los estudiantes, seguido de la presentación y discusión de sus maneras de proceder en grupos de tres estudiantes y luego la presentación, al grueso de estudiantes, de las posibilidades y limitantes encontradas a las maneras de proceder discutidas al interior de los pequeños grupos. Por último, cada uno de los estudiantes consignó en su cuaderno la manera de proceder que, de manera posterior a la discusión, asumió como más pertinente o más interesante para el desarrollo de la tarea propuesta. La participación del profesor a cargo, tanto en el trabajo individual como en el realizado en pequeños grupos y a nivel grupal, se limitó a suscitar en los estudiantes la descripción y explicación en detalle de sus maneras de proceder.

Posteriormente, en los dos grupos, de forma paralela al desarrollo de las clases de geometría donde los estudiantes iniciaban la construcción del área de regiones poligonales, se implementaron dos actividades (ilustraciones 1 y 2) que fueron desarrolladas por los estudiantes en parejas escogidas de manera libre y espontánea, organizados en el aula de la misma manera. En todos los casos, los estudiantes trabajaron con sus profesores habituales, quienes fueron informados en detalle en cuanto a la finalidad de las actividades propuestas; su participación se limitó a entregar a los estudiantes las actividades, acompañarlos en la lectura de la consigna de las tareas propuestas y a la recolección de la producción escrita de los estudiantes.

Las parejas de estudiantes emplearon entre 10 y 30 minutos en la resolución de cada una de las actividades, por lo cual en todos los cursos se requirió solo una sesión para ello. Todos los estudiantes realizaron las dos actividades y, por tanto, los datos empíricos recolectados incluyen todos los estudiantes de la población escogida.

El instrumento de análisis

El interrogante que orientó nuestro estudio fue el siguiente: Al desarrollar tareas de comparación de cantidades de área, ¿cuáles son las diferencias y similitudes existentes entre las maneras de ver privilegiadas por parte de estudiantes que previamente han tenido la oportunidad de reflexionar de manera explícita sobre las posibilidades heurísticas y operatorias que brindan las figuras, y las formas de ver implementadas por estudiantes que no han tenido esa oportunidad?

Se tuvieron en cuenta cuatro categorías de análisis, a través de las cuales fue posible hacer un registro pormenorizado de los tipos de visualización introducidos por la población participante en la investigación: operaciones visuales, focalización, rol heurístico y conversión. De esta manera fue posible discriminar cuatro tipos distintos de visualización en las producciones de los estudiantes. En lo que sigue describimos en detalle cada una de las categorías y los elementos que les caracterizan:

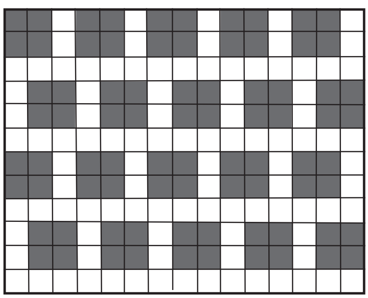
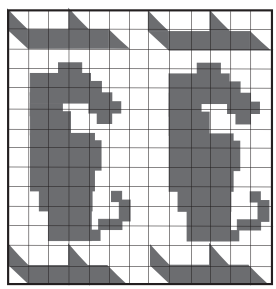
- *Operaciones visuales*: aluden a las acciones que se aplican sobre la figura en estudio y que producen sobre ella transformaciones figurales. Fueron tres las operaciones privilegiadas por los estudiantes en este estudio: reconfiguración (Rec), Traslación (T) y re-fraccionamiento[5] (Ref).
- *Focalización*: considera los saltos de naturaleza bidimensional aplicados sobre la figura de inicio. Los tipos de focalización encontrados en este estudio fueron: local con pérdida de globalidad (LPG) y local sin pérdida de globalidad (LSPG). En el primer caso, la atención recae sobre las sub-figuras que conforman la representación de partida, ignorándose en el proceso de resolución las características perceptuales de la figura de inicio. En el segundo, si bien la atención recae en las sub-figuras, las características globales de la figura de partida no son dejadas de lado.
- *Rol heurístico*: alude al papel que desempeña la figura en el desarrollo de la tarea propuesta. Encontramos en los procedimientos de los estudiantes cuatro niveles en que la figura se considera como soporte heurístico: 1) Nulo (N): la figura no suscita maneras de proceder que lleven a una respuesta adecuada a la pregunta planteada; de hacerlo, la manera de ver en ella conduce a maneras de proceder no pertinentes y/o a afirmaciones y consideraciones equivocadas. 2) Bajo (B): la figura permite maneras de proceder que suscitan la resolución del problema planteado, pero los procedimientos aplicados se caracterizan por ser engorrosos y poco económicos. 3) Medio (M): la figura pasa a ser un soporte heurístico para la resolución, pero las maneras de proceder tienden a ser poco económicas, aunque sean pertinentes y posibiliten una resolución adecuada. 4) Alto (A): la figura se constituye en soporte heurístico que suscita maneras de proceder económicas y pertinentes al problema planteado
- *Transformación*: alude a los dos cambios que permiten los registros semióticos de representación, en el caso de esta investigación, las figuras y el registro numérico (aritmético): Tratamiento, los que se pueden hacer al interior de cada registro; Conversión, los que se hacen entre los distintos registros semióticos en juego. Identificamos cuatro clases de transformaciones en los procedimientos de los estudiantes: 1) Interno-interno (T-T): primero tratamientos figurales y después tratamientos aritméticos, sin que haya conversión. 2) Interna-externa-interna (T-E-T): primero tratamientos figurales, conversión a registro numérico y por últi-

