Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Saiz, Irma; Gorostegui, Edith; Vilotta, Diego

Sobre la complejidad de la gestión en una clase de matemática: entre lo planificado y la realidad del aula. Modelización algebraica de problemas planteados en Z

Educación Matemática, vol. 26, núm. 1, abril-, 2014, pp. 41-72
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Sobre la complejidad de la gestión en una clase de matemática: entre lo planificado y la realidad del aula. Modelización algebraica de problemas planteados en Z*

Irma Saiz, Edith Gorostegui y Diego Vilotta

Resumen: En este artículo nos proponemos dar cuenta de los resultados de la exploración y caracterización de las estrategias docentes a propósito de la introducción al álgebra en clases ordinarias de secundaria. Nos referiremos a los gestos profesionales de un docente, relacionados tanto con la planificación de una clase como con su gestión en el aula. Observamos una serie de discrepancias entre sus expectativas y las producciones de los alumnos cuyo análisis nos permitió caracterizar la complejidad de la tarea docente.

Concluimos que la complejidad de dicha tarea en los casos estudiados es el resultado de la conjunción de distintos aspectos. Por un lado, los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor y su pretensión de constituir la clase como una comunidad de producción matemática que incluya plenamente la validación como parte de las tareas de los alumnos y, por el otro, la consideración de las razones de ser de los conocimientos matemáticos que se trabajan en la clase.

Palabras claves: estrategias docentes, resolución aritmética, ecuaciones, introducción al álgebra, números enteros, formación de profesores.

Abstract: In this article we intend to give account of the results of the exploration and characterization of teaching strategies related to the introduction to algebra in regular classes in high school. We refer to the professional attitudes of a teacher, related to the planning of a class and to classroom management. We point out a number of discrepancies between teacher's expectations and

* Proyecto de investigación aprobado y financiado por Ciencia y Técnica de la UNNE Res. F009-2011.
Fecha de recepción: 5 de octubre de 2013; fecha de aceptación: 14 de febrero de 2014.

the productions of students, the analysis of which allowed us to characterize the complexity of the teaching task.

We conclude that the complexity of the task in the cases studied is the result of a combination of aspects. On the one hand, the mathematical and didactic knowledge of the teacher and his claim to make the class act as a community of mathematical production fully including validation as part of the students' work and, on the other hand, the consideration of the essential reasons for the mathematical knowledge that is developed in the classroom.

Keywords: teaching strategies, arithmetic resolution, equations, introduction to algebra, integers, teacher training.

INTRODUCCIÓN

Una de las primeras tareas desarrolladas en el marco del proyecto de investigación: "Procesos de modelización algebraica en Matemática y en la introducción a su estudio, en clases ordinarias de Secundaria"[1] corresponde al objetivo: explorar y caracterizar las estrategias docentes que se despliegan en la introducción al álgebra en clases ordinarias. En este marco nos planteamos interrogantes del tipo: ¿Qué sucede en una clase? ¿Qué hace el docente en ella? ¿Por qué toma las decisiones que toma? ¿Qué efectos tienen sus decisiones sobre los aprendizajes de los alumnos? y observamos, registramos y analizamos clases de 2° año de Educación Secundaria o Media[2] donde se planteaban las primeras tareas algebraicas.

En el material empírico relevado, detectamos ciertas regularidades en las prácticas de enseñanza[3] que llevan adelante los profesores en este campo en particular, en relación con el papel que desempeña la planificación previa en la gestión posterior de la clase. Esto nos permitió definir una primera categorización de prácticas docentes según el grado de conformidad con su propia planificación en dos grandes clases: sujeción estricta o apertura a los "imprevistos" de la clase.

En este artículo informamos sobre la investigación centrada en un profesor que constituye, a nuestro juicio, un caso paradigmático de la primera clase, en el inicio de un trabajo con ecuaciones en el conjunto de los números enteros. Daremos cuenta de nuestro foco de análisis dirigido fundamentalmente a carac-

[1] Proyecto de investigación aprobado y financiado por Ciencia y Técnica de la UNNE Res. F009-2011.

[2] Los alumnos de este nivel tienen –en Argentina– una edad comprendida entre 12 y 17 años.

[3] En el sentido de acción didáctica definida en Sensevy (2007, p. 5).

terizar los gestos profesionales de este docente, en particular el tipo de recursos a los que apela cuando se enfrenta a situaciones imprevistas, que suponen una cierta ruptura con los objetivos previamente planteados. Seleccionamos para este artículo únicamente el análisis de las primeras dos horas de clase, debido a la riqueza de situaciones que surgieron relacionadas con el objeto de estudio de la investigación.

ANTECEDENTES

Diferentes autores (Bolea, 2003; Panizza, Sadovsky y Sessa, 1996; Sadovsky, 2003; Sessa, 2005; Ruiz, Bosch y Gascón, 2009) han investigado las condiciones didácticas que permitirían introducir a los alumnos al estudio de los objetos del álgebra en la Escuela Secundaria. Algunos de los resultados más importantes de estas investigaciones dan cuenta de la necesidad de considerar el pasaje de la Aritmética al Algebra así como la relación entre la semántica y la sintaxis del lenguaje algebraico y los conflictos de significados que se producen entre docentes y alumnos durante el trabajo con esos objetos.

Plantean también que el significado habitual de la ecuación en el nivel secundario, como una "igualdad con incógnita", se opone a la de restricción sobre un dominio, lo que trae como consecuencia una ausencia en el tratamiento de la letra como variable y mencionan a la vez que las tareas más importantes relacionadas con el aprendizaje del álgebra en la secundaria consisten en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico; el cálculo algebraico (interpretado como la manipulación formal de las reglas aritméticas con letras y números) y la resolución de ecuaciones. Sostienen que se soslaya de este modo el papel del álgebra como instrumento de modelización.

En relación con las prácticas docentes, Aline Robert (2001) ha puesto en evidencia que no hay una implicación sencilla entre los objetivos de aprendizaje que se plantean los docentes y los recursos que ponen en acción para lograrlos, siendo cada uno de estos –objetivos y recursos– complejos en sí mismos. No puede pensarse de este modo que exista una continuidad entre los conocimientos de los docentes –matemáticos y didácticos–, su proyecto de enseñanza, su acción en clase y las actividades matemáticas de los alumnos. Hay condicionantes tanto externos a la enseñanza (programas, horarios, hábitos de la institución, etc.) como internos, relacionados con sus creencias personales, sus costumbres, su necesidad de inserción social, etcétera.

MARCO TEÓRICO

Tomamos para nuestro estudio nociones teóricas del campo de la Didáctica de la Matemática y de trabajos relacionados con la enseñanza y al aprendizaje del álgebra en la escolaridad secundaria.

De la Aritmética al Álgebra

El objetivo fundamental de la introducción al trabajo algebraico es que los alumnos aprendan a abordar ciertos problemas, cuya algebrización permite tratarlos en toda su complejidad. Notemos que este trabajo implica la apropiación de un conjunto de significados y estrategias característicos de un género discursivo complejo: el concepto de ecuación, el significado del signo igual en álgebra, la utilización y manipulación de letras en estas escrituras, las propiedades de las operaciones, etcétera.

Asumimos que, para que sea posible un trabajo como el citado, es necesario considerar los conocimientos aritméticos que han podido elaborar previamente los alumnos, partir de sus propias producciones aritméticas y hacerlas evolucionar hacia modelos algebraicos con una gestión adecuada. El salto que implica esto último puede ser provocado con consignas específicas, donde ya no sea posible utilizar conocimientos aritméticos para tratarlas, pero sí, que puedan servir de control de sus producciones algebraicas.

En la escolaridad secundaria se suele ubicar el trabajo alrededor de las ecuaciones como el "camino real" de entrada al álgebra. En esta consideración, habitualmente la letra se utiliza para designar números desconocidos, es una incógnita y las ecuaciones serían entonces desde esta perspectiva "igualdades con incógnitas".

