Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Vásquez Ortiz, Claudia; Parraguez González, Marcela

Construcciones mentales para el aprendizaje del concepto de probabilidad: un estudio de caso

Educación Matemática, vol. 26, núm. 3, diciembre, 2014, pp. 37-74
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Construcciones mentales para el aprendizaje del concepto de probabilidad: un estudio de caso

Claudia Vásquez Ortiz y Marcela Parraguez González

Resumen: El propósito de la investigación que se reporta en este artículo es indagar mediante la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) en las construcciones mentales que estudiantes universitarios de primer año –dispuestos en un estudio de caso– muestran en la construcción del concepto de probabilidad. La estructura general del estudio se fundamenta en el ciclo metodológico que nos proporciona la misma teoría APOE, diseñando una descomposición genética a partir de un estudio histórico-epistemológico del concepto, la cual se pone a prueba a través de un cuestionario aplicado al caso. Los resultados obtenidos indican que algunos de los estudiantes que han respondido al cuestionario, alcanzan la construcción objeto del concepto de probabilidad, lo que evidencia la validez de la descomposición genética propuesta como modelo de construcción del concepto en cuestión.

Palabras clave: teoría APOE, construcciones mentales, aprendizaje, descomposición genética, probabilidad.

Mental constructions for learning probability concept: A case study
Abstract: The purpose of the research in to investigate, using APOS (Actions, Processes, Objects and Schemes) theory, mental constructions of college freshman students–proposed as a case study-show on the construction of the concept of probability. The overall structure of the study is based on the methodological cycle provide by same theory apos, designing a genetic decomposition from a historical-epistemological of the concept, study which is tested through a questionnaire applied to the case. The results indicate that some of the students, who responded to the questionnaire, reach to the construction of the concept of

Fecha de recepción: 10 de julio de 2013; fecha de aceptación: 17 de octubre de 2014.

probability, which proves the validity of the genetic decomposition construction proposed as a model of the concept in question.

Keywords: APOS theory, mental construction, learning, genetic decomposition, probability.

INTRODUCCIÓN

Dados los cambios en las últimas décadas respecto al tratamiento de la probabilidad en los distintos niveles educativos, es necesario disponer de investigaciones que den cuenta de cómo los estudiantes aprenden determinados conceptos vinculados al estudio de esta. Más específicamente, en relación con los aspectos cognitivos vinculados a la construcción del concepto de probabilidad de estudiantes universitarios de primer año, poniendo especial atención al significado atribuido ha dicho concepto más que a sus cálculos. Para ello, nos hemos situado en la teoría APOE como referente teórico y metodológico, pues nos brinda herramientas adecuadas para describir y analizar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para alcanzar el concepto de probabilidad; entendidas estas, en términos generales, como la organización de las ideas necesarias para intentar comprender algo. Así por medio del análisis de tales construcciones mentales lograremos contribuir a entender los procesos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad que llevan a cabo estudiantes universitarios, a fin de contar con antecedentes y fundamentos teóricos que permitan, a futuro, formular propuestas de enseñanza para alcanzar una mejora en la comprensión del concepto de probabilidad.

ÁREA PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

El interés por el estudio de la comprensión de la noción de probabilidad y de elementos asociados a su aprendizaje no es una inquietud reciente. En efecto, ya en 1951 Piaget e Inhelder se interesaban por estudiar el desarrollo de las ideas de azar y probabilidad, centrándose en cómo los niños adquieren el concepto de probabilidad, según las etapas del desarrollo conceptual de Piaget. A partir de estos estudios se concluye que dicho concepto se transforma en un conjunto formal de ideas a partir de la etapa de las operaciones formales (12 años en adelante), ya que alrededor de esta edad adquieren la capacidad de utilizar procedimientos sistemáticos para determinar las posibles permutaciones, variaciones y combinaciones de un determinado conjunto de elementos. Lo que permite que posteriormente lleguen a establecer relaciones vinculadas a esquemas operacionales, mediante los cuales logran realizar una síntesis entre el azar y lo operacional, alcanzando así una comprensión adecuada del concepto. Esta visión piagetiana sobre la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad explica, en cierta medida, la tendencia, en las décadas pasadas, a enseñar probabilidad a partir de la adolescencia, abordada principalmente desde una visión clásica del concepto. Sin embargo, durante las últimas dos décadas esta tendencia ha sufrido variaciones, pues en numerosos países el estudio de la probabilidad se ha incorporado de manera continua y progresiva a lo largo del currículo escolar. Otorgándole un enfoque que no se centra solo en una visión clásica del concepto, sino que surge a partir de las ideas intuitivas de los alumnos, las que poco a poco se van complementando con diversos significados probabilísticos derivados de la experimentación y simulación de experimentos aleatorios que permiten dar respuesta a problemas de tipo probabilístico.

Es dado lo anterior, que para esta investigación nos hemos propuesto evidenciar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes universitarios muestran como estrategia cognitiva para alcanzar el concepto de probabilidad.

Investigaciones recientes con alumnos universitarios y con futuros profesores (Díaz, 2007; Contreras, 2011; Mohamed, 2012; Gómez, 2014) evidencian serias dificultades en la comprensión del concepto de probabilidad debido a su complejidad, que comúnmente se relaciona con lo incierto, y al lenguaje asociado a su estudio, que admite una variedad de términos en nuestro lenguaje ordinario. En particular, se observa la presencia de ciertos sesgos y heurísticas en la asignación de probabilidades, como el sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre, 1992). Esto no es de extrañar, pues ya en el ámbito científico, fueron numerosos los intentos realizados por diversos autores, como Pascal, Bernoulli, Bayes, Leibniz, Laplace, de Finetti, von Mises, Jaynes, Carnap, Popper y Keynes (Hacking, 1995), por definir rigurosamente el concepto de probabilidad. Concepto que, de acuerdo con lo planteado por Batanero (2005), presenta una variedad de enfoques (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático); los que predominan en las escuelas y en los libros de texto son: 1) frecuencial, el cual plantea que en una repetición indefinida de un experimento, bajo las mismas condiciones y sin que haya interacción entre las distintas repeticiones, la probabilidad de un suceso es el límite al que tiende la proporción de repeticiones en que el suceso tiene lugar; 2) clásico laplaciano, entendido como el cociente entre casos favorables y posibles, cuando los casos son igualmente posibles; 3) subjetivo, donde el individuo asigna a priori la probabilidad con base en su experiencia; y 4) axiomático, habitual hoy en día en los cursos de matemática estándar.

De ahí la complejidad del concepto, que nos devela que la probabilidad al igual que otros conceptos matemáticos no es inmutable. Es por ello, que los alumnos en su camino por alcanzar una adecuada comprensión de la probabilidad, deberán pasar por un proceso gradual enfrentándose "a lo largo de su aprendizaje con las mismas paradojas y situaciones contraintuitivas que aparecieron en el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades" (Batanero, 2008, p. 28).

Para entender de mejor manera cómo surge y se desarrolla nuestro objeto matemático, analizamos en una primera instancia su evolución histórico-epistemológica. Lo que nos permitió, dentro de otras cosas, esclarecer que contrario a lo que comúnmente se cree de que el concepto de probabilidad surge alrededor de 1660, atribuyéndose a Pascal los primeros trabajos en torno al concepto, quien se habría interesado en él a partir de problemas vinculados con los juegos de azar, el concepto de probabilidad o las primeras nociones vinculadas a él ya existían en tiempos muy remotos. Originándose desde las civilizaciones antiguas, a partir de los juegos de azar hasta adquirir poco a poco rigurosidad matemática, y formalizándose por primera vez con Pascal, para posteriormente llegar a conformar lo que hoy en día conocemos como la teoría de probabilidades (Hacking, 1995). A lo largo de este desarrollo histórico-epistemológico del concepto de probabilidad, se observa, además, una inevitable dualidad en su interpretación, la que tiene que ver tanto con grados de creencias como con frecuencias estables. Producto de lo anterior, consideramos que para la adecuada construcción del concepto de probabilidad, en los estudiantes universitarios de primer año, se debería poner atención en la presencia de construcciones mentales previas, que en cada aprendiz, conducen a la adquisición de esta dualidad frecuentista-bayesiana. La cual pensamos también debería estar presente en situaciones de aula que conduzcan al aprendiz a alcanzar el concepto de probabilidad a partir de sus concepciones mentales previas, que se construyen con base en el desarrollo de dichas situaciones, para así lograr adquirir dicho concepto plenamente.

Dada la diversidad de enfoques que muestra el análisis histórico-epistemológico, consideraremos al concepto de probabilidad como un modelo matemático satisfactorio que se puede utilizar para describir e interpretar la realidad de fenómenos aleatorios (Batanero, 2005). A partir de la definición axiomática de probabilidad, a saber: si hacemos un determinado experimento, que tiene asociado un espacio muestral finito Ω, definimos la probabilidad como una función que asocia a cada suceso A (es decir, un subconjunto de Ω) un número $P(A)$ llamado probabilidad de A, que cumple las siguientes propiedades:

1. La probabilidad de cualquier suceso A es positiva o 0. Es decir, $P(A) \geq 0$. La probabilidad mide, en cierta manera, la facilidad con que ocurre un suceso A.
2. La probabilidad del suceso seguro es 1. Es decir, $P(\Omega) = 1$. Así, la probabilidad siempre es mayor que 0 y menor que 1.
3. La probabilidad de la unión de un conjunto cualquiera de sucesos incompatibles (disjuntos) dos a dos es la suma de las probabilidades de los sucesos. Si tenemos, por ejemplo, los sucesos A, B y C, que son incompatibles dos a dos, entonces $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

MARCO TEÓRICO: LA TEORÍA APOE

La teoría APOE fue creada por Ed Dubinsky en 1991 a partir de la epistemología genética de Piaget, teniendo como concepto central el de *abstracción reflexiva*. Piaget llama así a la "abstracción que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos" (Beth y Piaget, 1980, p. 212). Ergo, la abstracción reflexiva se refiere a "las acciones y operaciones del sujeto y a los esquemas que lo conducen a construir" (Piaget y García, 1982, p. 247), está es puramente interna al sujeto, y será entendida como "un mecanismo mental que sirve para extraer o separar una característica de un objeto, a partir no exactamente de los objetos, sino de las acciones que realizamos sobre ellos" (Parraguez, 2009, p. 6). Sobre esta base, podemos describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, extendiéndolo al estudio de conocimientos matemáticos avanzados, especialmente los correspondientes a la educación superior.

