ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones

Analysis of the coupling process between the epistemic and cognitive facets of mathematical knowledge in the context of an exploratory-investigative task about patterns

Luis R. Pino-Fan, Adriana Assis y Juan D. Godino

Resumen: En este trabajo exploramos el proceso de acoplamiento entre los significados pretendidos e implementados por los profesores, y los significados que logran los estudiantes, en un contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones, implementada en una clase de 7º año de Enseñanza Básica en Brasil. Para ello, utilizamos el modelo teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, el cual nos permitió describir e interpretar los procesos de interacción en el aula y establecer las relaciones entre las facetas que, según este modelo, componen el proceso de enseñanza y aprendizaje. Como resultado resaltamos la complejidad del trabajo del profesor, quien debe ser capaz de reconocer y negociar los significados producidos por los estudiantes –no siempre contemplados en su planeación inicial– tomando decisiones sobre el tipo de actuación que debe adoptar momento a momento a lo largo del proceso de estudio para garantizar la optimización del aprendizaje.

Palabras clave: Análisis de procesos de instrucción. Patrones. Interacción en el aula. Enfoque Onto-Semiótico.

Abstract: In this paper, we explore the coupling between the intended and implemented meanings by the teachers and the meanings achieved by the students in the context of an exploratory-investigative task on patterns, implemented in a class of the 7th grade of the basic education in Brazil. For this, we use the theoretical model known as Onto-Semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction, which allowed us to describe and interpret

Fecha de recepción: 2 de enero de 2015; fecha de aceptación: 13 de abril de 2015.

the interaction processes in the classroom and establish relations between the facets that, according to this model, compose the process of teaching and learning. As a result, we emphasize the complexity of the teacher's work, which should be able to recognize and negotiate the meanings produced by the students –not always contemplated in her initial planning– making decisions about the type of performance that should be adopted, moment-to-moment, throughout the process of study to ensure the optimization of learning.

Key words: Instructional process analysis. Patterns. Classroom interaction. Onto-semiotic approach.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los aspectos necesarios para gestionar idóneamente los aprendizajes de los estudiantes de tópicos matemáticos específicos, es un tema que ha ido cobrando relevancia en la comunidad científica de Didáctica de la Matemática. Una de las principales problemáticas que se tiene en las investigaciones sobre las interacciones en el aula, las cuales intervienen en el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas, es ¿cómo analizar las intervenciones de los docentes y de los discentes? Varias investigaciones focalizan su atención en el estudio de las prácticas matemáticas que realizan los alumnos en clase, enfatizando los aprendizajes logrados por los estudiantes respecto de los aprendizajes pretendidos por la institución. Esto ayuda a identificar conflictos semióticos potenciales y contribuye a la toma de decisiones sobre qué enseñar y cómo enseñar, y así potenciar buenas prácticas (Robles, Del Castillo y Font, 2012). Otras investigaciones, de acuerdo con Coll y Sánchez (2008), se centran en la actividad de los profesores, focalizando su atención en cómo enseñan: el discurso que utilizan, la motivación en clase, las representaciones que potencian, los objetos matemáticos y procesos que movilizan (Planas e Iranzo, 2009; Pochulu y Font, 2011; Contreras, García y Font, 2012; Badillo, Figueiras, Font y Martínez, 2013).

Existen modelos y pautas, presentados desde diversos marcos teóricos, para el análisis de las interacciones que se suscitan en un proceso de instrucción (Coll y Sánchez, 2008; Planas e Iranzo, 2009; Font, Planas y Godino, 2010). Sin embargo, las investigaciones que se han realizado con estos modelos se centran en aspectos parciales de las interacciones. Esto es señalado por Planas e Iranzo (2009) de la siguiente manera "...cualquier modelo de análisis sobre la interacción en el aula es necesariamente un modelo que prioriza algunos puntos que conforman la complejidad asociada a los fenómenos de comunicación, participación e interacción social" (p. 209).