[5] **Pasar de centrar la atención en las sub-figuras que conforman la figura de inicio, a discriminar en ella sub-configuraciones pertinentes al desarrollo de la tarea propuesta.**

mo tratamientos aritméticos. 3) Interno aritmético (Ta): el procedimiento de resolución recae de forma absoluta sobre tratamientos aritméticos y 4) Interno figural (Tf): el procedimiento pone en evidencia tratamientos exclusivamente figurales.

CARACTERIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES IMPLEMENTADAS

Las actividades implementadas en la investigación (ilustraciones 1 y 2) tienen un enunciado en lengua natural y una figura representada sobre un fondo cuadriculado. Los conocimientos matemáticos necesarios para resolver los problemas propuestas son mínimos y básicos para los alumnos del grado escogido; se trata de actividades que no requieren de ningún razonamiento que exija la utilización de definiciones, teoremas, propiedades y fórmulas matemáticas. Las figuras, en cada caso, son potentes heurísticamente, pues permiten varias posibilidades de transformación pertinentes a la resolución del problema propuesto. A pesar que la intención de cada actividad es que los alumnos reflexionen sobre el área de regiones poligonales, en las consignas no se hace referencia explícita a este objeto matemático; está implícito en el uso de expresiones que ponen en relieve la comparación directa entre figuras a partir de sus cantidades de área: *¿Cuál de las dos tiene mayor superficie? ¿Dónde se gastó mayor cantidad de pintura?* Cada situación demanda una explicación y justificación de los diversos procedimientos puestos en juego por los alumnos.

ACTIVIDAD 1: Este es el fondo de una piscina. Necesitamos saber cuál superficie es mayor: ¿la superficie blanca o la superficie gris? Explica tu procedimiento.	ACTIVIDAD 2: El mural del colegio está pintado tal como lo muestra la figura. Si los dibujos fueron pintados con color gris y el resto de la pared con color blanco, ¿dónde se gastó mayor cantidad de pintura? Explica tu procedimiento.
Ilustración 1 	Ilustración 2 

La complejidad de las actividades se relaciona con cinco aspectos:

1. No hay congruencia semántica entre el enunciado en lengua natural y la figura. En las dos situaciones la consigna introduce un anclaje sobre dos superficies distintas, la superficie blanca y la superficie gris, dándoles el mismo estatus dentro de la tarea. Al tiempo, la organización perceptiva de las figuras hace que la superficie gris sea espontáneamente vista como un conjunto de superficies independientes entre sí: en la primera actividad se discriminan 20 cuadrados grises y en la segunda se realzan seis figuras, dos con forma de caballo de mar y cuatro con forma de tiburón. Esa misma organización hace que la superficie blanca no sea espontáneamente vista, pues juega el papel de fondo.
2. Sea cual fuere la transformación por la que se opte, es necesario neutralizar en la figura su organización perceptiva, pues esta hace predominar los contornos de las configuraciones grises y de los cuadrados pequeños blancos sobre cualquier contorno de las sub-figuras pertinentes para la solución del problema planteado. Adicionalmente, luego las sub-figuras han de ser vistas por separado, aunque tengan parte de su contorno en común y, finalmente, ha de centrarse atención solo en una de ellas.
3. El grado de potencia heurística que presentan las figuras en esta actividad es alto. Son posibles varios tipos de transformación pertinentes para llegar a la conclusión de que la zona blanca es mayor que la zona gris: la figura se puede seccionar en diversas sub-figuras superponibles entre sí y, de esta manera, se pueden comparar las dos superficies.
4. Una figura y otra suscitan maneras de proceder totalmente diferentes en relación con las posibles unidades de medida vinculadas con la cuadrícula. En la primera, donde la distribución de zonas blancas y grises sigue una organización análoga a la de la cuadrícula misma, el conteo juega un papel determinante y eficaz para ver el fraccionamiento que la cuadrícula introduce sobre las partes que se han de comparar. No ocurre así con la figura de la segunda actividad, en la que el fondo cuadriculado se constituye en un obstáculo, pues es necesario considerar la figura de partida tanto en su globalidad, como en la semejanza existente entre sus partes.
5. La exigencia de conocimientos matemáticos en cada una de las actividades es de naturaleza distinta. En la primera, no es necesario ningún tipo de conocimiento sobre área para resolver la tarea planteada; es un