El propósito de Dubinsky con esta teoría es "entender cómo las matemáticas se aprenden" (Dubinsky, 1991, p. 97) para elaborar un programa educativo que ayude a promover su aprendizaje. Por ello, esta teoría es principalmente un modelo que describe, a través de una descomposición genética del concepto en estudio, en nuestro caso el concepto de probabilidad, la manera en que los estudiantes aprenden o construyen mentalmente los conceptos matemáticos a partir de sus estructuras matemáticas previas, las cuales evolucionan conformando otros saberes, para ayudar así, a otros estudiantes a realizar las construcciones mentales necesarias para generar dicho proceso de aprendizaje. En otras palabras, "una descomposición genética... es una primera aproximación para modelar el aprendizaje del concepto matemático en cuestión" (Trigueros y Oktaç, 2005, p. 163). La teoría APOE está centrada específicamente en las construcciones mentales que corresponden a *etapas* en el aprendizaje de conceptos matemáticos en los estudiantes (Piaget y García, 1983, 1989) y que se puntualizan por medio de las siguientes tres construcciones mentales: acciones, procesos y objetos.

Construcción mental acción: se refiere a las transformaciones sobre un objeto que son percibidas por el estudiante como externas (Asiala *et al.*, 1996) y son realizadas con base en indicaciones o estímulos externos. Según Dubinsky (1991) una acción es un estado de construcción limitado, sin embargo éstas marcan el principio de la comprensión de un concepto matemático, pudiendo verse reflejadas por medio de una o varias respuestas que llevan a la transformación de uno o varios objetos.

Construcción mental proceso: cuando un estudiante realiza una acción de manera repetida y puede reflexionar sobre ella, puede llegar a *interiorizarla* en un proceso; es decir, realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo (Dubinsky, 1996). Un estudiante mostrará una concepción proceso de un determinado concepto matemático cuando es capaz de reflexionar sobre el concepto, realizando transformaciones pero sin la necesidad de realizar acciones específicas sobre él.

Construcción mental objeto: cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso y piensa en él como un todo, entonces ha *encapsulado* tal proceso como un objeto cognitivo. No obstante, "en el curso de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario *desencapsular* para regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo, con el fin de usar sus propiedades al manipularlo" (Dubisnky, 1996, p. 97).

El paso por estas tres etapas no es necesariamente lineal. De hecho, un estudiante puede estar en una etapa para ciertos aspectos de un determinado concepto y en otra para otros. El mecanismo principal que permite que evolucione el conocimiento de un estado de construcción a otro, es la *abstracción reflexiva*, herramienta que permite que el estudiante reflexione sobre sus acciones en un objeto, de modo tal que organice sus conocimientos estableciendo nuevas construcciones mentales, que le permitan el paso de una etapa de conocimiento a otra más elevada. Llegando así a construir el conocimiento matemático, como producto de mecanismos mentales sucesivos (interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación), mediante los cuales logra constituir una colección de acciones, procesos y objetos que llevan a conformar el correspondiente esquema asociado a un objeto matemático.

La noción de *construcción mental esquema* también proviene de las ideas de Piaget; pero tiene una connotación distinta dentro de la teoría APOE, pues con ella se busca explicar cómo se desarrollan conceptos matemáticos por medio de los procesos de enseñanza. Un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo, en una estructura coherente, y que pueden ser evocados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas (Parraguez y Oktaç, 2012). A la integración de una entidad matemática nueva a un esquema, se le llama asimilación.

De este modo, se desarrolla la construcción del conocimiento matemático por medio de las acciones, procesos, objetos y esquemas (figura 1).

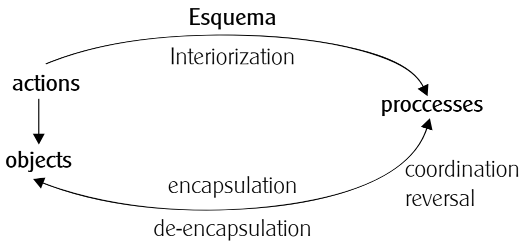


Figura 1. Construcciones y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon *et al.*, 2014, p. 18)

Como se muestra en la figura 1, las acciones construidas por respuestas repetitivas a un estímulo son interiorizadas por el estudiante, transformándolas en procesos, que finalmente se encapsularán en un objeto. Así, tal colección de acciones, procesos y objetos se organiza en un esquema asociado a un objeto matemático, estableciendo nuevas relaciones entre sus componentes.

Podemos señalar que el uso de la teoría APOE para explicar la construcción de los conceptos matemáticos es relativamente nueva y ha sido utilizada con éxito en investigaciones relacionadas con el aprendizaje de conceptos matemáticos en Cálculo, Análisis, Álgebra Lineal, Álgebra Abstracta, Matemática Discreta, Estadística y Lógica (Arnon *et al.*, 2014). Sin embargo, hasta hoy no hay investigaciones desde esta perspectiva teórica en el tema probabilidad. No obstante, como veremos a continuación, la teoría APOE a partir de su descomposición genética, nos proveerá de un modelo que describe en detalle el estado de las construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante aprenda el concepto de probabilidad.

METODOLOGÍA

La estructura general del estudio se basa en el paradigma de la teoría APOE, la cual nos provee de un ciclo metodológico propio de investigación, que consta de tres etapas: análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de datos. La aplicación de este ciclo de investigación (figura 2) nos permitió obtener una visión en detalle de cómo los estudiantes universitarios de primer año, de nuestro grupo de estudio, construyen el concepto de probabilidad, es decir, de sus construcciones y mecanismos mentales vinculados a las concepciones de acciones, procesos y objetos.

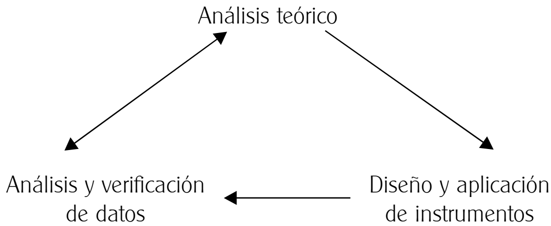


Figura 2. Ciclo metodológico de investigación de la teoría APOE (Asiala *et al.*, 1996)

En concordancia con el ciclo metodológico propuesto, lo primero fue realizar un análisis teórico sobre el concepto de probabilidad, el cual consideró el análisis de libros de texto empleados en los cursos de introducción a la estadística y probabilidad, y la experiencia de aula de las investigadoras enseñando el tema, entre otros aspectos. Lo anterior, permitió levantar construcciones mentales (hipotéticas) necesarias para diseñar una descomposición genética (DG) del concepto de interés y describir en detalle los aspectos constructivos del concepto, para explicitar un modelo (Arnon *et al.*, 2014) factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales, que los estudiantes deben estructurar en su mente en relación con otros conceptos considerados relevantes; en nuestro caso, con los conceptos de suceso, experimento, espacio muestral discreto, métodos de conteo, axiomas de probabilidad, regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes. Así, a partir de la descomposición genética del concepto, fundamentamos el diseño y la construcción de un instrumento que permitió evidenciar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en juego para la construcción del concepto de probabilidad.

Descomposición genética hipotética

La DG hipotética propuesta describe un posible camino que los estudiantes pueden seguir para construir nuestro concepto de interés, es decir, las construcciones y mecanismos mentales mediante los cuales los estudiantes pueden modelar una construcción del concepto de probabilidad. Llamamos a esta DG "hipotética" pues por medio de la propia investigación y de la aplicación del ciclo metodológico de la teoría APOE, esta fue refinada, obteniendo así una DG que permitió dar cuenta de mejor manera cómo los estudiantes construyen el concepto de probabilidad. Con este propósito en mente, nos planteamos los siguientes interrogantes, basándonos en las preguntas que Asiala *et al.* (1996) señalan como fundamentales para guiar el diseño de una DG: 1) ¿qué construcciones mentales previas son necesarias o suficientes para una adecuada construcción del concepto de probabilidad?; 2) ¿cuáles son las construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto de probabilidad?

Estas preguntas ayudaron, junto al análisis teórico, a orientar el diseño de la DG para finalmente, cumplir con los objetivos de "determinar las construcciones y mecanismos mentales que puede poner en juego un estudiante universitario como estrategia cognitiva para construir el concepto de probabilidad". En el lenguaje de la teoría APOE: "diseñar y evidenciar una DG de dicho concepto", para así "diseñar y aportar evidencia a favor de una posible DG del concepto de probabilidad, esto es, las correspondientes construcciones mentales (acciones, procesos, objetos) de los conceptos y resultados, que un aprendiz universitario utiliza para la construcción del concepto de probabilidad".

Con base en nuestra experiencia de aula, consideramos necesario para la construcción del concepto de probabilidad que los estudiantes universitarios de primer año, puedan realizar acciones en una conceptualización objeto de la teoría de conjuntos, es decir, que muestren, a través de argumentos observables, nociones y conceptos elementales de la teoría de conjuntos. Esto porque el concepto de probabilidad será construido a partir de la concepción objeto de suceso, entendida ésta como un conjunto de resultados posibles, subconjunto del espacio muestral, que a su vez es entendido como el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Tales sucesos pueden combinarse para formar sucesos nuevos utilizando las operaciones de la teoría de conjuntos. De ahí la importancia de contar con una conceptualización objeto de la teoría de conjuntos, ya que los conceptos de espacio muestral y suceso la involucran forzosamente.