En este trabajo exploramos el acoplamiento entre los significados pretendidos e implementados por el profesor, *faceta epistémica del conocimiento*, y los significados que logran los estudiantes, *faceta cognitiva del conocimiento,* mediante el análisis de las configuraciones epistémica y cognitiva, respectivamente. Este análisis tiene lugar en un contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones, implementada en una clase de 7º año de Enseñanza Básica. A partir del análisis, y de la identificación y descripción de los objetos y procesos matemáticos movilizados por las profesoras y alumnos en dicha actividad, se establecen las relaciones entre las seis facetas que propone el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007), modelo teórico que adoptamos como base de este estudio.

En nuestra propuesta metodológica para el análisis de procesos de instrucción cobra especial relevancia la *faceta interaccional*, puesto que es a partir de ella que se puede describir y comprender la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje, en nuestro caso, relacionado con una actividad que involucra el uso de patrones.

Hemos organizado este trabajo en cinco apartados. Los primeros tres refieren, respectivamente, a los antecedentes, marco teórico y metodológico, y a la contextualización de la tarea implementada, la cual ha sido usada para otros fines en Assis, Godino y Frade (2012). En el cuarto bloque se presenta el análisis epistémico del conocimiento, es decir, los significados pretendidos o planificados, por dos profesoras. En el quinto bloque se analiza la interacción entre las distintas facetas del conocimiento, y se estudia el acoplamiento entre los aprendizajes pretendidos por las profesoras y los aprendizajes logrados por los estudiantes. Finalmente, se presentan las conclusiones y consideraciones finales, enfatizando potencialidades y limitaciones de nuestra propuesta metodológica.

MARCO TEÓRICO

Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos

El EOS es un sistema teórico-metodológico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Con dicho fin, se adopta una perspectiva global que tiene en cuenta seis dimensiones, o facetas, y las interacciones entre las mismas, implicadas en los proceso de enseñanza y aprendizaje de temas concretos de matemáticas: epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica. Para cada una de estas facetas se proponen cinco niveles de análisis: *prácticas matemáticas* (personales e institucionales), *configuración de objetos y procesos* involucrados en las prácticas matemáticas, *normas y metanormas* que regulan los *procesos de interacción* en el aula, e *idoneidad didáctica* (Godino, 2011; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007). La figura 1 ilustra tanto las dimensiones como los niveles de análisis de dichas facetas, involucrados en los procesos de estudio, y que dan cuenta del carácter relacional de la enseñanza. Los profesores, los estudiantes y el contenido sólo se pueden comprender unos en relación a los otros. El profesor trabaja para orquestar el contenido, las representaciones del contenido y las interrelaciones de las personas que intervienen en la clase. Los modos de estar de los estudiantes, sus formas de participación y su aprendizaje, emergen de estas relaciones mutuamente constitutivas. La enseñanza es también *multidimensional* (Frankle, Kazemi y Battey, 2007, p. 227).

En Font, Planas y Godino (2010, p. 91), se conjugan estas facetas y niveles de análisis didáctico, en la propuesta de cinco niveles para el análisis de procesos de instrucción:

Nivel 1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
Nivel 2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
Nivel 3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
Nivel 4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
Nivel 5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Dichos autores señalan que, para un proceso de instrucción, la aplicación del nivel 1 lleva a describir la secuencia de prácticas matemáticas. La realización de dichas prácticas moviliza elementos distintos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza prácticas orientadas a la resolución de situaciones-problema, es necesario considerar, entre otros aspectos, objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (nivel 2). Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros aprendices, el análisis debiera progresar, según estos autores, desde la situación-problema y las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (nivel 1) a las configuraciones de objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (nivel 2) y de ahí hacia el estudio de las interacciones entre profesor y alumnos.