En las actividades de clase, se pone el énfasis en la adquisición de ciertas destrezas tanto en poner en ecuación los problemas que se plantean –entendida habitualmente como "traducción" del lenguaje natural al algebraico– como en la técnica conocida como del "despeje". No compartimos esta perspectiva de la enseñanza, por el contrario, asumimos una posición que la critica siguiendo a la autora Carmen Sessa (2005, p. 68):

> Al definir la ecuación como una "igualdad con incógnita", se acerca al objeto al campo de lo aritmético: es como una cuenta, de la cual se desconoce un

> término. La concepción que se cristaliza de este modo, asimila el concepto de ecuación al de "ecuación en una sola variable y con solución única" [...] no pueden comprenderse las ecuaciones lineales a una variable sin solución o con infinitas soluciones. Menos aún las ecuaciones cuadráticas o las ecuaciones en dos o más variables.

Juegos didácticos y gestos profesionales

Se trata de nociones importantes en la Teoría de la Acción Didáctica Conjunta (Sensevy y Mercier, 2007, p. 11) la cual ha sido desarrollada a partir de conceptos didácticos elaborados por Brousseau (1986, pp. 33-115) en su Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). La Teoría de la Acción Didáctica Conjunta refiere estos conceptos a un modelo que permite poner en evidencia algunos aspectos del mundo social y de la actividad humana.

En la noción de *juego* definida en esta teoría, la función del docente es la de permitir al alumno poner en acción la estrategia ganadora, ser garante de la validación de esa estrategia y a la vez lograr que él asuma la responsabilidad del juego, noción teórica de *devolución* de la TSD.

Los *juegos de aprendizaje* que proponen estos autores permiten pensar las clases como una sucesión de momentos en los que se van definiendo y redefiniendo nuevos juegos que podrían actuar como motores de avance del aprendizaje.

La teoría propone los *gestos profesionales* como modelo de la acción docente, en cuanto sucesión de juegos didácticos.

Lo que va a caracterizar entonces la acción del profesor es la cuádrupla: *1)* definir el juego, o sea, explicitar a los alumnos lo que se espera que hagan; *2)* lograr la devolución, es decir, obtener que los alumnos se hagan cargo del problema; *3)* regular, en el sentido de intervenir para que los alumnos comprendan, y facilitarles la producción de la estrategia ganadora, pero sin que esto implique sustituir a ellos en estas tareas; *4)* institucionalizar un saber, un procedimiento, una manera de actuar, etc. producto de las discusiones de la clase

La noción de "medio"

Esta noción, introducida también por Brousseau, y estudiada por distintos autores como Perrin-Glorian y Hersant (2003), Bloch y Salin (2003), Margolinas (1998), es otra componente esencial para interpretar los hechos de la clase.

En la Teoría de la Acción Didáctica Conjunta (Sensevy & Mercier, 2007, p. 14) se establece una diferenciación conceptual entre el *medio como contexto cognitivo común* y el *medio como sistema antagonista*.

El primer concepto alude a la necesidad de compartir un sistema común de significados entre el profesor y los alumnos. Lo que el profesor considera como conocimientos disponibles de los alumnos debería coincidir con los que efectivamente poseen, de tal manera que sirva de andamiaje indispensable para la *producción de estrategias ganadoras en el juego*. En este sentido, afirman que "un problema es aquello que escapa al contexto cognitivo actual" (Sensevy & Mercier, 2007, p. 15).

En la segunda acepción, la idea de *medio* como *sistema antagonista* hace referencia a que los alumnos se enfrentan a una situación a-didáctica para la cual tienen que producir una estrategia ganadora, es decir, resolver un problema o responder a una cuestión. En los inicios no disponen de los medios, es el conocimiento matemático en juego en dicha situación el que deberán disponer para lograrlo. Esta situación a-didáctica, tal como mencionamos, les devolverá una información sobre su acción, con lo que habrán validado o no la estrategia puesta en juego.

Situaciones a-didácticas y contrato didáctico

La noción de *contrato didáctico* de la TSD se liga estrechamente con las *transacciones didácticas,* en tanto que es esencial para describir a estas últimas:

> [...] ayuda a comprender de qué manera las transacciones didácticas se sustentan en las expectativas recíprocas que existen entre maestro y alumno; suministra un marco al estudio genético de la constitución de las normas en clase, y a la manera en que estas normas en determinado momento deben ser superadas o redefinidas en la dialéctica entre lo antiguo y lo nuevo. (Sensevy & Mercier, 2007, p. 9)

Otro concepto teórico necesario en nuestro análisis es el de *situación a-didáctica* (Brousseau, 1986). Se trata de una situación matemática específica de un conocimiento tal que, por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el jugador. Al respecto, Berthelot y Salin afirman:

> El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte, no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego. (1992; citado por Panizza, 2003, p. 62)

METODOLOGÍA

El profesor, cuyas prácticas docentes estudiamos, forma parte de la muestra seleccionada para responder al objetivo de exploración y caracterización de las estrategias docentes –anticipado en la Introducción– en una investigación tipo estudio de casos.

Para el análisis de las prácticas docentes, consideramos pertinente utilizar las componentes descriptoras de estas, elaboradas por Robert y Rogalski (2002): la *componente cognitiva* que permite analizar los escenarios previstos: actividades por plantear a los alumnos, contenidos por desarrollar y organización de la clase, organización institucional de los contenidos, conocimientos previos de los alumnos, anticipación de sus dificultades, y la *componente mediativa* que permite describir la puesta en escena de lo previsto, esto es, los desarrollos que tienen lugar en la clase: interacciones docente-alumnos, gestos profesionales, producción y razonamientos de los alumnos.

Para recabar información respecto de la primera componente, realizamos al profesor una entrevista semiestructurada, previa a la clase, con el objetivo de conocer el plan de clase o la secuencia de actividades prevista y su posición sobre las características del contenido. Una entrevista semiestructurada posterior a la clase, también aportó datos en relación tanto con esta dimensión como con las estrategias docentes desplegadas en la clase.

Los datos recabados sobre las clases nos permitieron describir esta componente de las prácticas docentes a partir de la cuádrupla definida por Sensevy y

Mercier (2007, p. 18) como los roles del docente o gestos profesionales: *definición, devolución, regulación* e *institucionalización*.

Completamos la descripción de esta componente a través del análisis de los problemas propuestos por el profesor a los alumnos desde un abordaje global correspondiente a los contenidos matemáticos involucrados y otro abordaje más local relativo a las tareas prescriptas y la correlación con los objetivos previstos por el profesor.

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

En el punto 1 de este apartado, nos centramos en la *dimensión cognitiva* a partir del análisis de la entrevista previa, de los problemas seleccionados y parte de la entrevista posterior, lo que nos permite tener acceso a los escenarios previstos por el docente para el trabajo con ecuaciones en el conjunto Z.

En el punto 2 "Desarrollo de la clase", nos centramos en la *dimensión mediativa* a partir de la filmación, transcripción, organización e interpretación de los hechos de las clases observadas, para dar cuenta de las prácticas docentes en la realización efectiva de la clase en interacción con el trabajo de los alumnos.

En esta última dimensión, profundizamos la caracterización de la *acción didáctica* del profesor, en el sentido que lo define Sensevy G. (2007, p. 6) como "lo que sucede cuando una persona enseña una cosa a otra persona", a partir del análisis de los gestos profesionales.

1. CONSTRUCCIÓN DE UN ESCENARIO POSIBLE: DIMENSIÓN COGNITIVA

Acerca de la entrevista previa

En esta entrevista, tomamos conocimiento del lugar que ocupan las actividades que planteará en la clase en la graduación elaborada en su institución escolar en torno a las ecuaciones, los objetivos específicos de esta clase y la anticipación efectuada de las dificultades de los alumnos.