A través de la DG hipotética propuesta (figura 3) se describe un modelo para

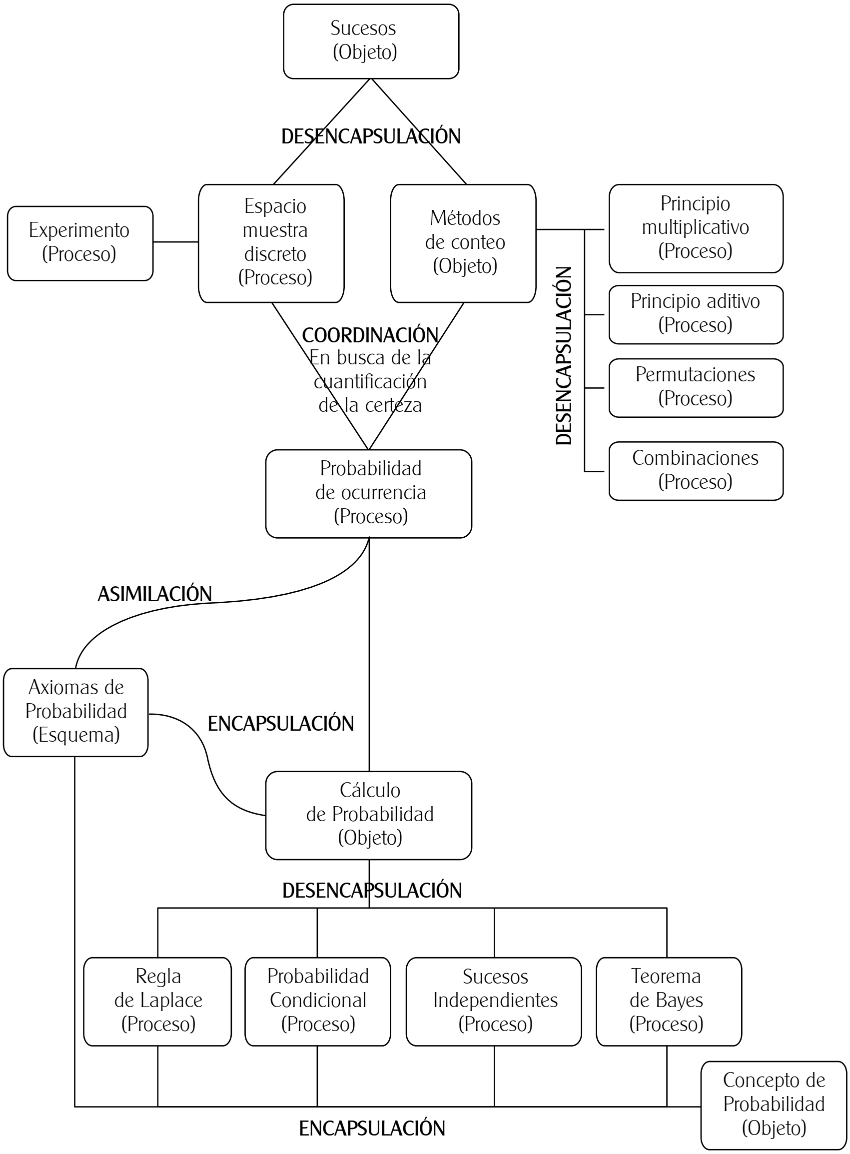


Figura 3. DG hipotética del concepto de probabilidad

construir el concepto de probabilidad, a partir de cuatro construcciones fundamentales: objeto de *suceso,* proceso de probabilidad de ocurrencia, esquema de axiomas de probabilidad y objeto de cálculo de probabilidad.

Según esta DG hipotética, el estudiante universitario de primer año comenzaría por movilizar sus construcciones mentales vinculadas al objeto suceso, entendiéndolo como un conjunto de resultados posibles, lo cual llevará a que desencapsule dicho concepto, vinculándolo a concepciones procesos, como la de espacio muestral particular asociado a un cierto experimento o a la concepción objeto de los *métodos de conteo,* entendiéndolos como el número total de maneras en que un cierto suceso puede ocurrir, desencapsulándolo en los siguientes procesos, con el fin de usar propiedades numéricas: principio multiplicativo, principio aditivo, permutaciones y combinaciones.

Diremos que un estudiante muestra una concepción proceso de un espacio muestral asociado a un experimento, si es capaz de determinar ese espacio muestral dependiendo del interés del observador, y reconociendo que dicho espacio muestral no es único. Por ejemplo, *consideremos el experimento aleatorio hipotético de participar en un juego de lotería. Supongamos que hay un millón de números en esta lotería y un jugador participa con un boleto. ¿Cuál es un posible espacio muestral para este experimento?*

Si al jugador le interesa conocer la probabilidad que tiene de ganar en este juego, puede proponer como espacio muestral el conjunto $\Omega = \{\textit{ganar, perder}\}$, no obstante puede considerarse como espacio muestral a aquel conjunto que contiene a todos los posibles números ganadores: $\Omega = \{1{,}2{,}3...1.000.000\}$.

En el caso del concepto métodos de conteo, un estudiante mostrará una concepción objeto de dicho concepto si reconoce una situación en que no es posible enlistar y contar uno por uno todos los elementos de un espacio muestral o suceso. Por ejemplo: *¿Cuántos números telefónicos existen que tengan por lo menos un 7?* En este caso es casi imposible escribir todos los números uno a uno para contarlos, por lo que surge la necesidad de emplear métodos de conteo que ayuden a determinar la cardinalidad de un espacio muestral o suceso.

Producto de lo anterior, el estudiante desencapsulará el objeto métodos de conteo en procesos que le permitan usar sus propiedades numéricas: principio multiplicativo, principio aditivo, permutaciones y combinaciones. Específicamente diremos que el estudiante muestra una concepción proceso de los métodos de conteo, cuando se da cuenta que el total es $2 \times 3 \times 4$, mediante un proceso de ramificaciones sucesivas. Entonces, el proceso aquí, es un proceso combinatorio que emerge: el árbol de tres generaciones con fecundidades 2, 3 y 4. El estudiante es capaz de mirar este árbol como se mira un número y operar con ellos, concatenarlos (injertarlos), por ejemplo.

De acuerdo a las características de los problemas propuestos, diremos que el estudiante:

a) Muestra una concepción proceso del principio multiplicativo si reconoce y resuelve casos en que un cierto procedimiento A se puede hacer de m maneras y un procedimiento B se puede hacer de n maneras, entonces existen $m \times n$ formas de realizar A y a continuación realizar B.

b) Muestra una concepción proceso del principio aditivo si reconoce y resuelve casos en que si un cierto procedimiento A se puede hacer de m maneras y un procedimiento B se puede hacer de n maneras, y no es posible que ambos procedimientos A y B se realicen juntos, entonces el número de maneras como se puede hacer A o B es $m + n$.

c) Muestra una concepción proceso de permutación si reconoce y resuelve casos en que es necesario agrupar n objetos diferentes en algún orden específico (uno detrás de otro y por lo tanto sin repetición).

d) Muestra una concepción proceso de combinación si reconoce y resuelve casos en que es necesario tomar una selección de objetos a partir de una colección, sin contar el orden.

La concepción objeto de los métodos de conteo quedará de manifiesto cuando el estudiante la desencapsule en los procesos de: principio multiplicativo, principio aditivo, permutaciones y combinaciones, aplicándolos a la resolución de situaciones problemas.

Lo anterior, quedará en evidencia al resolver, por ejemplo problemas del tipo: *Nicolás y Fernando decidieron este semestre inscribir Tenis como curso deportivo con la idea de entrenar juntos, pero les acaban de avisar que los 90 alumnos aceptados serán distribuidos aleatoriamente en tres secciones de 30 alumnos cada una. ¿Cuál es la probabilidad que los dos queden en la misma sección y puedan entrenar juntos si es que ya fueron aceptados en el deportivo?*

Para resolver este problema el estudiante deberá reconocer la imposibilidad de contar uno a uno, por lo que deberá mostrar una concepción objeto de los métodos de conteo, desencapsulando una concepción proceso que le permita recurrir a la cardinalidad para distribuir 90 alumnos en tres secciones distintas de tamaño 30, además de recurrir a la cardinalidad de los casos favorables en la situación planteada.

Estos procesos pueden ser coordinados en una nueva concepción proceso, a través de la búsqueda de la cuantificación de la certeza de ocurrencia de un suceso. Por medio de la coordinación específica de los procesos mentales anteriores, llegaría a una concepción proceso de la *probabilidad de ocurrencia* asociada a un determinado suceso, con la cual se busca reflejar un grado de certeza cualitativo mediante el uso de una escala numérica. Este concepto juega un rol fundamental en la construcción del concepto de probabilidad, ya que a partir de él emergerán las construcciones mentales asociadas a la concepción objeto del concepto de probabilidad, tales como: la concepción esquema de los axiomas de probabilidad y la concepción objeto del cálculo de probabilidad.

Si el estudiante puede distinguir entre sucesos posibles, inciertos e imposibles y atribuirles un cierto grado de certeza, tiene una concepción proceso de la probabilidad de ocurrencia. Por ejemplo: *Andrea tiene una bolsa con 3 bolitas rojas, 3 azules y 3 verdes. ¿Cuántas bolitas habrá que extraer para creer que se obtendrá una de cada color?*

Este proceso será encapsulado dando lugar a un nuevo objeto: *cálculo de probabilidad,* el cual es obtenido por medio de la asimilación del esquema *axiomas de probabilidad,* que permiten la formalización de la probabilidad y de la encapsulación del objeto *probabilidad de ocurrencia.* Tales axiomas son válidos tanto para la interpretación frecuentista como bayesiana del concepto de probabilidad.

Bajo esta nueva concepción, el estudiante podrá verificar si tales axiomas se cumplen o no, además de trabajar con una concepción objeto del *cálculo de probabilidad,* la cual deberá desencapsular en los procesos de regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes, según el requerimiento.

Finalmente, el estudiante muestra una concepción objeto del *cálculo de probabilidad* cuando ha podido encapsular los procesos anteriores de: regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes, atribuyendo a cada uno, una determinada forma de proceder, además de asignar e interpretar su significado.

Construcción del instrumento

Una vez diseñada la DG hipotética fue necesario verificar su viabilidad como modelo de construcción del concepto de probabilidad. Para ello, diseñamos un cuestionario de respuesta abierta, compuesto por 14 preguntas (véase tabla en el anexo), que nos permitió identificar y profundizar en las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en juego para la construcción del concepto de probabilidad, para posteriormente, contrastarlas con las propuestas en la DG.