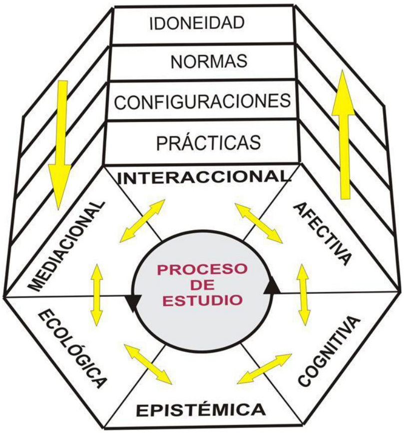


Figura 1. Facetas y niveles de análisis didáctico (Godino, 2009)

Para esta investigación, el estudio de las interacciones (nivel 3) que se suscitan en torno a un proceso de instrucción entre el profesor y los alumnos, e inclusive con los medios y recursos utilizados para el aprendizaje, cobran especial relevancia. Esto es así ya que es a partir de dichas interacciones que se pueden analizar las prácticas matemáticas realizadas para la resolución de una situación-problema (nivel 1), las configuraciones didácticas de objetos y procesos que emergen de dichas prácticas (nivel 2), las normas y metanormas que regulan las interacciones (nivel 4) y las mejoras potenciales del proceso de instrucción (nivel 5). En otras palabras, las interacciones son centro de los procesos de instrucción, siendo que a partir de ellas podemos estudiar los fenómenos vinculados a factores clave que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el apartado 4 se ejemplifica el uso de los niveles 1 y 2 desde el punto de vista epistémico, es decir, lo que pretende el profesor como parte de la institución; mientras que en el apartado 5 se utilizan los cinco niveles para el análisis del proceso de instrucción implementado, el cual se describirá en el apartado 4.

Actividades exploratorio-investigativas

El aprendizaje basado en la investigación (*inquiry learning*) es un modelo de instrucción inspirado en las prácticas de investigación científica, que enfatiza el hecho de proponer a los estudiantes cuestiones o problemas relevantes, producir y analizar datos y construir argumentos basados en las evidencias (Hmelo-Silver, Duncan y Chinn, 2007). Ponte, Fonseca y Brunheira (1999) utilizan el término "investigación matemática" para denominar el "inquiry learning" y lo diferencian de la resolución de problemas de la siguiente manera:

> En la resolución de problemas, tal como es entendida inicialmente, el objetivo es encontrar el camino para llegar a un punto no inmediatamente accesible. Es un proceso convergente. En una investigación matemática, el objetivo es explorar todos los caminos que surgen como interesantes, a partir de una situación dada. Es un proceso divergente. Se sabe cuál es el punto de partida, más no se sabe cuál será el punto de llegada (pp. 94-95).

En este trabajo utilizamos el término *actividades exploratorio-investigativas* para referirnos al tipo de tarea en la que los alumnos se dedican tanto a la exploración como a la investigación matemática. Pensamos que el término "exploratorio-investigativas" es más propicio para describir lo que ocurre con alumnos de Enseñanza Básica que por primera vez se enfrentan a este tipo de actividades.

CONTEXTUALIZACIÓN DE LA CLASE ANALIZADA

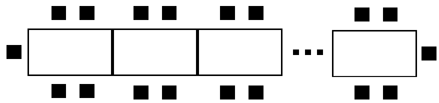
El episodio didáctico considerado tuvo una duración aproximada de 1 hora y 10 minutos, y se desarrolló en una clase de 7º año de Enseñanza Básica de una escuela pública, situada en una región urbana de Belo Horizonte, Brasil. La clase estaba conformada por 15 alumnos de aproximadamente 12 años. La actividad fue implementada por dos profesoras, la segunda autora de este artículo y la profesora titular de la clase. En este artículo nos referiremos a ellas como Prof. 1 y Prof. 2, respectivamente.

Los alumnos se organizaron libremente en tres grupos. La tarea que aquí se analiza (figura 2) fue la séptima actividad implementada con estos alumnos, de un total de nueve actividades exploratorio-investigativas sobre diversos temas. Al momento de la implementación, los alumnos aún se encontraban en una fase de transición entre la "clase tradicional", a las que estaban habituados, y el trabajo de investigación en el aula.