El profesor afirma que la organización institucional en torno a las ecuaciones, asigna a 1er año de secundaria (año previo anterior al que se realiza esta investigación) el estudio de este contenido en el conjunto de los números naturales; la profesora responsable de ese 1er año –relata el profesor– organizó a este fin un proceso de modelización –vía la generalización– de una situación de conteo que involucra la producción de una fórmula:[4] *En realidad en 1er año ellos ya dan ecuaciones pero en N, en los naturales...*[5] En la entrevista posterior amplía esta información diciendo que: *En esta escuela estamos organizados para que en 1er año se dé este tema pero todo con positivos, incluso las fracciones. También se les da problemas de ecuaciones pero siempre con números positivos*.

En las clases de 2° año, en el cual se desempeña el profesor –que analizamos en esta investigación–, se prevé el estudio de las ecuaciones en el conjunto de los números enteros y el profesor aclara que en esta clase planteará un conjunto de problemas para los cuales pretende que los alumnos los resuelvan planteando una ecuación para cada uno. También nos informa que en días previos planteó un trabajo con ejercicios de ecuaciones para practicar pasajes de términos y la resolución de las mismas.

Es también en esa entrevista posterior donde –retomando algunos conceptos ya vertidos en la previa– aclara que la concertación institucional con los colegas sobre la graduación de contenidos, no incluye una discusión sobre las estrategias por usar: *En esto nos ponemos de acuerdo todos los profesores, hacemos unas guías, hablamos entre nosotros, pero después cada uno da las actividades en su aula como le parece.*

Las respuestas del profesor en la entrevista previa nos permiten identificar con bastante claridad cuáles son sus intenciones didácticas para la clase que observamos: avanzar en el conocimiento de ecuaciones al plantearles problemas en el campo numérico de los enteros. Para el profesor la clase planificada consiste básicamente en actividades de reutilización de nociones; los problemas involucran distintos conocimientos –números enteros, operaciones, ecuaciones– y los alumnos deben identificar por ellos mismos qué deben aplicar y la forma de hacerlo.

En el trabajo previsto, aparece algo nuevo para los alumnos y el profesor argumenta que será accesible para ellos.

Confía en que podrán plantear –sin mayores dificultades– las ecuaciones correspondientes a los problemas, ya que se ha organizado y realizado el trabajo previo que considera necesario. No obstante, también anticipa que tomar

[4] El problema presentado involucra la elaboración de una fórmula para el paso *n* de una cierta colección que se construye iterativamente. La producción de la fórmula es el punto de apoyo para abordar cuestiones constitutivas del lenguaje algebraico como la resolución de ecuaciones (Sessa, 2005).

[5] Utilizaremos letra cursiva para indicar que se trata de expresiones del profesor o de los alumnos.

a Z como nuevo conjunto de trabajo, puede provocar la aparición de algunas dificultades, en relación con los cálculos necesarios para la resolución de estas.

Acerca de los problemas

Los problemas seleccionados por el profesor[6] para la clase que analizamos son los siguientes:

Resolvé las siguientes situaciones, justificando tus respuestas.

1. *¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado −107?* Respuesta: Sí, y es −134.
2. *¿Existe algún número entero que sumado a −27 dé como resultado −107?* Respuesta: Sí, y es −80.
3. *¿Es posible hallar algún número entero que multiplicado por −89 dé como resultado −5 073?* Respuesta: Sí, y es 57.
4. *Existe algún número entero que multiplicado por 74 dé como resultado −9 475?* Respuesta: No existe.
5. *¿Hay algún número entero que al dividirlo por 126 dé como resultado −478?* Respuesta: Sí, y es −60 228.
4. *¿Cuál es el número entero que al multiplicarlo por −5 y sumarle 434 da como resultado −772?* Respuesta: No existe.

Estos problemas presentan una cuestión no habitual en la escuela que es ocuparse del dominio de las ecuaciones. Como lo afirma Carmen Sessa (2005, p. 68): “Suelen ser escasos los problemas en que se pregunta por la posible existencia de una solución...” Siguiendo a la autora podemos afirmar que “La ecuación, en definitiva, define un conjunto: el de valores de *x* para los cuales es verdadera”. Por tanto, resulta totalmente pertinente para involucrarse en un trabajo algebraico indagar si existe un número que cumpla ciertas condiciones explicitando el dominio de la ecuación, en este caso Z.

Desde un punto de vista epistémico, podemos analizar que dos de los problemas seleccionados no tienen solución en Z; del resto, tres tienen solución negativa y uno positiva; por tanto, la pregunta sobre si existe o no un número entero que verifique las condiciones impuestas en cada situación queda plenamente justificada, dado que en algunos casos, la respuesta será negativa.

[6] Para cada enunciado agregamos su respuesta para facilitar la lectura.

Considerando la finalidad del profesor –de trabajar con ecuaciones en Z– y del carácter de necesidad de los conocimientos, podemos afirmar que no es necesario plantear una ecuación para resolverlos, ya que son suficientes procedimientos aritméticos basados en las propiedades de las operaciones definidas en Z. Por ejemplo, si se trata de determinar un número que sumado a 27 dé por resultado –107, puede pensarse que la resta permite determinar uno de los dos sumandos cuando se conoce el otro y el resultado de la suma, dado que la resta es la operación inversa de la suma. Así, el número buscado puede ser obtenido restando –107 – 27 sin necesidad de plantear una ecuación.

Si de todos modos se planteara, la forma del enunciado facilitaría en gran medida su planteo: la incógnita queda claramente definida al preguntar si hay algún número... y en cierto modo –específicamente en estos problemas– la "traducción" en símbolos de las distintas partes del enunciado, produciría una formulación muy cercana a la ecuación esperada; en el primer problema: $x + 27 = -107$.

Una cuestión no menor aparece, a partir de identificar dos tareas posibles en estos problemas, una es *averiguar* si un cierto número existe o no en el conjunto de referencia y la otra corresponde a *determinarlo*. Esta diferenciación de tareas permite a su vez distinguir entre las respuestas posibles: "Sí/No existe" o "Sí existe y es tal número". Averiguar si existe o no en Z un número, sin determinarlo, es posible en ciertos casos –como ya mencionamos– atendiendo a las operaciones involucradas en cada enunciado y sus propiedades. Por otra parte, en Matemática se sabe que la búsqueda de la solución –recurriendo o no al planteo de una ecuación– puede darnos información sobre la existencia del número, según si el número hallado o por hallar cumple o no las condiciones dadas.

El *tamaño de los números* –variable didáctica definida por el profesor– no debería ser considerada como una variable didáctica pertinente en relación con recurrir a plantear una ecuación para resolverlos. En cuanto a las operaciones involucradas, se puede identificar una cierta evolución en la graduación de los problemas seleccionados, los dos primeros involucran solo sumas y restas, luego solo productos o divisiones y, finalmente, el último involucra una resta y una división.

Se puede observar también que la variabilidad en los problemas 1 a 5 estuvo centrada en el signo de los números; por su parte, es el problema 6 en el que se abandona el modelo $a + x = b$ o bien $a.x = b$ o $a:x = b$ donde solo se involucra una operación y se convierte en $a.x + b = c$.

Dada la presencia de dos operaciones, suma y producto y del tamaño de los números, se puede anticipar la mayor complejidad de este último problema, cuya resolución aritmética será bastante difícil para los alumnos. Sin embargo, no significará que recurran necesariamente a plantear una ecuación para su resolución.

El análisis efectuado nos permite suponer que, a pesar del cuidadoso análisis del profesor para la selección de los problemas, la clase organizada tiene pocas posibilidades de desarrollarse adidácticamente, si se asume que el conocimiento involucrado corresponde al planteo de una ecuación.

En cuanto al conjunto Z de números enteros, estas actividades les podrían permitir avanzar en la comprensión, siempre compleja, de las operaciones y de sus propiedades, pero también de las rupturas con las del conjunto N, sus formas de representación, su sentido, etc. Por ejemplo, discutir la relación que existe entre sumar un negativo y restar, cuestión muy presente en el planteo y resolución de ecuaciones en Z.