ejercicio de conteo más que un problema geométrico. En la segunda sí lo es, pues requiere establecer la relación de orden que exige considerar el área como un tipo de magnitud mediada por la aplicación de una operación interna propia de la magnitud área (unión de áreas). En este sentido, la actividad 1 permite centrarse en un registro numérico mientras que la actividad 2 exige la introducción de transformaciones de la figura.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las actividades propuestas en la investigación desencadenaron procedimientos de naturaleza diferente, según el tipo de visualización adoptado. Estas maneras de proceder no solo permitirán destacar la enorme complejidad de la visualización, sino mostrar el error de quienes la consideran obvia y espontánea. Así mismo, aportan suficientes elementos para reconocer la visualización como función cognitiva susceptible de ser incluida en procesos de enseñanza y, por esta vía, promover y apoyar su aprendizaje.

En lo que sigue describiremos en detalle las visualizaciones discriminadas en la investigación; en algunos casos y a modo de ejemplo, hacemos la descripción de fragmentos de las estrategias a las que recurrieron los estudiantes. Posteriormente, describiremos las diferencias y similitudes presentes en las maneras de ver empleadas por los estudiantes de los dos grupos.

Visualización 1 (V1): la atención de quien enfrenta la situación planteada recae exclusivamente en las sub-figuras de la figura de partida. Esta forma de ver, según la actividad desarrollada, moviliza dos procedimientos distintos, a saber:

- La primera actividad se realiza mediante un procedimiento en el que la figura no juega un rol heurístico en el intento de dar respuesta a la pregunta planteada. Se recurre a la figura de partida únicamente para discriminar sus partes, que se asumen como disjuntas entre sí; es decir, no se toman en consideración las características perceptivas globales de la figura de partida. No se realizan operaciones ni sobre la figura global ni sobre las partes discriminadas. No hay conversión de un registro a otro; por el contrario, el desarrollo de la actividad se realiza de manera exclusiva con tratamientos aritméticos tipo conteo.
- La segunda actividad se realiza mediante un procedimiento que, igual

> que el anterior, no se toman en consideración las características perceptivas globales de la figura de inicio y la atención recae en las subfiguras que le conforman. La diferencia con el procedimiento anterior es que se hacen transformaciones sobre las partes de la figura de inicio (reconfigura sub-figuras para conformar nuevas sub-figuras con forma cuadrada) pero, una vez establecidas las transformaciones, el desarrollo de la actividad continúa con tratamientos aritméticos tipo conteo.

Esta forma de ver conduce a que el estudiante se enzarce en acciones monótonas, extensas y engorrosas con un margen de error muy amplio para dar una respuesta a la pregunta de la situación. Además, esta centración en las unidades mínimas de la figura y solo en ellas, es decir, asumir como unidad de visualización cada uno de los cuadrados que conforman el fondo cuadriculado, lleva a una pérdida de la globalidad de la figura y estorba que pueda tomársela como soporte heurístico; los estudiantes que desplegaron este procedimiento e intentaron recurrir a la figura como herramienta heurística, lo hicieron de manera que aquella resultaba muy inestable "perdiendo o ganando" partes, sobre lo cual no logran ganar algún control.

Por ejemplo, en la actividad 2 encontramos con frecuencia el caso en que, cuando los estudiantes terminan de contar los cuadrados que están completamente coloreados de blanco o gris, se enfrentan con la situación de que hay otros cuadrados que no están coloreados en su totalidad. Ante esto proceden de formas diferentes: cuentan las fracciones de cuadrado como si fuesen unidades completas, o las ignoran y solo cuentan los completos, o las asumen como la mitad o el cuarto de una unidad, dejando de lado sus formas (triangulares, cuadradas, rectangulares) y posteriormente, por cada dos o cuatro de ellas, respectivamente, completan una unidad. Es claro que estos estudiantes en ningún momento recurren al registro semiótico de las figuras como tal; por el contrario, los procedimientos son de tipo conteo. Quienes procedieron mediante este tipo de visualización no lograron llegar a una solución satisfactoria del problema propuesto y más bien, al final, optaron por tratar de adivinar.