Tarea investigativa: ¿Álgebra en el banquete de boda?

La tarea propuesta:

En determinado banquete de boda, se colocan mesas para seis personas. Esperando que hubiese una mayor aproximación entre los invitados para la confraternización, decidieron juntarlas en la siguiente disposición:



¿Será que hay álgebra en un banquete de boda? A ver... Siguen algunas cuestiones para nuestra investigación.

(¡Recuerda! Todas las respuestas deben ser justificadas, con cálculos o dibujos).

a) Construye una tabla que relacione la cantidad de mesas y la cantidad de sillas utilizadas. Encuentra el número de sillas utilizadas con, por lo menos, seis sillas. Observe las posibles relaciones entre mesas y sillas.

b) Utilizando 15 mesas, ¿cuántas sillas son necesarias? Justifique.

c) Si hubiera 42 sillas, ¿cuántas mesas serían necesarias? Justifique.

d) ¿Es posible formar una hilera de mesas que tenga 100 sillas? Si es posible, ¿cuántas mesas serían necesarias? ¿Por qué?

e) Investigando la secuencia, a partir del dibujo y/o de la tabla construida en el apartado a), explica cómo está constituida, ¿Cuál es el patrón existente?

f) Escribe una expresión matemática que relacione el número de mesas y el número de sillas. Es importante el uso de un lenguaje más elaborado, un lenguaje que se aproxime a una fórmula. ¿Qué letras podrían ser usadas?

Figura 2. Tarea exploratorio-investigativa implementada[1]

A pesar de haber estudiado el tema de ecuaciones de primer grado, los alumnos participantes no habían trabajado con secuencias, patrones o actividades similares. A cada grupo se le proporcionó una hoja con instrucciones para el desarrollo de la tarea (figura 2), varios rectángulos recortados en lona del mismo tamaño, para simular las mesas, y una bolsa con corchos para simular las sillas, tal y como se muestra en la figura 3. Así mismo, cada grupo recibió una hoja de

[1] La tarea investigativa ¿Álgebra en el banquete de boda? fue adaptada de Fernández (2010)..

papel y varios lápices de colores para hacer sus anotaciones. Se les pidió a los alumnos que, utilizando el material para simular las mesas y las sillas, desarrollasen, en grupos, la investigación propuesta.

En este artículo, analizamos el trabajo realizado por un equipo de cuatro estudiantes a los que hemos nombrado Marcelo, Paulo, Vanderlei y Valter. Este equipo, a pesar de presentar dificultades en matemáticas, se mostró bastante motivado y comprometido con la actividad, demostrando persistencia cuando no conseguían progresar. Con esta tarea se pretendía que los alumnos: 1) explorasen la relación y variación entre las magnitudes involucradas; 2) tuvieran la necesidad de utilizar una letra, como variable, para representar una de las magnitudes involucradas; 3) comprendieran la noción de término general de la secuencia numérica obtenida a partir del dibujo o de la tabla construida; 4) formularan y comprobaran conjeturas matemáticas en la exploración de la tareas propuesta; y 5) obtuvieran la fórmula o expresión matemática, que representa la relación entre las magnitudes o término general de la secuencia, es decir, el enésimo término.