Cabe señalar que algunas de las preguntas que conforman el instrumento fueron adaptadas de libros de texto (De Groot, 1988) y de algunas investigaciones vinculadas a la probabilidad (Carranza y Fuentealba, 2010; Batanero, 2005). Para cada una de las preguntas y problemas que forman parte de este cuestionario, se realizó un análisis a priori basado en el análisis teórico, el cual consideró una reflexión sobre las posibles respuestas que los estudiantes pueden otorgar, y de la forma en que éstas se vinculan con las construcciones mentales descritas en la DG hipotética. Con base en este análisis se verificó que el cuestionario aborda en su totalidad las construcciones y mecanismos mentales planteados en la DG hipotética, esto se puede visualizar en la tabla 1.

	Sucesos	Probabilidad de Ocurrencia	Axiomas de Probabilidad	Cálculo de Probabilidad	Concepto de Probabilidad
Acción	Pregunta: 7 y 10	Pregunta: 1, 2, 3, 6 y 7	Pregunta: 10 y 11	Pregunta: 7 y 8	Pregunta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14
Proceso	Pregunta: 10 y 13	Pregunta: 1, 2, 3, 4, 5 y 6	Pregunta: 10 y 11	Pregunta: 8 y 9	Pregunta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14
Objeto	Pregunta: 14	---	Pregunta: 10 y 11	Pregunta: 7, 8, 9, 12 y 13	Pregunta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14
Esquema	-	-	Preguntas: 10 y 11	-	-

Tabla 1. Construcciones mentales que se espera evidenciar con cada una de las preguntas del cuestionario

Además, para resguardar la validez de contenido del instrumento recurrimos al juicio de tres expertos en la enseñanza de la probabilidad, quienes analizaron aspectos relacionados con el grado de correspondencia de cada una de las preguntas planteadas en relación a las construcciones y mecanismos mentales que se pretende evidenciar, y a la formulación de la pregunta. Posteriormente, con el propósito de obtener información empírica acerca de las posibles limitaciones del cuestionario, realizamos una pequeña aplicación piloto a un grupo de 5 estudiantes, lo que nos permitió realizar algunas modificaciones a las preguntas que componen el cuestionario, además de obtener una validación en terreno del instrumento. En consecuencia, por medio de la aplicación del instrumento, fue posible describir y documentar las construcciones y mecanismos mentales evidenciados por los estudiantes en torno al concepto, detectando qué elementos no han sido considerados en la DG hipotética, o cuáles de las construcciones y mecanismos mentales dados allí se perciben, en estudiantes que parecen comprender el tema y otros que no lo hacen.

Aplicación del instrumento

Como esta investigación busca validar las construcciones y mecanismos mentales propuestos en la DG hipotética para la construcción del concepto de probabilidad en estudiantes universitarios de primer año, se invitó a participar voluntariamente a 12 estudiantes de licenciatura en Ciencia Estadística de una universidad chilena de la Quinta Región.

El criterio de selección de los estudiantes, obedece por un lado, a la accesibilidad de los investigadores y por otro lado, al hecho de que estudiantes voluntarios al momento de la aplicación del cuestionario se encontraban finalizando el curso de Introducción a la Estadística, en el cual han tratado los contenidos de: experimento, espacio muestral y sucesos, introducción a técnicas de conteo, operaciones con sucesos y leyes básicas de probabilidad, probabilidad condicional e independencia de sucesos, regla de Bayes y reglas generales de medidas de probabilidad. Además, partimos del supuesto de que estos alumnos cuentan con las construcciones referidas a elementos básicos de la teoría de conjuntos, dado que paralelamente al curso de Introducción a la estadística, se encuentran realizando un curso de Álgebra en el cual dan especial énfasis a los elementos básicos de la teoría de conjuntos, los cuales ya han sido abordados en su totalidad al momento de responder a nuestro cuestionario.

En lo que respecta al contexto en que se aplicó el cuestionario, podemos señalar que los estudiantes fueron invitados a responder el cuestionario de forma voluntaria, siendo el único requisito el encontrarse finalizando los cursos de Introducción a la estadística y de álgebra. El cuestionario fue administrado por las investigadoras, entregándose un cuestionario para cada estudiante, para el cual disponían de 90 minutos para responder. Al momento de aplicar el cuestionario, se les solicitó que respondieran con máximo detalle cada una de las distintas preguntas, y que no dejaran preguntas sin responder, indicando que en el caso que desconocieran cómo responder indicaran con claridad cuáles eran las dificultades o carencias de conocimientos que identificaban.

Análisis de los datos

El análisis de los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario se realizó con base en la DG hipotética diseñada para el concepto de probabilidad, detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones mentales dadas hipotéticamente no se perciben. Para ello consideramos a estudiantes que parecen comprender el concepto y otros que no lo hacen, y luego se discute si la diferencia radica en la presencia o falta de una construcción mental en particular que aparece en la DG. Solamente entonces, se puede llegar a la conclusión de que los datos validan esa construcción mental particular en la DG. Este procedimiento se realizó para todas las construcciones mentales específicas con las que cuenta la DG hipotética, con la finalidad de validar o refinar la DG propuesta.

En lo que sigue presentamos el análisis de nuestros resultados considerando los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes. Para cada una, se muestran, a modo de ejemplo, extractos de respuestas de algunos de los estudiantes que evidencian dicha construcción y que fundamentan nuestras observaciones, permitiéndonos de este modo *determinar las construcciones y mecanismos mentales que puede poner en juego un estudiante universitario como estrategia cognitiva para construir el concepto de probabilidad.*

Construcción objeto de sucesos

Es importante señalar que de acuerdo a la DG hipotética, para que un estudiante muestre una concepción objeto de sucesos, debe desencapsular dicho objeto en el proceso de espacio muestral y el objeto de métodos de conteo, lo cual será evidenciado cuando pueda identificar y aplicar los métodos de conteo estableciendo relaciones entre éstos y el espacio muestral de un determinado suceso.

Esta concepción objeto de sucesos, de acuerdo con el análisis a priori para cada una de las preguntas del cuestionario, puede observarse mediante las estrategias de resolución dadas a la pregunta 14.

A partir del análisis de las respuestas y estrategias de resolución de los estudiantes, observamos que solo uno de los 12 estudiantes muestra una construcción objeto de suceso, al identificar la necesidad de aplicar y relacionar los métodos de conteo, tanto para la determinación del espacio muestral como de los casos favorables y totales, como se muestra en la respuesta del estudiante 10 (figura 4).

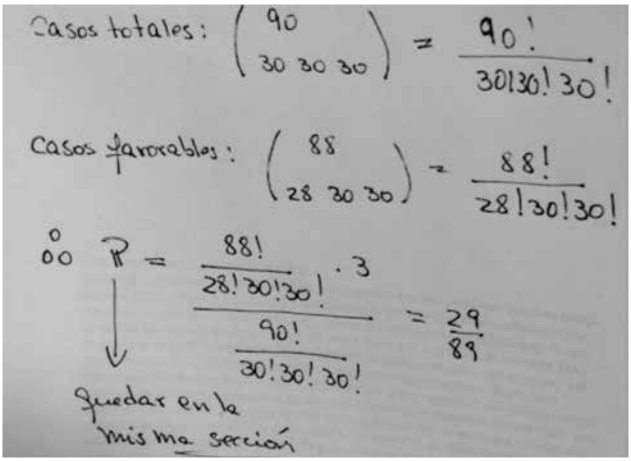
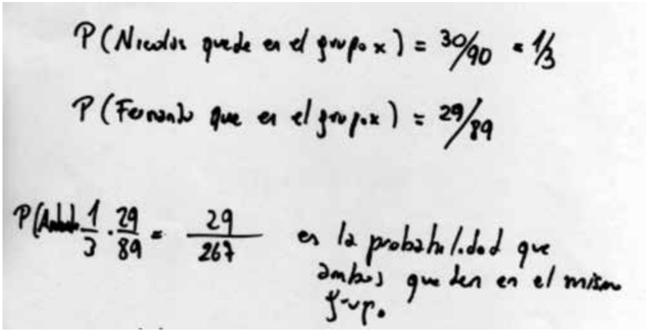


Figura 4. Respuesta a la pregunta 14 del estudiante 10

Mientras que la gran mayoría de los estudiantes no alcanza la construcción objeto de suceso, pues no logran aplicar y relacionar los métodos de conteo, para dar respuesta a la pregunta 14 del cuestionario. Un ejemplo de esto es la respuesta dada por el estudiante 1 que se muestra en la figura 5.

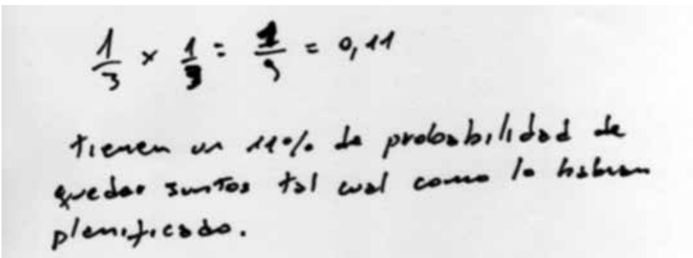

P(Nicolas quede en el grupo x) = 30/90 = 1/3

P(Fernando que en el grupo x) = 29/89

P(Ambos) 1/3 · 29/89 = 29/267 es la probabilidad que ambos queden en el mismo grupo.

Figura 5. Respuesta a la pregunta 14 del estudiante 1

En esta respuesta (figura 5) el estudiante 1 identifica los sucesos vinculados a la situación; sin embargo, no reconoce la necesidad de aplicar los métodos de conteo.


1/3 × 1/3 = 1/9 = 0,11

tienen un 11% de probabilidad de quedar juntos tal cual como lo habían planificado.

Figura 6. Respuesta a la pregunta 14 del estudiante 5

Para el estudiante 5 (figura 6) la probabilidad de que ambos amigos queden en la misma sección es de 1/3. Nuevamente no se reconoce la necesidad de aplicar métodos de conteo, tanto para la determinación de las maneras de distribuir 90 alumnos en tres secciones distintas de 30, ni para determinar los casos favorables correspondientes a las diferentes maneras de distribuir los restantes 88 en tres secciones.

La predominante ausencia de esta construcción objeto se debe a que éstos estudiantes carecen de la construcción objeto de los métodos de conteo. Sin embargo, al analizar las respuestas otorgadas a la pregunta 13 vemos que poseen una construcción proceso de sucesos, ya que identifican los sucesos vinculados a una determinada situación, reconociendo el espacio muestral sin la necesidad de contar uno a uno. Veamos algunas respuestas en que es posible identificar esta construcción.