En síntesis, a partir de la información recabada en la entrevista previa a la clase y el análisis de los problemas, podemos afirmar –en términos teóricos– que el profesor construyó un escenario donde los alumnos serán confrontados al problema de determinar la existencia de un número que satisfaga una cierta condición, y espera que planteen una ecuación. Considera que sus alumnos comparten con él un contexto cognitivo actual, es decir, "un sistema de significados naturalizados que, de cierta manera, tiene la fuerza de una evidencia" (Sensevy, 2007, p. 16), concepto identificado por Brousseau[7] como el sistema anteriormente enseñado. El profesor asume que el planteo y resolución de ecuaciones en N, así como la operatoria en Z, forman parte de este contexto común.

Para la clase, seleccionó una situación –lista de problemas– como un medio antagonista al contexto cognitivo actual de los alumnos, en el cual se enfrentarán a lo "nuevo" de la clase –que la incógnita pueda ser un número negativo– lo que no formaba parte del contexto cognitivo común.

La clase, tal como ha sido planteada, puede interpretarse como un *juego didáctico* (Sensevy, 2007, p. 17) basado en la *insuficiencia* del contexto cognitivo actual de los alumnos, creándose de este modo una necesidad de adaptación en términos piagetianos.

[7] Citado en Sensevy y Mercier (2007).

2. DESARROLLO DE LA CLASE: DIMENSIÓN MEDIATIVA

El inicio de la clase, correspondiente a la resolución del primer problema, no siguió en general el desarrollo previsto por el profesor; los alumnos no plantearon espontáneamente una ecuación para resolver cada uno de los problemas tal como había imaginado, obligándolo a modificar su proyecto original.

Para comprender en profundidad y tratar de explicarnos "qué pasó en esta clase", es decir, qué relaciones se pueden establecer entre lo planificado y su desarrollo, cómo gestionó el profesor lo inesperado, qué decisiones tomó, qué efectos produjeron… analizamos el registro audiovisual de la clase y su posterior transcripción. Este análisis se centró en la identificación de momentos que nos permitieran comprender el avance de los aprendizajes en la clase.

Determinamos así, dos grandes momentos –que pueden ser reconocidos como juegos didácticos diferentes– en torno a un quiebre dado por un cambio de tarea para los alumnos, plasmado en la consigna: *Escriban la ecuación.*

Primer juego: ¿Hay algún número?

Este primer momento de la clase se inicia con la presentación a los alumnos de los seis problemas: *¿Hay algún número entero que verifique…?* con la consigna: *Resolvé las siguientes situaciones, justificando tus respuestas.*

El primer problema es el siguiente:

1) ¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado –107?

En este momento de la clase la intención de profesor es que los alumnos acepten la responsabilidad de la resolución de los problemas entregados. Algunas de sus intervenciones avalan esta interpretación:

- *Resolvé con tu compañero.*
- *Dejá, no digas, esperá, no digas todavía, después vemos.*
- *Y si no hay, decí por qué no hay, pensá.*

Los alumnos comprenden claramente la situación planteada y la tarea que les compete –buscar el número en las condiciones pedidas– y muestran la intención de trabajar autónomamente, lo que nos permite suponer que se trata de una forma habitual de trabajo en el aula.

Sin embargo, al enfrentarse al problema, rápidamente se escuchan demandas de ayuda. El profesor mantiene su decisión de no proporcionar información sobre posibles procedimientos, con el objetivo −asumimos− de sostener un funcionamiento adidáctico de la situación planteada. Resiste la presión de los alumnos y los sostiene en el problema sin dar indicaciones en relación con el saber.

Las primeras dudas que aparecen se refieren a la existencia del número aludido en el enunciado; es el tipo de tarea lo que las provoca y se relaciona en gran medida con la convicción de que no puede existir un número que sumado a 27 de por resultado −107 debido a que este "resultado" es negativo.

Diálogo 1

A1: Profesor, ¿cómo puede ser que hay algún número entero que sumado... que sumado a 27 dé como resultado −107?
P: Te está preguntando eso.
A2: ¿Y no nos puede decir sí o no, nomás?
P: Resolvé con tu compañero. No, si hay, encuentren.
A3: ¿Y si no hay?
A2: ¿Y no nos puede decir sí o no, nomás?
P: Resolver dice, Gabriel.
A2: ¿Pero cómo puede ser sumado?
[...]
P: Y bueno, vamos a discutir.
A1: No entiendo.
A4: Ni yo tampoco.
A5: Profesor, muy difícil es...

Los alumnos leen y releen el problema, conversan entre ellos. Para algunos, no se puede buscar un número si no se sabe previamente que existe, por lo tanto solicitan la aclaración del profesor: *¿y no nos puede decir sí o no, nomás?* asumiendo que si supieran que existe podrían buscarlo. Saber que buscar el número es una de las formas posibles de averiguar si existe alguno en las condiciones dadas, no parece formar parte de sus conocimientos actuales.

Como respuesta, el profesor relee la consigna precisándola en dos aspectos: por un lado, agrega que es necesario determinar el número buscado si es que existe y, por otro, aclara el término justificar: *Bueno entonces, si hay, si encuentran, díganme cuál es, y si no, digan por qué no, o sea, eso significa que justifiquen.*

Más allá de las dudas y cuestiones planteadas, la afirmación de un compañero de haber resuelto el problema, impulsa al resto a tratar de determinar el número.

Algunos alumnos expresan que deberían hacer una operación con el número 27; el nuevo conflicto al que se enfrentan se relaciona con no poder concebir que se pueda "sumar un número negativo". Posiblemente, el profesor se refería a este tipo de cuestiones –en la entrevista previa– *[...] porque ahora la solución de las ecuaciones van a ser negativos y eso no hicieron todavía...*

Diálogo 2

A3: ¿Qué tengo que hacer? ¿Sumar (ya que la consigna dice: ...**sumado** a 27) *o que el resultado sea −107? ¿Cuál es? ¿La suma de todo o la suma que hay que hacer?*
P: Te tiene que dar la suma. ¿Cuánto te da la suma?
A3: 161 (Este número surge de la suma de 27 más 134; el origen de este último número no fue registrado, pero se puede asumir que se trata de la suma de 27 más 107).
P: Pero entonces no cumple lo que está diciendo.
A3: No, pero le digo, ¿le pongo el resultado que me da en la suma?
P: ¿Cuál hiciste?, ¿cuál es tu número entero?
A3: 134
P: ¿Que sumado a 27 te da como resultado −107?
A3: ajam
P: Y bueno, entonces si vos decís que si hacés la suma, no te da −107...
A3: Sí, me da...
P: Bueno, entonces por qué me decís si ponés...
A3: No, yo digo la suma de 134 + 27 me da 161. Pero la suma original sería si es menos, entonces me da −107.
P: O te da −107 o te da 161...
A3: −107
P: Y entonces ¿la otra suma por qué?
A3: No, la otra suma es sin el menos.
A5: Acá le sumó y acá le restó.
A3: La otra suma es sin el menos.
P: Ah, y ¿cuál es la diferencia?
A3: El menos... la suma con el menos.

P: *Entonces qué es... ¿cuál es tu conclusión?*
A3: *Que me da −107 pues.*
P: *Entonces cumple... satisface la...* (El P no concluye la frase).

Este tipo de diálogo se suscita cuando el profesor se acerca a algunos grupos. A uno de ellos, en respuesta a sus dudas y cuestionamientos, les provee un recurso de control de sus producciones: *Te tiene que dar la suma,* entendiendo que el número encontrado más 27 debería dar por resultado −107. Sin embargo, los alumnos dudan de cuál es la suma de la que está hablando el profesor, ¿será la planteada en el enunciado y cuyo resultado es −107, o tal vez la "suma" referida al número que tienen que "sumar" a 27? Por tanto, no pueden interpretar el aporte del profesor en términos de control de su producción, ya que no resuelve el conflicto en el que están.