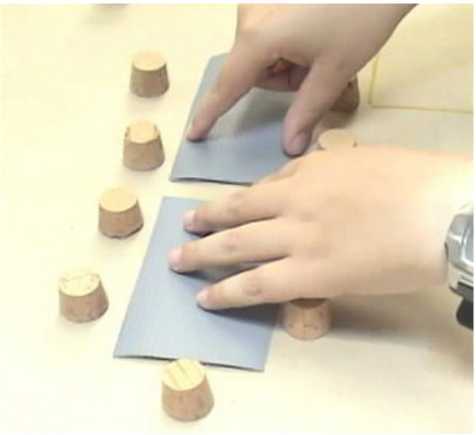


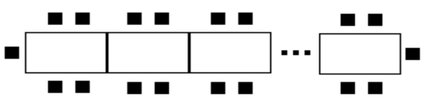
Figura 3. Manipulación de los materiales concretos por un estudiante

En lo que respecta a la realización de la tarea, vemos que está en juego una correspondencia, o función, que relaciona el número de sillas (variable dependiente) y el número de mesas (variable independiente). Los conjuntos inicial y final son las cantidades de mesas y sillas, y sus respectivas medidas. Consideramos que la emergencia o manifestación del pensamiento algebraico no está en que el alumno maneje, reconozca o aplique objetos particulares, en casos particulares, tales como número, cantidad, medida, multiplicación o adición. En el caso de la solución de tareas sobre patrones, dicho pensamiento se manifiesta cuando se identifica la regla o criterio de correspondencia que sigue el patrón. Esta regla, o proposición, puede ser expresada de diversas maneras, por ejemplo, "se obtiene el número de sillas multiplicando por cuatro el número de mesas y sumando las dos sillas que están en las cabeceras". De acuerdo con el modelo de niveles de algebrización de Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), un nivel superior de razonamiento algebraico es logrado cuando el alumno es capaz de generalizar dicha proposición escribiendo, por ejemplo, $y = 4x + 2$, utilizando x e y para indicar cualquier valor numérico.

DESCRIPCIÓN DE LA CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA

A continuación presentamos en detalle la configuración epistémica que emergió de la actividad de planeación de los conocimientos pretendidos por las dos profesoras. Como parte de esta planeación, las profesoras señalaron que proporcionarían poca o ninguna ayuda a los estudiantes, pero que los estudiantes en definitiva sí requerirían algún tipo de soporte. Las tablas 1 a 5, presentan los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos) que conforman la configuración epistémica que las profesoras utilizaron para la planeación de la puesta en marcha de la actividad. Se presentan, también, los significados que las profesoras confirieron a dichos objetos matemáticos primarios dentro de su planeación.

Tabla 1. Configuración epistémica de la tarea: elementos lingüísticos

Elementos lingüísticos	
Objetos	**Significados**
Previos	
	Indica de manera icónica la forma en que las mesas y sillas deben ser ordenadas.

Elementos lingüísticos	
Objetos	**Significados**
Previos	
"Observe las posibles *relaciones* entre mesas y sillas..."	Asociación entre las magnitudes. En este caso, entre el número de mesas y el número de sillas.
"¿Cuál es el *patrón* existente?"	Regularidad que permite identificar el próximo término de una secuencia.
"*Es importante el uso de un lenguaje más elaborado, un lenguaje que se aproxime a una fórmula*"	Sentencia que refiere a la búsqueda de una expresión matemática que represente el patrón de una forma genérica.
Emergentes	
Explicación de la relación entre las magnitudes involucradas (finalizando en una sentencia matemática).	$4 . n + 2$ $1 + 2n + 1 + 2n$ $n . 2 . 2 + 2$ $2 . (2n+1)$

Conflictos potenciales:
- Escritura parcial o incorrecta de la expresión que relaciona las magnitudes.

Tabla 2. Configuración epistémica de la tarea: conceptos/definiciones

Conceptos/definiciones	
Objetos	**Significados**
Previos	
Álgebra	Parte de la matemática que trata de aritmética generalizada, funciones, ecuaciones y estructuras.
Número	Objeto de la matemática usado para describir cantidades, orden o medida.
Secuencia matemática	Lista ordenada de números o figuras cuyo orden es definido por una regla.