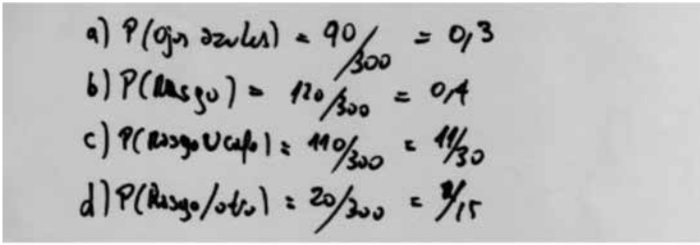


Figura 7. Respuesta a la pregunta 13 del estudiante 1.

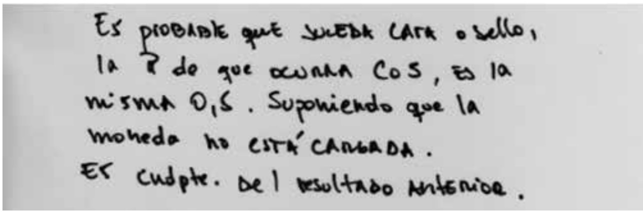
La respuesta del estudiante 1 (figura 7) demuestra que evidencia una construcción proceso de sucesos, puesto que identifica los sucesos vinculados a una situación reconociendo el espacio muestral sin necesidad de contar uno a uno, sino solamente interpretando la información.

Este tipo de respuesta se observa en casi todos los estudiantes. Por ello, podemos concluir que este grupo evidencia en su mayoría una construcción proceso de sucesos, lo cual se encuentra distante de la construcción objeto que se planteaba en la DG hipotética, siendo la principal causa de la falta de esta construcción mental, la carencia por parte de estos estudiantes, de la construcción objeto de los métodos de conteo.

Construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia

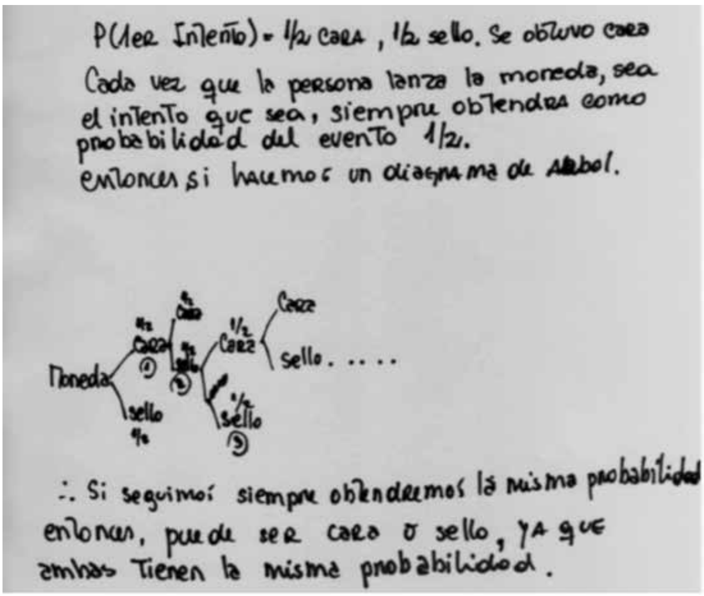
De acuerdo a lo planteado en la DG hipotética, para que un estudiante muestre una construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia, debe coordinar el proceso de espacio muestral y el objeto métodos de conteo para cuantificar la certeza en un determinado suceso. Dicha construcción será evidenciada cuando el estudiante asigne una probabilidad de ocurrencia a un suceso, reflexionando sobre ella, es decir, asigne un significado a dicho valor. Se espera evidenciar dicha construcción en las estrategias de resolución planteadas para responder a las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 6. A partir de las respuestas evidenciamos la presencia de la construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia. Casi todos los estudiantes responden de la manera correcta y esperada, determinando y asignando una probabilidad de ocurrencia a un determinado suceso, en base a creencias y evidencias o estabilizaciones de frecuencias presentadas para cada pregunta.

En el caso de la pregunta 1, 8 de los 12 estudiantes asignan de manera correcta la probabilidad de ocurrencia solicitada, otorgando a este valor numérico un significado basado en la estabilización de la frecuencia de aparición en el lanzamiento de una moneda, sustentando sus respuestas en el hecho de que cada lanzamiento es independiente del otro. Ejemplos de esto son las respuestas de los estudiantes 12 (figura 8) y 3 (figura 9).



Es probable que suceda cara o sello, la P de que ocurra C o S, es la misma 0,5. Suponiendo que la moneda no está cargada. Es indpte. del resultado anterior.

Figura 8. Respuesta a la pregunta 1 del estudiante 12



P(1er Intento) = 1/2 cara, 1/2 sello. Se obtuvo cara
Cada vez que la persona lanza la moneda, sea el intento que sea, siempre obtendrá como probabilidad del evento 1/2.
entonces si hacemos un diagrama de árbol.

∴ Si seguimos siempre obtendremos la misma probabilidad entonces, puede ser cara o sello, ya que ambas tienen la misma probabilidad.

Figura 9. Respuesta a la pregunta 1 del estudiante 3

Además, a partir de estas respuestas y argumentaciones (figuras 8 y 9) podemos evidenciar la presencia de un enfoque frecuentista del concepto de probabilidad de ocurrencia en estos estudiantes.

Es importante aclarar que 4 de los 12 estudiantes respondieron erróneamente a la pregunta 1, puesto que descartaron información implícita en el enunciado, esto es, dejar de lado el supuesto de independencia entre un lanzamiento y otro. Por otro lado, en sus argumentos no muestran haber considerado que a mayor número de lanzamientos se debe dar una estabilización de las frecuencias, sino que por el contrario, dan evidencias de ciertos sesgos probabilísticos. Algunas de las respuestas y argumentaciones que evidencian esto, son las figuras 10 y 11:

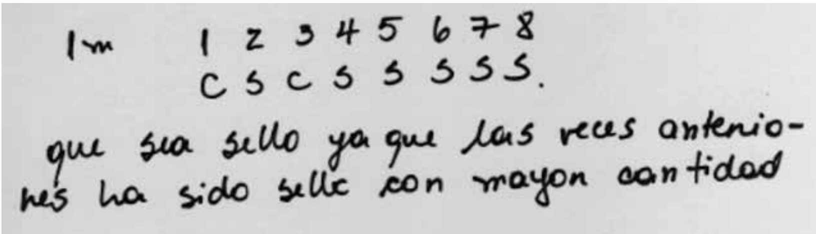


Figura 10. Respuesta a la pregunta 1 del estudiante 9

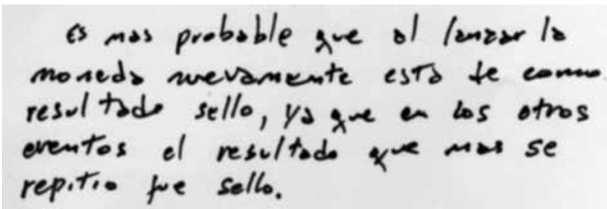


Figura 11. Respuesta a la pregunta 1 del estudiante 5

Los estudiantes 9 y 5 consideran que en el noveno lanzamiento es más probable obtener como resultado "sello", puesto que dejan de lado en su estrategia de resolución la estabilización de la frecuencia de aparición.

En la pregunta 2, la situación es aún mejor, puesto que en esta pregunta 10 de los 12 estudiantes, dan argumentos en los que queda de manifiesto la construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia, ya que además de coordinar el proceso de espacio muestral para la cuantificación de la certeza, reflexionan sobre ella asignándole un significado.

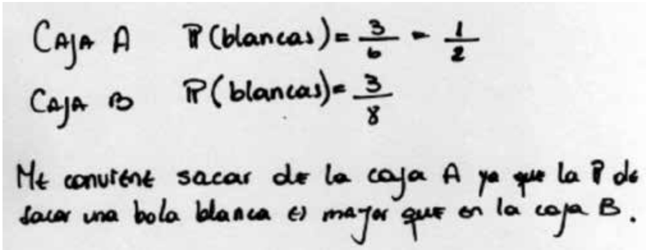


Figura 12. Respuesta a la pregunta 2 del estudiante 2

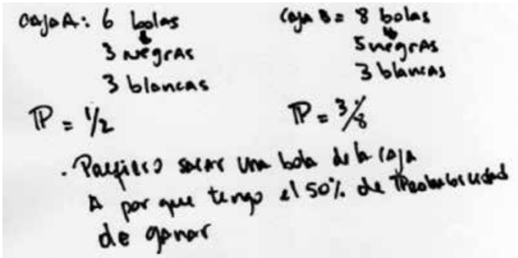


Figura 13. Respuesta a la pregunta 2 del estudiante 7

Para los estudiantes 2 (figura 12) y 7 (figura 13), la decisión de qué caja sacar una bola se basa en la evidencia, que los conduce a pensar que es más probable sacar una bola blanca de la caja A puesto que en ésta hay igual número de bolas blancas y negras, a diferencia de la caja B en la que hay más bolas negras que blancas. Este tipo de argumentos muestra que los estudiantes cuentan con una construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia. No obstante, el estudiante 4 fue uno de los 2 estudiantes que respondió erróneamente esta pregunta (figura 14).

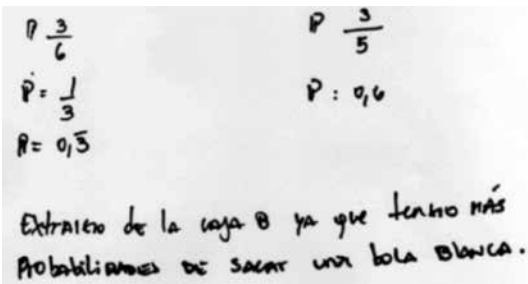
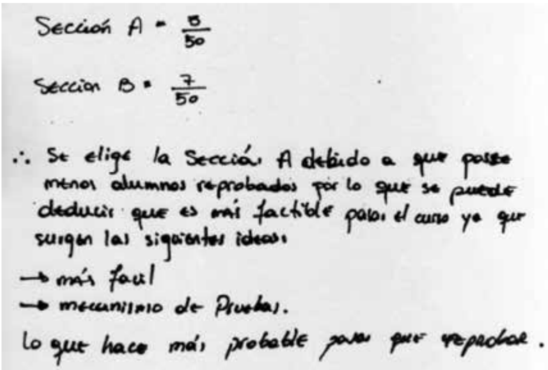


Figura 14. Respuesta a la pregunta 2 del estudiante 4

Sin embargo, los estudiantes del caso de estudio muestran la construcción proceso de probabilidad de ocurrencia, puesto que el tipo de error que cometieron en sus respuestas se debe a que aplican una relación no adecuada que se basa en determinar casos favorables/casos desfavorables.