Otro caso es el de los estudiantes que no solo ven la figura como si estuviese fraccionada en una serie de cuadrados adjuntos entre sí, sino que reconocen la existencia de figuras triangulares, cuadradas y rectangulares al interior de cada una de los cuadrados que no están totalmente coloreados y, posteriormente, las llevan a aquellos lugares en la figura cuya forma permite un encaje y así conformar un cuadrado completo (de color blanco o gris). De esta manera obtienen una nueva figura de contorno global distinto y proceden a contar la unión de las partes "no completas". En este caso se ha hecho uso de algunas de las posibilidades que permiten las figuras, por ejemplo, por complementariedad de formas, se unieron partes de un mismo color para conformar cuadrados completos. Sin embargo, una vez realizado este procedimiento la figura es dejada de lado y la actividad del estudiante se centra en el conteo. Es en este sentido que decimos que las posibilidades figurales son puestas en juego en una muy baja racionalidad.

Pues, esta forma de ver puede convertirse en un obstáculo para el reconocimiento del papel heurístico que la figura puede jugar en la solución de estos problemas; en la búsqueda de totalizar la cantidad de cuadrados que conforman las partes blancas y grises de la figura dada, hay estudiantes que no discriminan la presencia de las seis sub-figuras cuyas superficies están coloreadas de gris: cuatro peces y dos caballos de mar, y en consecuencia, que tanto peces como caballos, respectivamente, tienen igual forma y superficie. Esto impide que, a partir de un reconocimiento global de la figura, se pueda recurrir a ella como un soporte intuitivo que guíe la solución del problema hacia procedimientos de racionalidades mayores a las que subyacen al despliegue exclusivo del conteo.

Visualización 2(V2): identificada solo en la actividad 1. El interés de quienes resuelven la actividad recae tanto en las características perceptivas globales de la figura de inicio, como en las sub-figuras que le conforman. Primero introducen sobre la figura de partida transformaciones internas, luego hacen una conversión que permite pasar de una representación figural a una aritmética y, posteriormente, despliegan tratamientos aritméticos. La operación de re-fraccionamiento caracteriza esta forma de ver; su aplicación suscita una reorganización perceptiva de naturaleza interna en la representación de inicio. Así, quien intenta resolver el problema planteado pasa de centrar la atención en un conjunto de partes adjuntas entre sí a privilegiar la presencia de varias sub-configuraciones: 20 rectángulos de área pequeña y 4 de área mayor (Ilustración 3).

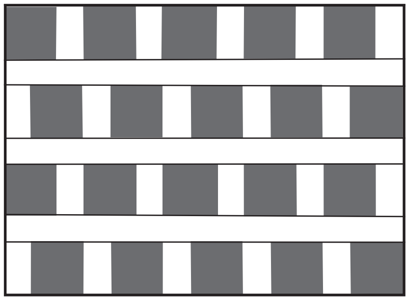


Ilustración 3. Modo de Visualización 2

Esta visualización conduce a procedimientos de racionalidades mayores a los evidenciados en V1: no solo la figura juega como herramienta heurística que guía la solución del problema, sino que además se recurre al uso de tratamientos aritméticos de mayor envergadura que el conteo. Es el caso del procedimiento puesto en evidencia en el fragmento de una entrevista realizada a una pareja de estudiantes y que transcribimos a continuación, en el que hacen un uso compuesto de operaciones aditivas y multiplicativas. Tras pedir a los alumnos que explicaran por qué afirmaban que la zona blanca es mayor que la gris, uno de ellos argumentó lo siguiente:

> Lo que hice fue multiplicar los cuadritos de los cuadros grises [un cuadrado gris está compuesto por 4 cuadritos] por la cantidad de cuadrados grises que hay, 20×4 = 80. Los cuadros blancos los junté y los volví líneas verticales [rectángulos compuestos por dos cuadrados blancos y que separan verticalmente una configuración gris de otra] y horizontales [rectángulos compuestos de 15 cuadritos que separan horizontalmente las configuraciones grises] ... los cuadritos de las líneas verticales los multipliqué por dos (20×2) y me dio 40. Los cuadritos de las líneas horizontales los multipliqué por cuatro (15×4 = 60), luego sumé sus resultados y me dio 100. Por eso la parte blanca es la más grande, porque hay más cuadritos blancos.