Conceptos/definiciones	
Objetos	**Significados**
Expresión matemática	Combinación de números, letras, símbolos y operadores, agrupados de forma significativa.
Emergentes	
Magnitud Función	Rasgo cuantificable de un objeto. La relación/variación entre las magnitudes es obtenida por medio del concepto de función. Están implícitamente involucrados, por lo tanto, los conceptos de variable dependiente e independiente.
Variable independiente	En la expresión general esperada, la variable independiente es x, o bien, el número de mesas.
Variable dependiente	En la expresión general esperada, la variable dependiente sería y, o bien, el número de sillas.

Conflictos potenciales:
- Los alumnos pueden no conseguir construir los conceptos presentados, aunque se trate de una primera aproximación.

Tabla 3. Configuración epistémica de la tarea: propiedades/proposiciones

Propiedades/Proposiciones	
Objetos	**Significados**
Previas	
62 sillas. 10 mesas	Soluciones obtenidas a través del conteo, para los apartados *a)* y *b)*, respectivamente.
Emergentes	
P1: $4n + 2$ ó $2(2n + 1)$	Solución esperada para el apartado *f)* de la tarea.

Conflictos potenciales:
- No determinar la proposición P1.

Tabla 4. Configuración epistémica de la tarea: procedimientos

Procedimientos	
Objetos	**Significados**
Previos	
Describir la "próxima" situación, incrementando en una mesa, al total de mesas de la situación anterior, y determinando el número de sillas (uso recursivo).	Conteo del número de sillas. Refiere a un proceso de particularización. Se realiza el conteo de las sillas a partir de un determinado número, no tan grande, de mesas.
Expresar de manera oral y escrita los razonamientos desarrollados.	Saber expresar sus razonamientos.
Emergentes	
Explorar las relaciones y variaciones entre las variables involucradas.	Se usa para responder las preguntas propuestas en la tarea.
Reconocer la regularidad de la secuencia de modo que se pueda obtener una expresión matemática para el término general.	Proporciona la solución para la tarea. Proceso de generalización de los casos particulares.

Conflictos potenciales:
- Dificultad en dar sentido a una letra;
- Los alumnos pueden no descubrir la relación/variación entre las magnitudes;
- Dificultades en el proceso de generalización.

Tabla 5. Configuración epistémica de la tarea: argumentos

Argumentos	
Objetos	**Significados**
Previos	
Realización exhaustiva del conteo del número de sillas.	Proporciona una solución ineficaz para la tarea.
Emergentes	
A1: Pensando en que para cada mesa, al no considerar las sillas que ocupan los lugares de los dos extremos, se requieren 4 sillas; entonces el número de sillas estará definido por el número de mesas por cuatro. Si el número de mesas es denominado x, por ejemplo, el número de sillas sería $4x$. Como no se consideraron las sillas de los extremos, debemos sumar dos a la expresión anterior. Por lo tanto, la expresión final sería $4x + 2$.	Una de las posibles justificaciones para la solución de la tarea.

Conflictos potenciales:
- No formular correctamente el argumento A1 o similar.

ANÁLISIS DE LAS CONFIGURACIONES COGNITIVAS QUE EMERGEN DE LAS INTERACCIONES DIDÁCTICAS

A lo largo de una trayectoria didáctica, en nuestro caso concreto la implementación de la actividad en un tiempo *t* determinado, es posible observar que el proceso de enseñanza-aprendizaje se desarrolla mediante la interacción en el aula de los agentes educativos profesor-alumno, alumno-alumno, alumno-medios, etc. De esta forma, para el análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje, o de una trayectoria didáctica, es necesario, primeramente, analizar las *prácticas* (del profesor y los alumnos) que se desarrollan en el aula, mediante las *interacciones* que se suscitan y de las cuales emergen dichas prácticas (análisis paralelos de los Niveles 1 y 3 propuestos por Font, Planas y Godino, 2010). A partir de estos análisis es plausible analizar y describir el uso y significado que se les confiere a los *medios y recursos* (Faceta mediacional) y las *normas y metanormas* (Assis, Godino y Frade, 2012) que regulan las interacciones, y en general, el proceso de enseñanza y aprendizaje dentro del aula. A partir de los análisis anteriores es posible determinar la *configuración de objetos matemáticos primarios y procesos* que, como parte de las facetas cognitiva y afectiva, emergen de las prácticas que desarrollan los estudiantes a lo largo de la trayectoria didáctica. La figura 4 muestra la interacción entre las facetas y los niveles de análisis que se proponen para el estudio de procesos de instrucción.