En el caso de la pregunta 3, todos los estudiantes respondieron correctamente, mostrando la construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia; además, sus respuestas y argumentos se basaron en la interpretación de la información que tenían (figura 15), observándose una interpretación bayesiana en sus argumentos. A continuación, algunas de estas argumentaciones.


Sección A = $\frac{5}{50}$

Seccion B = $\frac{7}{50}$

∴ Se elige la Sección A debido a que posee menos alumnos reprobados por lo que se puede deducir que es más factible para el curso ya que surgen las siguientes ideas:

→ más facil

→ mecanismo de Pruebas.

Lo que hace más probable para que reprobar.

Figura 15. Respuesta a la pregunta 3 del estudiante 2

La argumentación de la respuesta a la pregunta 3 planteada por el estudiante 2 (figura 15), deja en claro la presencia de una concepción proceso de la probabilidad de ocurrencia, puesto que la cuantifica y asigna un significado con base en las evidencias.

En la pregunta 4 la situación es bastante similar a la de la pregunta 3, puesto que 11 de los 12 estudiantes respondieron correctamente, mientras sólo 1 no respondió. Nuevamente evidenciamos la construcción proceso para la probabilidad de ocurrencia. En la figura 16 se muestra una de estas respuestas, dado que las argumentaciones otorgadas en todas son concordantes.

Los estudiantes reconocen que para asignar una probabilidad de ocurrencia al suceso, es necesario tener más información. Argumentan que no es posible asignar una probabilidad exacta al suceso de que el derrame se pueda controlar, sino que sólo se puede asignar una probabilidad en base a la opinión personal. Así se observa en la respuesta del estudiante 3 (figura 16).

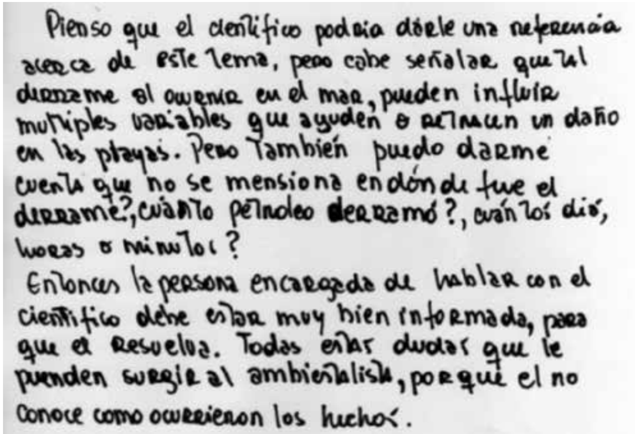

Pienso que el científico podría darle una referencia acerca de este tema, pero cabe señalar que tal derrame el ocurrió en el mar, pueden influir múltiples variables que ayuden o afecten un daño en las playas. Pero también puedo darme cuenta que no se mensiona en dónde fue el derrame?, cuánto petróleo derramó?, cuántos días, horas o minutos?
Entonces la persona encargada de hablar con el científico debe estar muy bien informada, para que el resuelva. Todas estas dudas que le pueden surgir al ambientalista, porque el no conoce como ocurrieron los hechos.

Figura 16. Respuesta a la pregunta 4 del estudiante 3

En las respuestas a las preguntas 5 y 6, evidenciamos la presencia de la construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia en este grupo de estudiantes, puesto que son capaces de asignar una probabilidad a un determinado suceso, y reflexionar sobre dicho valor. En las figuras 17 y 18 se muestran algunas de estas respuestas a modo de ejemplo.

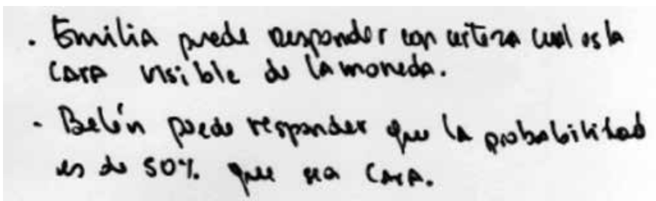

- Emilia puede responder con certeza cual es la cara visible de la moneda.
- Belén puede responder que la probabilidad es de 50% que sea cara.

Figura 17. Respuesta a la pregunta 5 del estudiante 7

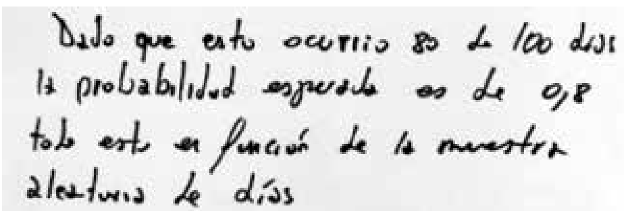

Dado que esto ocurrió 80 de 100 días la probabilidad esperada es de 0,8 todo esto en función de la muestra aleatoria de días

Figura 18. Respuesta a la pregunta 6 del estudiante 1

A partir de estas respuestas (figuras 17 y 18) evidenciamos que los estudiantes 7 y 1 asignan significado a la probabilidad de ocurrencia, situándose desde un enfoque bayesiano y uno frecuentista respectivamente.

Finalmente, a partir del análisis de las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 6, evidenciamos que el caso de estudio muestra una construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia, puesto que son capaces de coordinar el proceso de espacio muestral y objeto métodos de conteo para la cuantificación de la certeza de un determinado suceso, al cual asignan una probabilidad de ocurrencia, además de reflexionar sobre ella atribuyéndole un significado.

Construcción esquema de los axiomas de probabilidad

Según lo expuesto en la DG hipotética, para que un estudiante muestre una construcción esquema de los axiomas de probabilidad, deberá haber asimilado el proceso de probabilidad de ocurrencia.

Dicha construcción quedará en evidencia cuando el estudiante utilice axiomas de probabilidad y las propiedades que se deducen a partir de éstos para resolver situaciones, por medio del uso de las relaciones entre los conceptos vinculados en el concepto de probabilidad.

Es posible observar esta construcción en 7 de los 12 estudiantes, mientras los 5 restantes resuelven de manera errónea, presentándose en estos casos ausencia de la construcción esquema de los axiomas de probabilidad. A continuación se muestran algunos ejemplos.

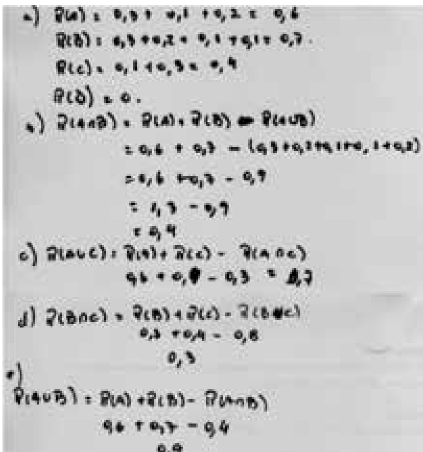
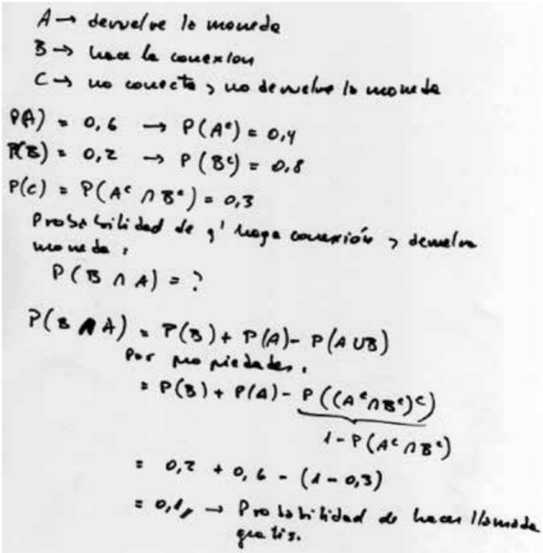


Figura 19. Respuesta a la pregunta 10 del estudiante 8



A → devuelve la moneda

B → hace la conexion

C → no conecta, no devuelve la moneda

$P(A) = 0{,}6 \rightarrow P(A^c) = 0{,}4$

$P(B) = 0{,}2 \rightarrow P(B^c) = 0{,}8$

$P(C) = P(A^c \cap B^c) = 0{,}3$

Probabilidad de q' haga conexión y devuelva moneda,

$P(B \cap A) = ?$

$P(B \cap A) = P(B) + P(A) - P(A \cup B)$

Por propiedades,

$= P(B) + P(A) - \underbrace{P((A^c \cap B^c)^c)}_{1 - P(A^c \cap B^c)}$

$= 0{,}2 + 0{,}6 - (1 - 0{,}3)$

$= 0{,}1 \rightarrow$ Probabilidad de hacer llamada gratis.

Figura 20. Respuesta a la pregunta 11 del estudiante 6

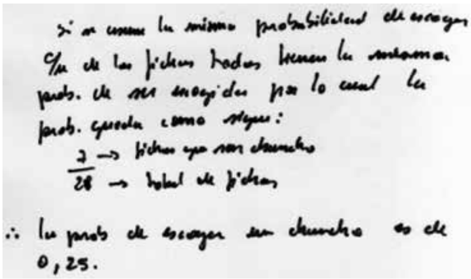
A partir de las respuestas a la preguntas 10 (figura 19) y 11 (figura 20) –mostramos las respuestas de dos estudiantes a modo de ejemplo–, estos estudiantes 8 y 6 evidencian una construcción esquema de los axiomas de probabilidad, dado que los utilizan y relacionan con el cálculo de probabilidad para un determinado suceso, lo cual coincide con lo propuesto en la DG hipotética. Ergo, podemos afirmar que estos datos sustentan dicha construcción mental propuesta en la DG hipotética.