Visualización 3 (V3): así como los estudiantes que enfrentaron la situación 1 mediante la visualización anterior, hay otros estudiantes que consideran como unidad de visualización tanto la figura de partida como las sub-figuras que le constituyen pero que, a diferencia de los otros, realizan transformaciones de naturaleza figural seguidas de la introducción de conteo sobre las partes que componen la figura de llegada. El grado heurístico es de nivel medio. La conversión, en este caso, no hace parte de los procedimientos que los estudiantes siguen. Identificamos dos procedimientos que movilizan este tipo de visualización:

En el primero se introducen dos operaciones: una de re-fraccionamiento, a través de la cual los estudiantes transforman la representación de entrada desde una figura compuesta por sub-figuras puestas una al lado de la otra, a una de organización perceptual interna distinta; la figura se divide, así, en dos zonas de igual forma y cantidad de área, descompuestas cada una en partes igualmente no solapadas. La segunda operación es la traslación que los estudiantes hacen de algunas de las partes de una de las zonas hacia la segunda de ellas. Así pues, tras una reorganización de la estructura perceptiva interna de la figura, los procedimientos de los estudiantes dan lugar a una nueva representación de llegada. Teniendo esta, realizan sobre una de las partes de la nueva figura tratamientos aditivos tipo conteo.

Este procedimiento fue el que llevó a que una pareja de estudiantes lograran resolver satisfactoriamente la situación 1. Los estudiantes, tras hacer un re-fraccionamiento en la figura de inicio, la dividen en dos partes iguales (A y B); luego cambian la unidad de visualización, es decir, pasan de centrar la atención en la globalidad de la figura de inicio o en los cuadrados blancos y grises en que se descompone, a hacerlo en las zonas A y B. Posteriormente, cambian de nuevo la focalización, centrando la atención en las cuadrados grises presentes en la parte B. Enseguida vuelven a hacer un re-fraccionamiento, esta vez sobre cada uno de los cuadrados grises que están en B, descomponiéndolos en dos rectángulos iguales entre sí (Ilustración 4). Para resolver el problema propuesto, les bastó trasladar dichos rectángulos de la zona B y encajarlos en las partes blancas disponibles en A. Al preguntar a los alumnos cuál era la conclusión que alcanzaron tras proceder de esta manera, uno de ellos manifestó lo siguiente: "...concluí que la parte blanca es más grande que la gris, porque a la gris le hacen falta 10 cuadritos pequeños para completar el lado A, mientras que en la blanca no le hace falta nada".

Los estudiantes que presentaron este procedimiento no tuvieron en cuenta al conteo como herramienta fundamental para el desarrollo de la situación; ellos pusieron en juego racionalidades más complejas y elaboradas, propias de la geometría. Además, el área de regiones poligonales, objeto de enseñanza que se pretende movilizar con estas situaciones, siempre estuvo implícito a lo largo del procedimiento que los llevó a la solución del problema. Sin embargo, la figura no jugó en su máxima potencialidad, como sí sucede en la última de las visualizaciones identificadas en la investigación.

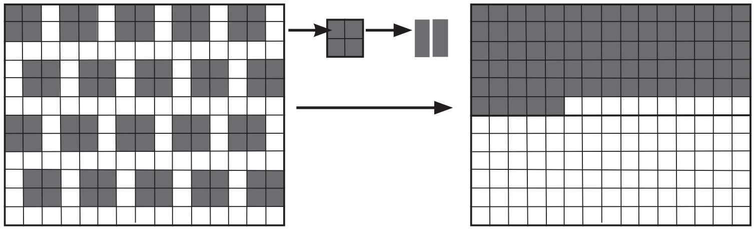


Ilustración 4. Modo de visualización 3

El segundo procedimiento identificado lo encontramos solo en el desarrollo de la actividad 2. Se caracteriza por la realización de un re-fraccionamiento sobre la figura de inicio que la descompone en dos sub-configuraciones iguales, cada una compuesta por dos peces y un caballo de mar representados sobre un fondo cuadriculado. Posteriormente, la focalización de quien resuelve la tarea recae en una de ellas, en particular, en las partes en tono oscuro. Por acción del fondo cuadriculado, las zonas oscuras tienden a ser discriminadas como una composición de triángulos, cuadrados pequeños y cuadrados grandes. A continuación, los estudiantes hacen reconfiguraciones sobre cada cuatro cuadrados pequeños y cada pareja de triángulos transformándolos en cuadrados grandes. Simultáneamente, se introduce un conteo uno a uno tanto de los cuadrados grandes que conforman la figura como de aquellos que aparecen tras el proceso de reconfiguración. Así pues, al ser iguales las dos partes en que los estudiantes dividieron la figura de inicio, les bastó establecer la relación entre la zona blanca y gris de una de ellas para resolver el problema planteado. De esta manera establecen la relación entre las cantidades de área de la parte blanca y la gris en la figura en estudio.