Algunos lo hacen funcionar, como si fuera la afirmación de que hay que lograr que "dé −107" aunque para ello haya que "restar" un número a 27, en lugar de sumarlo como indica el enunciado, es decir, la condición sobre el resultado les aparece como más importante que la indicación de "sumar" a 27. Y para ello deciden restar el número 134, conservando la positividad de los números involucrados y resolviendo su conflicto.

El profesor asigna un cierto tiempo al trabajo independiente de los alumnos, en espera de la resolución del problema o tal vez la formulación de una ecuación al menos de parte de algunos de ellos. Cuando la lectura de "lo que está sucediendo en el aula" le informa que estos procesos no avanzan, decide oportunamente organizar una fase de discusión sobre los procedimientos.

Diálogo 3

P: (Desde el pizarrón) *A ver, vamos a empezar a ver, para ayudarle a algunos de los chicos que todavía no están encontrando. A ver quién me puede decir... pasá. Bueno, Maxi, pasá a hacer el primero.* (A6 pasa al pizarrón a pedido del profesor)
P: *Vamos a ver lo que hace Maxi y vamos a preguntarle lo que no hace.*
A6: *Yo ya encontré.*
P: *¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado −107?*
(A6 escribe en el pizarrón $\begin{array}{r} -134 \\ \underline{27} \end{array}$

Y afirma que el número buscado es −134).

A6: Ese es profesor.
P: ¿Cuál es?
A6: 134
P: Bueno, la mayoría de los que encontraron, encontraron ese número. Hay gente que todavía no encontró. ¿Cómo llegaste a ese?
A6: Haciendo la suma profesor.
P: Haciendo la suma... pero ¿cómo fuiste buscando?
A6: Me fui fijando qué número sumado a 27 da 107.
P: ¿Cuánto te tiene que dar?
A6: 107
P: −107!!!
A6: −107

Al parecer, el profesor acepta que el número buscado es 134, en lugar de −134. Ese número empezó tempranamente a circular en la clase y el profesor parece aceptarlo diciendo: *Bueno, la mayoría de los que encontraron, encontraron ese número.*

Inmediatamente después del diálogo anterior, el profesor decide intervenir en la clase para “forzar” la aparición de las ecuaciones.

Diálogo 4

P: Bien. ¿Hay alguna otra manera de dar más fácil esto?
As (varios): No
A6: No profesor, no hay. O sea, para mí no hay.
P: ¿Y cómo vamos a hacer?
A6: ¿Eh?
P: ¿Cómo vamos a hacer? ¿Cada vez que necesitemos tenemos que buscar nomás así como hicieron?
A6: Y yo busqué, no va a venir solo el número corriendo profesor. Hay que buscar nomás...
P: Pero yo vi que alguien estaba haciendo de otra manera. [...] ¿Vos querés demostrar cómo estabas haciendo? (El alumno no accede al pedido del profesor)
P: Pero además, estos problemas no vinieron así porque sí hoy, no más cayeron. Tiene que ver con lo que venían trabajando. ¿Qué venían trabajando?

A1: Números
A5: Ecuaciones
P: Ecuaciones. Entonces ¿se puede plantear una ecuación acá? (Algunos alumnos dicen sí, otros, no)
P: A ver, ¿cómo plantearíamos la ecuación?
[...]
P: Hacé Maxi, ¿cómo plantearías la ecuación?
A6: No sé profesor, si yo hice de esa manera.
P: Bueno, a ver piensen Uds.

El primer juego en cuatro escenas

En el transcurso de la clase podemos identificar cuatro escenas: la de *inicio* del primer juego (presentación de la tarea), la de *desarrollo* de este (trabajo en pequeños grupos), fase de *discusión* (confrontación colectiva) y *cierre* y *anuncio* del segundo momento.

Los diálogos que hemos incorporado en las páginas anteriores corresponden en líneas generales a estas escenas: diálogos 1 y 2 al del desarrollo del juego, el diálogo 3 a la confrontación y el 4 al cierre del primer momento. Estos diálogos nos permiten mostrar los pasajes más importantes de la clase, caracterizando los gestos profesionales del docente.

En la escena inicial, podemos observar un primer gesto de *definición* del juego mediante la entrega de los problemas, definición que más adelante es precisada por el profesor, aclarando que también deben determinar el número buscado y explicar las razones de la respuesta dada. La presentación que realiza de la tarea y en particular sus intervenciones, así como las formas de trabajo que parecen ser habituales en el aula, favorecen que los alumnos acepten la responsabilidad de resolver el problema.

En la escena del *desarrollo* del juego, en la que los alumnos se encuentran dedicados a la resolución del problema, el profesor realiza muy pocas intervenciones y solo en el seno de los grupos que solicitan su ayuda.

Más allá de la expectativa del profesor respecto de la utilización de las ecuaciones, se puede afirmar que, en cierto modo, logra la *devolución* del problema, consiguiendo un funcionamiento adidáctico: los alumnos asumen la responsabilidad de la resolución y podrían validar por sí mismos sus producciones dada las características de este. Por su parte, el profesor acepta no intervenir en relación con el saber, si bien, en una de sus participaciones, da indicaciones sobre cómo validar si el número encontrado es o no la solución del problema.

Sin embargo, no logra que la mayoría de los alumnos establezcan una relación adecuada con la situación, ya que los conocimientos anteriores no les permiten producir razonamientos o procedimientos que hagan avanzar la resolución del problema y, por tanto, el saber. Los alumnos, lejos de plantear una ecuación, se enfrentan al problema desde una mirada aritmética y buscan la solución a partir de sus incipientes conocimientos de los enteros, de sus operaciones y propiedades.

La tercera escena de confrontación y *discusión* de procedimientos o resultados ocupa un espacio muy corto de tiempo. Puede observarse que el cálculo escrito (diálogo 3) no permite obtener el número buscado, se trata más bien de un inicio de verificación de que −134 es la solución al problema.

En cuanto al profesor, sus preguntas apuntan más bien a la verificación –en términos de verificación de una ecuación– mientras que los alumnos hablan de las operaciones que tienen que hacer para resolverlo.

Una vez transcurridos aproximadamente 20 minutos de clase, no puede afirmarse que al menos algunos alumnos hayan identificado claramente el número −134 como respuesta al problema y en el pizarrón ha quedado la escritura incorrecta: $134 - 27 = -107$. Algunos hablan de 134, diciendo que ese es el número y otros agregan "es menos", como si un número negativo estuviera constituido por un número y un signo; en cierto modo, de la misma manera que con frecuencia consideran que una cantidad de magnitud está formada por un número y una unidad de medida, la cual es claramente menos importante que el número.

La confrontación de los pocos procedimientos o resultados obtenidos se realiza en general en un registro oral; la falta de discusión sobre las escrituras aritméticas correspondientes impide una formulación precisa y conspira contra la claridad del procedimiento, de su formulación y de la resolución.

Si el profesor hubiera decidido cambiar el rumbo de la clase –frente al intento de los alumnos de resolver el problema con herramientas aritméticas– debería haberse involucrado en las producciones planteadas por ellos y realizar acciones de regulación, como discutir si una suma de números enteros puede tener un resultado negativo, recordar las reglas de la operatoria de enteros, analizar la relación entre sumar un número negativo y restar su opuesto, lograr escrituras de los cálculos realizados, clarificar que en este caso, no se trata de encontrar el resultado de una operación, sino uno de los sumandos, discutir y formular los modelos implícitos que están desarrollando, hacer validar las estrategias propuestas, etcétera.

Sin embargo, sus intervenciones no colaboraron de la manera más pertinente en esa dirección. Interpretamos que el profesor concibe las incipientes producciones aritméticas de sus alumnos en términos de distancia al objetivo propuesto en su planificación: que planteen y resuelvan una ecuación.

Esta interpretación está fundamentada en la falta de intervenciones regulatorias del profesor, claramente visibles en el registro y en el uso de ciertas expresiones como en la frase que inicia: *Entonces cumple... satisface la...* sin llegar a concluirla, al igual que en la ausencia de institucionalizaciones.