Construcción objeto de cálculo de probabilidad

De acuerdo a la DG hipotética, la construcción objeto del cálculo de probabilidad se llevará a cabo por medio de la encapsulación de las construcciones esquema de probabilidad y proceso de probabilidad de ocurrencia. Dicha encapsulación dará lugar a la construcción objeto de cálculo de probabilidad.

Para evidenciar dicha construcción mostramos a continuación las producciones asociadas a las respuestas dadas a las preguntas 7, 8, 9, 12 y 13, que dan cuenta de la construcción objeto de cálculo de probabilidad. A través de ellas, el estudiante deberá desencapsular el objeto cálculo de probabilidad en los procesos regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes, según corresponda. Además de determinar la probabilidad de un determinado suceso, deben mostrar una reflexión.

Para la pregunta 7, todos los estudiantes evidenciaron tener una construcción objeto del cálculo de probabilidad, puesto que desencapsularon dicho objeto en el proceso regla de Laplace para determinar la probabilidad de ocurrencia del suceso, asignando posteriormente un significado a dicho cálculo (figura 21).

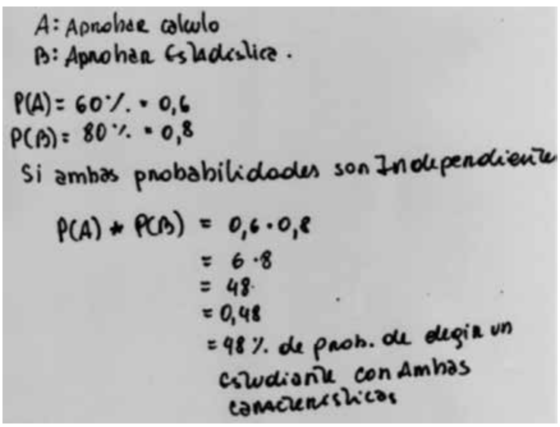

Si se tiene la misma probabilidad de escoger c/u de las fichas todas tienen la misma prob. de ser escogidas por lo cual la prob. queda como sigue:

$\frac{7}{28}$ 7 → fichas que son chanchos, 28 → total de fichas

∴ la prob de escoger un chancho es de 0,25.

Figura 21. Respuesta a la pregunta 7 del estudiante 8

Al analizar las respuestas a la pregunta 8, se evidencia que 9 de 12 estudiantes muestran una construcción objeto del cálculo de probabilidad, puesto que desencapsulan el objeto en el proceso de cálculo de probabilidad para sucesos independientes, asignando un significado al cálculo de dicha probabilidad (figura 22).


A: Aprobar calculo
B: Aprobar Estadistica.

P(A) = 60% = 0,6
P(B) = 80% = 0,8
Si ambas probabilidades son Independiente

P(A) * P(B) = 0,6 · 0,8
= 6 · 8
= 48
= 0,48
= 48% de prob. de elegir un estudiante con Ambas caracteristicas

Figura 22. Respuesta a la pregunta 8 del estudiante 3.

La pregunta 12 fue respondida de manera correcta por 5 de los 12 estudiantes. Es posible establecer que logran desencapsular la construcción objeto cálculo de probabilidad en el proceso teorema de Bayes, tal como se plantea en la DG hipotética (figura 23).

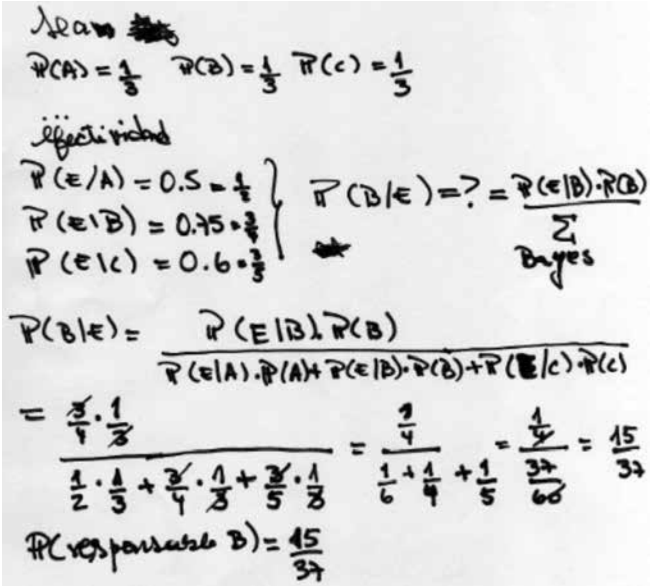


Figura 23. Respuesta a la pregunta 12 del estudiante 11.

Las respuestas a la pregunta 13, evidencian que al menos 4 estudiantes muestran una construcción objeto del cálculo de probabilidad, desencapsulando dicho objeto en el proceso probabilidad condicional, dadas las características de la situación planteada. Esto se evidencia en la respuesta del estudiante 11 (figura 24), quien asigna una probabilidad de ocurrencia a un determinado suceso, desencapsulando tal objeto en el proceso cálculo de probabilidad condicional.

En base a la evidencia empírica, podemos afirmar que los datos soportan la construcción mental de objeto para el cálculo de probabilidad, tal y como se propone en la DG hipotética.

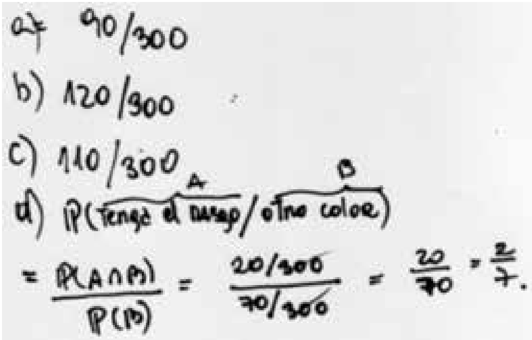


Figura 24. Respuesta a la pregunta 13 del estudiante 3

Construcción objeto del concepto de probabilidad

A partir del conjunto de diversas respuestas obtenidas al cuestionario, podemos afirmar que los estudiantes dispuestos en el caso de estudio evidencian una construcción objeto del concepto de probabilidad, puesto que han podido encapsular los procesos de regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes, atribuyéndoles una determinada forma de proceder, en función de la situación a la cual se enfrenten, además de asignar un determinado significado a dicho cálculo.

Así, con la aplicación y análisis de las respuestas, han quedado de manifiesto, en base a las respuestas otorgadas por los estudiantes, las construcciones y mecanismos mentales planteados en la DG hipotética para la construcción del concepto de probabilidad; es decir, se observan en su totalidad las construcciones y mecanismos mentales anunciados en nuestra descomposición genética lo que hace que nuestra DG sea un camino viable para la construcción del concepto en cuestión.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Por medio de esta investigación ha sido posible mostrar evidencias que han permitido la validez o el refinamiento de la hipótesis de la investigación, llamada DG, sustentando así, a partir de los datos mostrados en el caso de estudio, un modelo de construcción-aprendizaje del concepto de probabilidad. Al mismo tiempo, a partir del análisis y verificación de los datos obtenidos, mediante la aplicación del cuestionario, hemos logrado documentar la DG hipotética como un modelo de construcción del concepto de probabilidad, y de este modo dar respuesta a nuestro interrogante de investigación, lo que nos ha proporcionado la información necesaria para identificar y describir, en una primera aproximación, las construcciones y mecanismos mentales de este caso de estudio.

Uno de los principales resultados de este estudio se relaciona con la construcción objeto de sucesos, la cual es alcanzada por uno de los estudiantes a quienes se aplicó el cuestionario. Dicho estudiante logró identificar la necesidad de aplicar y relacionar los métodos de conteo; es decir, coordina la construcción objeto de métodos de conteo con la construcción proceso de espacio muestral, mediante la cual es posible dar respuesta al problema planteado conjuntamente con la construcción mental objeto de cálculo de probabilidad. Consideramos que la ausencia de esta construcción objeto en los otros estudiantes se debe a que éstos carecen de la construcción objeto de métodos de conteo, lo cual les impide reconocer la necesidad de aplicarlos a una determinada situación, además de la desencapsulación de la construcción objeto de métodos de conteo en los distintos procesos asociados.

Podemos deducir a partir de este estudio de caso que la construcción mental objeto del concepto de probabilidad es alcanzada. Puesto que los resultados nos muestran en toda su amplitud las construcciones mentales propuestas en la DG hipotética, es decir, la construcción objeto de sucesos, construcción proceso de probabilidad de ocurrencia, construcción esquema de los axiomas de probabilidad y construcción objeto de cálculo de probabilidad.

De acuerdo con la evidencia obtenida a partir de las respuestas y argumentos de este grupo de estudiantes universitarios de primer año, podemos proponer una primera respuesta desde este enfoque teórico a la pregunta de investigación *¿cómo los estudiantes universitarios de primer año construyen el concepto de probabilidad?*, siendo posible establecer que éstos construyen, en su gran mayoría, el concepto de probabilidad desde un enfoque frecuentista, y principalmente centrado en acciones sobre el objeto cálculo de probabilidades, más que en la desencapsulación de ese objeto en los procesos que lo conforman.

Es importante señalar que a partir de los resultados obtenidos en esta investigación, se cuenta con una DG documentada, refinada y viable, a partir de la cual es posible, si se quisiera, elaborar propuestas didácticas para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, para ser implementadas en estudiantes universitarios de primer año. Las cuales deberían considerar situaciones que, por un lado, aborden la dualidad de significados de la probabilidad, y por otro el tratamiento en profundidad de los métodos de conteo, todo ello con base en la ruta propuesta en la DG. Puesto que de acuerdo a las respuestas y argumentos dados por el estudio de caso a los cuales se aplicó el cuestionario, evidencian tener dificultades con la construcción objeto de los métodos de conteo y el mecanismo mental de desencapsulación asociado. Por esta razón, una propuesta didáctica en el tema probabilidad debería ahondar y propiciar que dicha construcción sea alcanzada por los aprendices.

Por otro lado, es importante señalar que esta investigación constituye una primera aproximación bajo la perspectiva de la teoría APOE al estudio del aprendizaje del concepto de probabilidad y viene a proponer un modelo de construcción para ser aplicado en contextos de aula a partir del diseño de una secuencia didáctica.