Visualización 4: un grupo muy pequeño de estudiantes manifestó una mayor flexibilidad para ver en la figura. Igual que en las dos maneras de ver antes descritas, la focalización es local sin que haya pérdida de globalidad. El rol heurístico jugado por la representación de inicio es alto. En el procedimiento que le caracteriza se realizan operaciones de re-fraccionamiento y reconfiguración; así mismo, el tratamiento figural es la transformación semiótica que se impone. Esta manera de ver la encontramos de manera prioritaria en el desarrollo de la actividad 1, transcurriendo de la siguiente manera: tras reconfigurar la figura inicial en 20 sub-figuras iguales entre sí (ilustración 5), los estudiantes asumen como unidad de visualización una de estas sub-figuras y, centrados en ella, concluyen que en la piscina la superficie blanca es mayor que la superficie gris. Al exigir una justificación, uno de los alumnos se limitó a señalar primero la parte blanca y luego la parte gris de la sub-figura diciendo "no la puedo volver como un cuadrado", aludiendo de esta manera que no es posible reconfigurar la zona blanca en la figura de superficie gris.

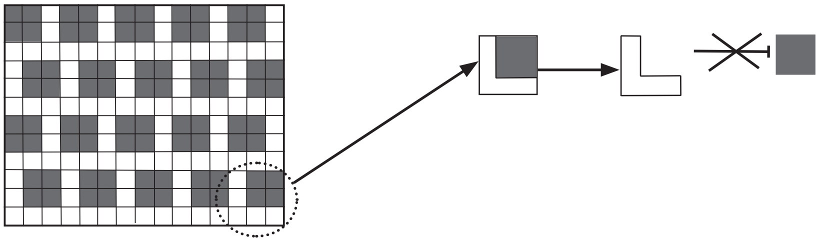


Ilustración 5. Modo de visualización 4

En la tabla 1 se presentan sintéticamente las cuatro visualizaciones previamente descritas, así como los elementos que les caracterizan descritos en el instrumento de análisis:

Tabla 1: visualizaciones presentes en los procedimientos de resolución aplicados por los estudiantes al resolver las actividades propuestas

Categorías	*V1*		*V2*	*V3*		*V4*
	P1	*P2*		*P1*	*P2*	
Operación	Ausente	Rec.	Ref.	Ref.+T	Ref.+Rec	Ref.+Rec.
Focalización	LPG	LPG	LSPG	LSPG	LSPG	LSPG
Rol heurístico	Nulo	B	B	M	M	A
Transformación	Ta	T-T	T-E-T	TT	T-T	Tf

Contraste entre las visualizaciones introducidas por los grupos en estudio

En lo que sigue describimos las similitudes y diferencias de visualización encontradas en los dos grupos (grupo C y E) según cada actividad:

Actividad 1: El 100% de los estudiantes del grupo C realizaron esta actividad con la forma de ver y proceder del tipo V1. Este tipo de visualización, si bien suscita una manera de proceder que podría llevar a la resolución de la tarea planteada, es la menos económica y más engorrosa de todos los procedimientos que se desprenden de las visualizaciones posibles que permite la figura de inicio. Son muchos los cuadros blancos y grises que destacan en la figura y, por tanto, el conteo uno a uno ocupa tiempos mayores que los tratamientos explicitados por la mayoría de las visualizaciones posibles. Además, no pone en evidencia el propósito de la tarea: comparar cualitativamente las partes en cuestión. En relación con el procedimiento aritmético empleado, no aporta en nada a reflexiones aritméticas distintas a las que el estudiante ha venido realizando en la etapa pre-escolar o en los grados primero y segundo. En pocas palabras, los estudiantes de este grupo se quedaron en un registro numérico donde la figura no jugó un papel heurístico en la solución del problema planteado.