Es una ausencia comprensible, ya que el objeto matemático que pretende poner en juego el profesor en la clase no corresponde a las producciones de los alumnos.

En la última escena de este juego, podemos observar que, del trabajo anterior, el profesor sólo retoma la dificultad a la que se enfrentaron para encontrar el número buscado (*¿Hay alguna otra manera de hallar más fácil esto?*), aspecto que espera –tal como mostraremos más adelante– le permita atribuir a las ecuaciones una razón de ser.

En ese marco, no tiene cabida retomar las producciones de los alumnos ni poner en relieve la respuesta del problema, ya que, de hacerlo, cobraría fuerza la existencia de otros métodos y las ecuaciones dejarían de ser indispensables. Su intención es, más bien, instalar en cierto modo como primordial tanto la dificultad de la búsqueda como la falta de sistematización o algoritmización de la resolución. Las ecuaciones podrían entonces aparecer para solucionar ese estado de cosas.

Intervenciones retomadas de los diálogos 3 y 4 y confirmadas en la entrevista posterior nos ofrecen otros indicios de la reorganización que el profesor realiza de su gestión ante el imprevisto presentado. Formula preguntas cuyas respuestas espera pongan en evidencia las búsquedas erráticas que realizaron los alumnos.

P: ¿Cómo llegaste a ese número?
A8: Haciendo la suma profesor.
P: Haciendo la suma... pero ¿cómo fuiste buscando?
A8: Me fui fijando qué número sumado a 27 da 107.
[...]
P: ¿Cómo vamos a hacer? ¿Cada vez que necesitemos tenemos que buscar nomás así como hicieron?

En cuanto a la aparición en el seno de la clase de la palabra "ecuaciones", podemos analizar la negociación "a la baja" que conduce el docente en esa última escena. Se trata del ya famoso efecto Topaze, identificado por Brousseau G. en la década de 1980. Como el docente no "puede" ni "quiere" decir directamente el recurso que espera usen sus alumnos, es decir, las ecuaciones, "sugiere" la respuesta disimulándola bajo *códigos didácticos cada vez más transparentes* (Brousseau, 1986). Pero de esta manera, el problema ha cambiado totalmente. Ante los fracasos repetidos –los alumnos no dicen "ecuaciones"–, el profesor *mendiga una señal de adhesión y negocia a la baja las condiciones* en las que algún alumno terminará por decir "ecuaciones".

G. Sensevy (2007) alude a este fenómeno –así como al de Jourdain (Brousseau, 1986)– caracterizándolo como "hacer trampas en el juego" por parte del docente: "El profesor puede estar tentado de dar directamente a los alumnos las informaciones referentes al saber, permitiendo así la producción de comportamientos que imitan la estrategia ganadora", si bien no olvidamos que, en el caso que nos ocupa, no se trata de la resolución de un problema, sino de recurrir a un procedimiento en particular: plantear una ecuación.

Finalmente, en un diálogo con los alumnos, donde el profesor "lleva casi totalmente el peso" de la tarea, consigue que esta –que inicialmente consideró sería ejecutada por los alumnos– quede realizada.

Lo que sucede en esta clase está muy bien descripto por G. Sensevy (2007, p. 25): "Aunque el juego didáctico posee una gran parte de contingencia en el funcionamiento *in situ*, su arquitectura fundamental está dada en un contexto externo a la clase, durante la preparación de las actividades".

Es a partir de lo que el profesor comenta sobre sus intenciones y planificación en la entrevista previa como hay que analizar esta clase, en particular, las decisiones que toma y la gestión que realiza.

En cuanto a los alumnos, ya hemos mostrado que sus conocimientos sobre los números enteros y sus operaciones no son suficientes para responder aritméticamente a la pregunta planteada.

Puede observarse que piensan los cálculos en términos de operaciones en N; por ejemplo, no pueden concebir una suma cuyo resultado sea un número negativo y la solución que proponen es restar un número positivo. Las rupturas de las operaciones en Z con las de N y con sus propiedades son aún desconocidas.

En el trabajo en equipo, los alumnos producen –aunque muy pocos los escriben a pesar del pedido insistente del profesor– diferentes cálculos con los números involucrados en el enunciado o que han ido obteniendo al sumar o restar 27 y 107, como los números 161, 134 y 80.

Los cálculos que realizan –como puede verse en los diálogos– tienen la forma del cálculo vertical ("suma parada") propia de los números naturales, pero poco pertinente para el cálculo en Z.

Segundo juego: escribir una ecuación

El juego que se plantea en esta segunda parte de la clase ya no es el juego inicial caracterizado por la pregunta *¿Hay algún número...?* La tarea ahora, es *Escribir una ecuación* para resolver ese mismo problema. El profesor deberá entonces *definir* el nuevo juego.

Diálogo 5

P: *Ahora lo que van a hacer es buscar cómo podemos escribir eso, o sea, cómo podemos plantear la ecuación para encontrar la manera más fácil de resolver. ¿Está? Dale, escribimos.*

A6: *¿Y qué escribimos?*

P: *Lo que vamos a hacer en el punto uno es tratar de plantear una ecuación, buscando una manera más fácil, es decir, una expresión que nos permita hallar ese valor más fácil.*

En esta *definición*, el profesor agrega a la consigna una cierta justificación de por qué pedirles que utilicen ecuaciones: *para hallar más fácil el número.*

Para que el nuevo juego pueda desarrollarse, no es suficiente definirlo, el profesor debe *restituir* una relación adecuada de los alumnos con el medio que les plantea, y ellos tienen que aceptar las nuevas condiciones. Sin embargo, parecen recibir la nueva tarea con cierto fastidio y desgano. Uno de ellos dice: *¡¡¡Ya está el 1!!!*, aludiendo a que ya resolvió el primer problema, si bien su respuesta había sido 134.

El profesor tiene que multiplicar sus indicaciones para reinstalar, el trabajo de los alumnos en la clase:

- *Dale, resolvé y trabajá en tu hoja.*

- *Ahora tienen que trabajar, tienen que escribir... ¿cómo pueden escribir esto como una ecuación?*
- *Quiero ver en sus hojas el trabajo...*

Frente a la afirmación de varios alumnos de no haber entendido la tarea, el profesor retoma el enunciado del problema.

Diálogo 6

P: La pregunta es: ¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado −107?
A10: [...] 80.
P: ¿Te da −107?
A10: Me da 107.
P: Y acá dice −107.
A10: [...]
P: Entonces, ¿cómo hacés para que te de −107?
A10: [Sonríe]
P: Y eso te pregunta...
A10: [Se ríe]
P: ¿Qué número le podés sumar a 27 para que te de −107?
[Se ríe y se pone a trabajar]

La primera parte de la clase no ha dejado en los alumnos la sensación de haber resuelto el problema, pero intentaron resolverlo y, cuando el profesor en estos momentos reitera el enunciado del problema, retoman su resolución aritmética −*el número buscado es 80*− con las mismas dudas y dificultades con la operatoria en Z.

En este contexto, el profesor decide "guiar" −interactuando con los alumnos− el planteo de una ecuación y parte de su resolución.

Diálogo 7

P: Bueno, a ver. Vamos a mirar cómo podemos plantear la ecuación. Lo que pregunta es... Agustín, escuchamos. La pregunta dice: ¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado −107? Acá Maxi encontró. Pero Maxi fue tanteando hasta que encontró el número. Pero *no podemos seguir buscando así, al tanteo, cuál es el número. Para eso, entonces, vamos a plantear la ecuación de este tema. Cuando yo digo ¿Hay algún número? ¿qué estamos diciendo ahí...?*

As (varios): *equis.*

P: Estamos buscando un valor de equis. O sea, a ese que no sabemos le llamamos x.

Alumnos: Sí.

P: Y después dice "que sumado a 27"...

A (varios): *Más 27.*

P: Más 27... dé como resultado, dé como resultado...

A10: −107.

P: −107 (Escribe en el pizarrón: $x + 27 = -107$).