Dentro de las limitaciones de nuestro estudio se encuentra el reducido tamaño de la muestra, por lo que resultaría interesante replicar el estudio con un número mayor de estudiantes, lo que a su vez permitirá refinar aún más nuestra descomposición genética del concepto de probabilidad. Sin embargo, consideramos que esta indagación constituye un aporte a la matemática educativa y sobre todo a la comunidad interesada en el campo de la didáctica de la probabilidad específicamente en el aprendizaje del concepto de probabilidad desde el constructo teórico APOE.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., J. Cottril, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa, M. Trigueros y K. Weller (2014), *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education,* Nueva York, Springer.

Asiala, M., A. Brown, D. J. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews y K. Thomas (1996), "A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education", en J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II,* vol. 6, pp. 1-32.

Batanero, C. (2005), "Significados de la probabilidad en la educación secundaria", *Relime,* vol. 8, núm. 3, pp. 247-263.

——— (2008), "Significados de la probabilidad en la educación secundaria", en R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoameri-*

cano, México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Ediciones Díaz de Santos, pp. 27-40.

Beth, E. W. y J. Piaget (1980), *Epistemología matemática y psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real,* Barcelona, Crítica.

Carranza, P. y J. Fuentealba (2010), "Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística", *Unión,* núm. 24, pp. 57-68.

Contreras, J. M. (2011), "Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional", tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

De Groot, M. H. (1988), *Probabilidad y estadística,* México, Addison-Wesley Iberoamericana.

Díaz, C. (2007), "Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología", tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

Dubinsky, E. (1991), "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

——— (1996), "Some thoughts on a first course in Linear Algebra at the college level", en D. Carlson, C. R. Jonson, D. C. Lay, D. Porter, A. Watkins y W. Watkins (eds.), *Resources for the teaching of linear algebra,* Washington, Mathematical Association of America, pp. 85-105.

Gómez, E. (2014), "Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria", tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

Hacking, I. (1995), *El surgimiento de la probabilidad,* Barcelona, Gedisa.

Lecoutre, M-P. (1992), "Cognitive Models and problem spaces in 'Purely Random' Situations", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 23, núm. 6, diciembre, pp. 557-568.

Lecoutre, M-P. y J-L. Durand (1988), "Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 19, núm. 3, agosto, pp. 357-368.

Mohamed, N. (2012), "Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad", tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

Parraguez, M. (2009), "Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial", tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, IPN, México.

Parraguez, M. y A. Oktaç (2012), "Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial", *Paradigma,* vol. 33, núm. 1, junio, pp. 103-134.

Piaget, J. y R. García (1982, 1983, 1989), *Psicogénesis e historia de la ciencia,* México, Siglo XXI Editores.

Piaget, J. y B. Inhelder (1951), *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant,* París, Press Universitaires de France.

Trigueros, M. y A. Oktaç (2005), *La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* vol. 10, 157-176.

ANEXO

Instrumento utilizado para la toma de datos

Preguntas que componen el instrumento

Pregunta 1

Una persona lanza 8 veces la misma moneda (legal), obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda una novena vez, ¿qué es más posible que suceda cuando se lance la moneda por novena vez? ¿Por qué? Explique en detalle.

Pregunta 2

Debes sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados.
Ganas si obtienes una bola blanca. ¿De qué caja prefieres hacer la extracción? ¿Por qué? Explique en detalle.

Pregunta 3

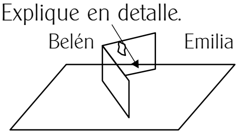
Carolina debe elegir entre dos secciones A o B del curso de estadística a inscribir para el próximo semestre. Si lo único que sabe es que el semestre pasado reprobaron 3 por cada 50 alumnos que tomaron la sección A y 7 por cada 50 alumnos que tomaron la sección B. ¿Qué sección le conviene tomar? ¿Por qué? Explique en detalle.

Pregunta 4

Ocurrió un derrame de petróleo en el mar. Se pregunta a un científico ambientalista: "¿Cuál es la probabilidad de que este derrame pueda controlarse antes de que cause daño generalizado en las playas cercanas?"- ¿Qué piensa usted que puede contestar el científico? ¿Por qué? Explique en detalle.

Pregunta 5*

Imaginemos dos personas frente a una mesa, Belén a la izquierda y Emilia a la derecha. Se coloca una hoja de papel sobre la mesa como muestra la figura. Se tira una moneda de tal manera que cae a la derecha de la hoja de papel, frente a Emilia. Claro está que Belén no tiene posibilidad de ver el resultado del lanzamiento. Se les pregunta a ambas ¿cuál es la probabilidad que la cara visible de la moneda sea cara? ¿Cómo son las respuestas de Belén y Emilia? Explique en detalle.



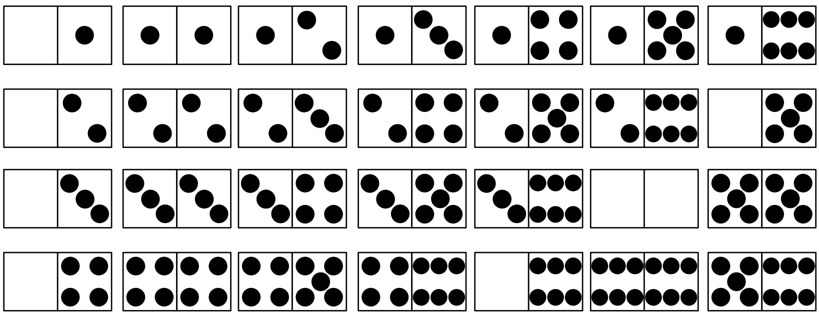
* Pregunta extraída de la investigación de Carranza y Fuentealba (2010).

Pregunta 6

Un ingeniero eléctrico estudia la demanda máxima en una planta generadora de electricidad. Observando que en 80 de los 100 días seleccionados aleatoriamente para el estudio, la demanda máxima se da entre 18:00 y 19:00 horas.
¿Cuál es la probabilidad de que la demanda máxima se comporte de la misma manera en cualquier otro día? ¿Por qué? Explique en detalle.

Pregunta 7

El juego del dominó consta de 28 fichas que se muestran a continuación:



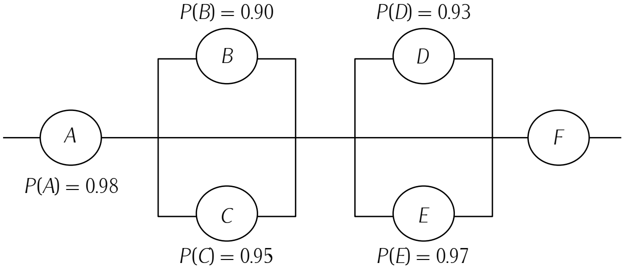
En este juego a aquellas fichas que tienen el mismo número de puntos (6, 5, 4, 3, 2, 1 ó 0) a ambos lados de la raya divisoria, se les llama "chancho". ¿Cuál es la probabilidad que una persona saque al azar un "chancho"? Explique en detalle.

Pregunta 8

Un grupo de estudiantes universitarios rendirá los exámenes finales de cálculo y estadística. Si sabemos que el porcentaje de aprobación del curso de cálculo es de un 60% y el de estadística de un 80%, suponiendo que las calificaciones obtenidas en cada uno de los cursos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un estudiante al azar éste haya aprobado ambos cursos? Explique en detalle.
* Pregunta extraída de la investigación de Batanero (2005).

Pregunta 9

Un sistema contiene cinco componentes que se encuentran conectadas entre sí como se muestra en la figura, donde las probabilidades indican la seguridad de que la componente funcione adecuadamente. Si el funcionamiento de una componente en particular es independiente del de las demás, ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema trabaje? Explique en detalle.



Pregunta 10

El peso de un dado ha sido alterado de manera que los resultados produzcan la siguiente distribución de probabilidad:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0.1	0.3	0.2	0.1	0.1	0.2

Considere los eventos:

$A = \{\text{número par}\}$; $B = \{2,3,4,5\}$; $C = \{x : x < 3\}$; $D = \{x : x > 7\}$

Determine:

a) La probabilidad de ocurrencia para cada uno de los eventos anteriores.
b) $P(A \cap B)$
c) $P(A \cup C)$
d) $P(B \cap C)$
e) $P(A \cup U)$

Pregunta 11

Cierto teléfono público (que usualmente falla) devuelve la moneda insertada con probabilidad 0,6; hace la conexión con el número que uno marca con probabilidad 0,2; se queda con la moneda y no da la conexión requerida con probabilidad 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona haga la llamada gratis? Explique en detalle.

Pregunta 12

Un paciente de cáncer está siendo tratado con una combinación de tres fármacos. Se observa que cuando se utilizan simultáneamente, la probabilidad de que los tres fármacos se inactiven es de 1/3.

La efectividad de cada fármaco, con respecto a producir una remisión del tumor, es diferente. El fármaco A se ha mostrado efectivo en un 50% de los casos; el fármaco B en un 75%, y el fármaco C en un 60%.

La enfermedad remite en el paciente. ¿Cuál es la probabilidad de que el responsable de ello sea el fármaco B? Explique en detalle.

Pregunta 13

Suponga que cierto rasgo oftálmico está asociado con el color de ojos. Se estudiaron 300 individuos elegidos aleatoriamente, con los resultados siguientes:

	Color de ojos			
Rasgos	**Azul**	**Café**	**Otro**	**Totales**
Presencia	70	30	20	120
Ausencia	20	110	50	180
Totales	90	140	70	300

Calcular la probabilidad de que una persona elegida aleatoriamente:
a) Tenga los ojos azules.
b) Tenga el rasgo.
c) No tenga el rasgo y presente ojos café.
d) Tenga el rasgo dado que presentó otro color de ojos (no azul ni café).

Pregunta 14

Dos amigos, Nicolás y Fernando, decidieron este semestre inscribir Tenis como curso deportivo con la idea de entrenar juntos, pero les acaban de avisar que los 90 alumnos aceptados serán distribuidos aleatoriamente en tres secciones de 30 alumnos cada una. ¿Cuál es la probabilidad que los dos amigos queden en la misma sección y puedan entrenar juntos durante el semestre tal como lo tenían planificado si es que ya fueron aceptados en el deportivo? Explique en detalle.

DATOS DE LAS AUTORAS

Claudia Vásquez Ortiz
Pontificia Universidad Católica de Chile
cavasque@uc.cl

Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
marcela.parraguez@ucv.cl