Los estudiantes del grupo E, por el contrario, introdujeron cuatro tipos de visualización distintos. También se presentó el tipo de visualización V1, pero solo por 20% de los estudiantes. La visualización de mayor presencia fue la V3; por medio de ella 60% de los estudiantes de este grupo puso en acto racionalidades geométricas, donde la figura jugó como una representación dinámica y el área se trató como un tipo de magnitud. Sin embargo, no es la manera de ver más propicia, pues hacer re-fraccionamientos sobre algunas sub-figuras y su posterior desplazamiento a una zona distinta de la figura son acciones, igual que el conteo, engorrosas y poco económicas.

En relación con las maneras de ver que suscitaron estrategias potentes según el rol que desempeñó en ellas la figura, el éxito alcanzado y el tiempo exigido para su aplicación, destacan las visualizaciones V2 y V4. Fueron pocos los estudiantes del grupo E que privilegiaron tales maneras de ver: 13% y 6% respectivamente. En el primer caso, desencadenando maneras de proceder poco habituales en estudiantes del grado considerado e introduciendo una conversión del registro figural al aritmético; en el segundo, haciendo de la figura un importante y destacado soporte heurístico para el desarrollo de la tarea planteada.

Actividad 2: El desarrollo de esta actividad suscitó solo dos tipos de visualización: el modo de ver V1, movilizado por 100% de los estudiantes del grupo C y 93% de los estudiantes del grupo E, y el modo de ver V4 por parte de 7% de los estudiantes del grupo E.

La distribución de las zonas grises y su conformación en figuras con contornos no continuos en esta actividad, desencadenaron procedimientos poco económicos y engorrosos basados en el conteo y no en la comparación cualitativa entre superficies. Por tanto, para la gran mayoría de los estudiantes de un grupo y otro, la complejidad de las figuras geométricas, en este caso, no constituyeron un soporte heurístico en el desarrollo de la actividad.

La pareja de estudiantes (7%) que recurrió al modo de ver V4, logró sobrepasar la complejidad de la tarea conformando sub-figuras para cada uno de los tipos de configuración de la actividad, con la misma unidad de visualización al interior de cada una de ellas, con base en lo cual luego pudieron hacer una apreciación global para la comparación de áreas. Es a través de este tipo de visualización que se puede apreciar que, a los ojos de los estudiantes, las figuras geométricas pueden jugar y juegan como soportes intuitivos en su máxima expresión.

CONCLUSIÓN

La geometría es una de las partes de las matemáticas que genera una particular preocupación en los educadores matemáticos dado su abandono como objeto de estudio en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX. Esta situación se ve reflejada en las encuestas nacionales e internacionales que evalúan los conocimientos matemáticos de los estudiantes (Villani, 1998). Actualmente existe en la comunidad matemática internacional una amplia convergencia de opinión en que la geometría, después de años de abandono, debiera ser revitalizada en sus variados aspectos en todos los niveles escolares (Villani, 1998). No obstante, es utópico, y hasta cierto punto indeseable, pensar que la geometría ocupe ahora un tiempo análogo al que antaño se le dedicaba en las instituciones educativas, pues son muchos los objetos, propiedades y relaciones matemáticas sobre los que se ha de reflexionar. Pero eso no justifica que en la actualidad los tiempos asignados sean cada vez menores. Entonces, ¿cómo hacer que la geometría ocupe un lugar importante en la enseñanza de las matemáticas? Investigaciones realizadas por Duval (1998, 1999), Padilla (1992), Lemonídis (1991), así como las nuestras (Marmolejo, 2005, 2007) aportan elementos importantes para acercar respuestas tentativas a tal cuestionamiento. La visualización se constituye en un lugar de enorme potencia para devolver el lugar que le corresponde a la geometría en los currículos escolares. Pero, como se pone en evidencia en esta investigación, esta actividad cognitiva no se adquiere de forma inmediata ni simple; más bien es una cuestión de tratamiento de información susceptible de un aprendizaje específico.

Para que un alumno pueda discriminar las diferentes maneras de ver que permiten las figuras geométricas y de esta manera acceder a las figuras como verdaderos soportes intuitivos en el desarrollo de actividades matemáticas, es indispensable y urgente abrir espacios específicos en los currículos escolares de la educación primaria básica dirigidos a su enseñanza. En la única etapa de educación institucionalizada en la que existe tal intencionalidad es en el preescolar, pero está más orientada al desarrollo de la motricidad fina y al reconocimiento de figuras por parte del alumno, que al desarrollo de algún tipo de racionalidad de orden geométrico. Posteriormente, en los cursos de educación básica, los alumnos deberían, a partir de ese reconocimiento visual y de esa actividad motora adquirida, entender todas las posibilidades que brindan las figuras. En este sentido es importante resaltar que, si bien la implementación de una cuantas sesiones de enseñanza de la visualización suscita una variedad de procedimientos, algunos de ellos de considerable potencia en el desarrollo de tareas matemáticas, no bastan unas pocas sesiones para asegurar una adecuada movilización de los tratamientos figurales que permitan a la visualización ser una herramienta heurística ante las exigencias que las matemáticas escolares requieren. Por el contrario, ha de constituirse en objeto constante de enseñanza durante los primeros ciclos de la educación básica.