P: Bien, tiene alguno, ¿ya tenían esto escrito?

A6: Yo ya sabía profesor... No quería decir nomás.

P: Bueno, entonces, lo que hay que hacer ahora ¿qué es?

A6: Despejar.

A6: Pasar.

P: ¿Qué hago?

A6: Pasar.

A10: Más 27 al menos.

P: O sea que, pasar... Agustín

P: Pasá Miriam.

A10: Usted me ayuda profesor.

(Escribe −27 al lado del −107 y encierra estas dos cifras en un círculo).

Queda escrito así: $x + 27 = -107 - 27$

P: Bueno, hacé.

(Mira la pizarra, buscando una solución. Los compañeros le gritan 134 y 80)

A10: Bueno, callensé.

Hace una resta en el pizarrón: −107 − 27 = 80. En el pizarrón la alumna agrega a lo que está lo siguiente:

$$x \quad + \quad 27 \quad = \quad -107 \quad - \quad 27$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \hline 80 \end{array}$$

P: *A ver, ella dice que es 80, que 80 es el valor de equis. Quiere decir que yo lo reemplazo acá* (señala la x) *y te tiene que dar ¿cuánto? te tiene que dar −107 y ¿80 + 27 te da −107?*

A (varios): No.

A8: Sí, le da 107 pero positivo profesor.

P: Me da 107 positivo, o sea que 80 no puede ser.

A8: 134 es el número.

P: O sea, ¿qué está pasando?

A8: La hizo mal, porque tenía que pasar al de la suma, tenía que sumar los dos negativos, y ahí tenía que sumar y le da 134.

P: ¿Entendés lo que te dice él?

A10: No.

A (varios): Yo tampoco.

P: Lo que él te dice es que estás sumando mal esto: −27 − 107.

A8: Estás sumando mal, le tenés que cambiar el más.

A11: Ah, hay que sumarle.

A8: Qué, ¿querés dividirle?

A10: Son dos negativos...

A8: Sí, pero...

A11: Hay que sumarle esos dos, pero es resultado positivo. Es más...

A8: Menos, menos... o sea, menos... 107 − 27 más te da todo negativo...

A11: 107...

A6: −107 + 27 ahí te da.

A8: −107 − 27 [se ríen].

A10: −107... ¿y después?

A8: -−27

La alumna escribe al lado de la otra cuenta lo que le dicen sus compañeros (Maxi):

$$\begin{array}{r} -107 \\ -27 \\ \hline 134 \end{array}$$

P: Es lo que te quedó acá.

A8: Y bueno, ahí tenés que sumarle. Y eso es. ¿O no es así?

P: ¿Es igual a 134?

A8: Y sí, así tiene que ser.

A11: −134

A8: Ah, sí, −134 (la alumna corrige el signo de 134 en el pizarrón).

P: *Bueno, ahora, si ponemos acá −134 + 27 tiene que ser igual a −107. ¿Cumple o no?*

A (varios): *No.*

P: *¿No?*

A (varios): *Sí.*

P: *Sí me dicen, de los dos lados. Sí este es el valor al que habíamos llegado... Bueno, ahora vamos a hacer el segundo problema.*

Cuando el profesor inicia el diálogo conducente a escribir una ecuación, los alumnos se sienten nuevamente convocados y participan activamente. Encuentran que esta es una tarea conocida: llamar x al número buscado o desconocido, despejar o pasar términos de un lado al otro de la igualdad para resolverla... claras "marcas" del trabajo previo mencionado en la entrevista.

En ese primer momento, su participación en relación con el saber se acrecienta, ya no se lo percibe insistiendo en que sean los alumnos los que realicen la tarea. Va señalando los distintos pasos del planteo y parte de la resolución a partir de las preguntas que formula a los alumnos y en esta gestión, parece haber recuperado una posición confortable.

Una vez escrita la ecuación y despejada la x, el profesor retoma su postura de retirarse del centro del proceso y asigna nuevamente a los alumnos la responsabilidad de realizar la tarea, no ya en pequeños grupos, sino en el pizarrón, con toda la clase. Aparecen nuevamente cuentas "paradas" junto con cálculos escritos en forma horizontal.

De esa manera, asoma finalmente en escena −40 minutos más tarde de lo previsto− la ecuación esperada: $x + 27 = -107$ y su expresión equivalente: $x = -107 - 27$.

Resurgen conflictos con la operatoria de enteros; por ejemplo, algunos alumnos −e incluso el profesor− hablan en relación con la última expresión, de la suma de dos negativos, mientras que otros están pensando, como corresponde al problema, en una resta entre un negativo −107 y un positivo 27. Pensarlo como suma involucra aceptar la igualdad $-27 = +(-27)$, expresión en la que el número 27, que está restando, ha cambiado de positividad y ahora "es" negativo. Se trata de una cuestión nueva: la concatenación de dos signos, correspondiente a un trabajo en Z que no se planteaba en N.

El segundo juego

El desarrollo del segundo juego muestra claramente la ausencia de un funcionamiento adidáctico, a diferencia de lo sucedido en el primer juego. A pesar de las reiteradas apelaciones del docente a un trabajo independiente por parte de los alumnos y aun de justificar en cierto modo el porqué plantear una ecuación, los alumnos no llegan a asumir esta segunda tarea con el grado de responsabilidad que asumieron la primera. Rechazan el inicio de un nuevo juego, casi se niegan a *jugar*. Solo cuando el profesor decide claramente intervenir para lograr su objetivo en relación con las ecuaciones, los alumnos aceptan involucrarse, responder a sus preguntas con un compromiso bastante más débil que en la primera parte de la clase. Viven la nueva tarea como una imposición, casi como una complicación innecesaria.

La dificultad con la operatoria de los enteros no ha desaparecido, algunos de los conflictos que se manifestaron en el primer juego no aparecen, aunque no han sido superados. Al realizar la "traducción" casi literal del enunciado, el número desconocido pasa a denominarse x, sin necesidad de identificar si se trata de un número positivo o negativo, por tanto, la dificultad de concebir que una suma de un número positivo más "algo" pueda dar un número negativo ya no queda tan explícito. Acompaña este hecho el débil compromiso frente a la nueva tarea que muestran los alumnos, que dejan así de pensar en el problema y se disponen a seguir las reglas para resolver una ecuación –que guía el profesor– sin prestar atención a la coherencia de la información que brinda la ecuación ni a cuestionarse si es posible o si están de acuerdo.

El proceso casi algorítmico de resolución de una ecuación no apela ni al significado ni a la coherencia de los cálculos que se están resolviendo.

También puede deberse a la "traducción" realizada, que el número desconocido x aparezca en primer lugar, número al que se le suma 27, mientras que cuando resuelven el mismo problema en el primer juego, los alumnos estuvieron tratando de resolver el cálculo de "27 más" el número que buscan. Esta inversión –si bien no creemos que se pueda atribuir a una intención del profesor– permite que 27 tenga delante un signo "más" y sea fácilmente reconocible que está sumando –no que se trata de un número positivo– y que, por tanto, "pasa" restando; no hubiera sido tan claro si la ecuación planteada hubiera sido $27 + x = -107$.

Sin embargo, otras dificultades siguen presentes en el aula, como la ya mencionada para resolver $-107 - 27$.

El diálogo anterior muestra nuevamente a alumnos para quienes decir la respuesta está asociado a comunicar el valor absoluto del número y, si es solicitado, también un signo. Por otra parte, nos permite constatar que se concluye que 80 no puede ser el resultado porque no verifica la condición dada y no porque el cálculo sea erróneo.

Cabría la pregunta sobre qué hubiera sucedido si los alumnos dominaran previamente la operatoria con enteros. Probablemente hubieran resuelto aritméticamente y con bastante facilidad el problema y, para el profesor, lograr que planteen una ecuación hubiera significado una dificultad aún mayor que la presentada.

Incluso cuando un alumno menciona que el cálculo $-107 - 27$ está mal resuelto, el profesor reduce su intervención a mediar entre dos participaciones de los alumnos, sin pronunciarse ni recordar las reglas.