El área de regiones poligonales, por su parte, se constituye en la ocasión propicia para promover la enseñanza de la visualización asociada a las figuras geométricas. Pues como se ha puesto en evidencia en este documento, la comparación de figuras a partir de sus cantidades de área es un lugar idóneo para el desarrollo de habilidades visuales en los primeros grados de la educación primaria, máxime si se considera que este objeto métrico tiende a ser un elemento de reflexión a lo largo de toda la educación básica. En este sentido afirmamos que el área de regiones poligonales se constituye en una entrada a la enseñanza de la geometría.

Datos de los autores

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia. Profesor Universidad de Nariño (Colombia). Departamento de Matemáticas y Estadística; usalgamav@gmail.com
Myriam Belisa Vega Restrepo. Profesora Universidad del Valle (Colombia). Instituto de Educación y Pedagogía; myvega43@hotmail.com

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. En *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Clements, D. Swaminathan, S. Zeitler, M. A. y Sarama, J. (1999). Young children´s concepts of shape. En *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2). Pp. 192-212

Davis. P. (1993). Visual Theorems. En *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 333-344

Duval, R. (1988a). Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253

Duval, R. (1988b). Approche Cognitive des Problèmes de géométrie en termes de congruence. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 57-74

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. En R. Suttherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Springer, Berlín, 142-157.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 37-51.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Trad. Myriam Vega Restrepo (1º ed.). Colombia. Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Mexico, 41-76.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. En *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Gal, H y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. En *Educational studies in mathematics*, 74, pp. 163-183

Kordaki, M. (2003). The effect of tools a computer microworld on students´strategies regarding the concept of conservation of area. En *Educational Studies in Mathematics* 52 (2), 177−209.

Lemonidis, C. (1991). Analyses et réalisation d´une expérience d´enseignement de homothétiee. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2-3), 295-324.

Markovits, Z., Rosenfeld, S. y Eylon, B.S. (2006). Visual cognition: content knowledge and beliefs of preschool teachers. En Novotná, J. Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 145-152

Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. En *Revista Sigma*, 10 (2), 10-26

Marmolejo, G. (2007). Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad. Tesis de magister no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Marmolejo, G. (2005). Análisis del Tópico de Geometría y Medición. En *Pruebas Censales y Formación de Pensamiento Matemático en la escuela.* Universidad del Valle. Cali. Colombia, 27-44

Marmolejo, G. y González, M.T. (2011). La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. Un instrumento de Análisis de libros de texto. Conferencia presentada en Asocolme 12 (6-12 octubre). Armenia (Colombia).

Marmolejo, G. y González, M.T. (2012). *El Control Visual para la construcción del concepto de área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis*. En prensa.

Mesquita, A. (1989b). L'Influence de aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie. Disertación doctoral no publicada, Université de Strasbourg, Strasbourg, Francia.

Moriena, S. y Scaglia, S. (2003), Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la Geometría. En *Educación Matemática*, 15 (1), 5-19.

Outhred, L. y Mitchelmore, M. (2000). Young children´s intuitive understanding of rectangular area measurement. En *Journal for research in mathematics education*, 31(2), pp. 168-190.

Padilla, V (1992). L´influence d'une acquisition de traitementes purement figuraux pour l'apprentissage des Mathematiques. Thèse U. L. P. Strasbourg, Francia.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Gutierrez, P. Boero (Eds.), *Handbook on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers, 205-235.

Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. En *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297–311.

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. En *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*. 40 (1), pp. 65-82

Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. En *Educación Matemática*, 15, (2), 27-53.

Villani, V. (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century (Discussion Document for an ICMI Study). En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 337-346.

Walcott, C. , Mohr, D. y Kastberg, S. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. En *Journal of Mathematical Behavior*, 28, pp. 30-40.

Zimmermann, W. y Cunnigham, S. (1991). Editor's introduction: What is Mathematical Visualization? En W, Zimmermann y S. Cunnigham (Eds.), *Visualization in teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington. D. C., 1-8.