¿Cómo se puede interpretar la ausencia –por parte del profesor– de asumir al menos en parte, que los alumnos no dominan la operatoria en Z y que, en su mayoría, las confusiones reinantes impiden la comprensión de buena parte de la clase?

Con frecuencia, opera en la escuela una concepción muy arraigada que considera el desarrollo de conocimientos de un modo lineal, yuxtapuestos unos con otros. En el caso que nos ocupa en esta investigación, podría interpretarse que la operatoria en Z es un tema dado, por lo que las dificultades de los alumnos son una carencia de estos y no una responsabilidad del profesor.

La realidad es que la complejidad intrínseca del aprendizaje de este conjunto y sus propiedades exige un periodo de tiempo bastante largo y gran parte de estos aprendizajes se concretarán al ser estudiados en relación con otros conocimientos.

Entrevista posterior

En el encuentro con el observador después de la clase, el profesor muestra su desconcierto sobre el desarrollo de esta:

> *P: Pensaba que iban a escribir las ecuaciones que correspondían a los problemas que les di. Ellos ya sabían cosas, veníamos trabajando con esto pero no sé bien qué pasó... Yo creía que ya tenían los conocimientos para hacer estos ejercicios.*

Tratando de encontrar una justificación a lo que él considera en cierto modo un fracaso, explica:

P: *Yo creo que les faltó trabajar más con los números naturales... pero dieron incluso pasaje de términos...*

P: *[...] Creo que acá no se dieron cuenta que también era una igualdad, que hay un valor desconocido, igual que en las otras que hacían antes.*

P: *[...] Y cuando están en el tema de ecuaciones pueden hacerlo... en la clase cuando un alumno dijo ecuaciones, después no tuvieron problemas para escribirlas...*

P: *[...] les faltó ubicarse en el tema.*

P: *Capaz si le ponía de título ecuaciones, hubieran podido... La dificultad está en ecuaciones, cómo identificar ecuaciones en los problemas... por eso no sale...*

El profesor parece reflexionar en voz alta, con un dejo de duda, sobre un problema bien identificado y mencionado constantemente por los docentes: la dificultad manifiesta de los alumnos para recuperar fuera del contexto de aprendizaje un conocimiento ya tratado. El profesor lo explicita diciendo en la última frase: *La dificultad está en ecuaciones, cómo identificar ecuaciones en los problemas...*

En sus intervenciones sugiere distintas posibilidades de superación, atribuyendo la responsabilidad en un caso al docente y en las otras a los alumnos; alude a trabajar más los conocimientos previos (ecuaciones en N) sin reconocer los problemas específicos que plantean las ecuaciones en Z; que los alumnos dispongan de recursos –índices semánticos relativos a las situaciones tipo– para reconocer qué conocimientos utilizar, por ejemplo, darse cuenta que era una igualdad con incógnita, sin analizar que en los problemas dados, difícilmente se pueda percibir una igualdad si no se piensa en una ecuación; y finalmente, aun en contra de sus concepciones de enseñanza y de aprendizaje, casi concluir que se debería informar a los alumnos que se trata del tema de ecuaciones.

En este análisis, realizado *a chaud*[8] por el profesor, no se observan referencias a algunas cuestiones como analizar si los problemas seleccionados son pertinentes para el tratamiento de las ecuaciones, la complejidad de los números enteros y, en particular, de las ecuaciones en Z ni sobre el papel de las ecuaciones como herramientas de modelización.

[8] Expresión francesa que significa: realizar comentarios sobre algo que acaba de suceder sin haber tenido tiempo para reflexionar o elaborarlos.

CONCLUSIONES

Describir y analizar las prácticas docentes –en particular en relación con las dificultades de los alumnos y las situaciones no previstas en la planificación del profesor– permiten mostrar la complejidad de la tarea de gestión en el marco de un modelo de enseñanza que tiene entre sus principales objetivos la construcción de conocimientos, reelaboración y reinversión de estos por parte de los alumnos.

El aspecto central de este trabajo ha sido describir y analizar las prácticas docentes de un profesor en relación con el álgebra a partir de entrevistas y de los registros fílmicos y escritos con el fin de comprender "qué sucede en esas clases" con el proyecto de enseñanza planificado por el docente.

Una primera lectura mostraba una gestión del profesor que transitaba por un carril diferente al de los alumnos, sus producciones no eran retomadas, no se sometían a reflexión, etc. Sin embargo, a partir de las herramientas de análisis del marco teórico-metodológico adoptado en esta investigación, se pudo identificar cuáles eran las razones de ser tanto de la selección de actividades como de su gestión. Definimos juegos didácticos en la clase y en cada uno distintas escenas que nos permitieron caracterizar qué era lo que estaba en juego en ellas y su relación con el proyecto del docente.

Pusimos en evidencia que los problemas seleccionados no eran pertinentes para el trabajo que pretendía sobre la escritura y resolución de ecuaciones en Z; que tanto el trabajo previo con ecuaciones en N como con la operatoria en Z no son suficientes para superar las rupturas que plantean las ecuaciones en Z en relación con N y, en suma, que la sujeción estricta a la planificación permitía comprender y explicar los hechos observados.

Estos distintos aspectos relevados corresponden a saberes didáctico-matemáticos sobre cómo se pueden articular los conocimientos aritméticos de los alumnos para avanzar hacia los algebraicos; qué cuestiones específicas aparecen al plantear y resolver ecuaciones en Z; qué interpretaciones son posibles de las producciones espontáneas de los alumnos o del "desvío" de estas a la anticipación realizada en el análisis *a priori;* cómo gestionar una clase donde se pretende que los alumnos produzcan conocimientos, qué institucionalizar y en qué momentos, etc., que hacen a la complejidad de la gestión de la clase.

Si bien, no era objeto de investigación, este estudio nos permitió definir líneas esenciales para la formación de futuros profesores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bolea, P. (2003), *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, tesis doctoral, Departamento de matemáticas, Universidad de Zaragoza, España.

Brousseau, G. (1986), "Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, núm. 2, pp. 33-115.

Panizza, M. (comp.) (2003), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*, Buenos Aires, Editorial Paidós.

Panizza, M., P. Sadovsky y C. Sessa (1996), "Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito", Comunicación presentada a la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, Salta.

Robert, A., y J. Rogalski (2002), "Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche", *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol. 2, núm. 4, pp. 505-528.

Robert, A. (2000), "Recherches sur les pratiques des enseignants de mathématiques du secondaire: imbrication du point de vue de l´apprentissage des élèves et du point de vue de l´exercice du métier d´enseignant", en *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, París, ARDM.

———— (2001), "Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21, núms. 1-2, pp. 57-80.

Ruiz-Munzón, N., M. Bosch y J. Gascón (2010), "La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria", en A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, Montpellier, Francia, IUFM de l'Académie de Montpellier, pp. 655-676.

Ruiz, A., M. Bosch y J. Gascón (2009), "La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas a enseñar a las matemáticas para la enseñanza", en González, M. J., M. T. González y J. Murillo (eds.), *Investigación en educación matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM*, Santander.

Sadovsky, P. (2003), *Condiciones didácticas para un espacio de articulación* *entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas*, tesis doctoral, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad Nacional de Buenos Aires, Argentina.

Sensevy, G., y A. Mercier (2007), *Agir ensemble: l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, trad. de Juan Duque y rev. de René Rickenmann, Rennes, PUR.

Sessa, C. (2005), *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

DATOS DE LOS AUTORES

Irma Saiz
Universidad Nacional del Nordeste, Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura, Corrientes Capital, Argentina
irmasaiz28@gmail.com

Edith Gorostegui
Universidad Nacional del Nordeste, Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura, Corrientes Capital, Argentina
gorosteguie@gmail.com

Diego Vilotta
Universidad Nacional del Nordeste, Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura, Corrientes Capital, Argentina
dfvilotta@gmail.com