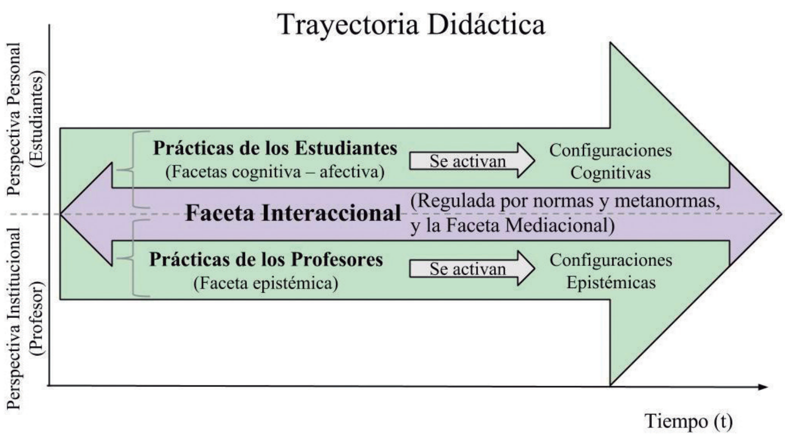


Figura 4. Interacciones entre las Facetas y Niveles de análisis de los procesos de instrucción

A continuación, se presenta el análisis del proceso de instrucción de la actividad "¿Álgebra en el banquete de boda?" considerando las facetas y los niveles, y sus relaciones, que se proponen en la figura 4. Se describe de esta manera, las prácticas de los estudiantes y las dos profesoras, por medio de la interacción que se suscita en el aula, y el vínculo de estas prácticas con el estudio de las otras facetas involucradas en el proceso. Al final de este análisis presentamos la reconstrucción de la configuración de objetos y procesos matemáticos movilizados por los alumnos de nuestro estudio.

Faceta interaccional: Prácticas ↔ Faceta mediacional

En la implementación de la actividad, los alumnos inicialmente utilizan el material concreto, las lonas y los corchos, y después cambian de artefacto pasando a utilizar una hoja de papel en la cual construyen una tabla de datos. Los significados producidos son distintos debido a los medios. En el primer caso piensan en el número de sillas que se pierden al juntar las mesas y en el segundo caso en el número de sillas que aumenta una línea, de la mesa, al juntar otra mesa (ver figura 3). Los procedimientos utilizados, en ambos casos, son distintos también. En el primer caso el procedimiento que prevalece es el de recuento y en el segundo caso el de algoritmización: los alumnos intentan construir una expresión matemática que pueda ser aplicada para conseguir los valores que fueron obtenidos a través del recuento reiterativo.

Las profesoras implementan el taller pensando que los estudiantes llegarían rápidamente a la expresión $4x + 2$. Sin embargo, lo que realmente ocurrió fue que el grupo de alumnos seleccionados, al utilizar el material concreto –y considerar el número de sillas que se pierde cada vez que se junta una mesa más–, producen significados diferentes de los inicialmente pretendidos por éstas. Esto no sería un problema si no fuera por el hecho de que las profesoras, como veremos en los extractos de las transcripciones de las interacciones que se suscitan en el aula, no reconocieron la posibilidad de encaminar el desarrollo del razonamiento y avances de los estudiantes, para ayudarlos a llegar a la expresión $6x - 2(x - 1)$. Este episodio es, por tanto, un ejemplo del "no acoplamiento" de los significados pretendidos e implementados por las profesoras y los significados declarados y logrados por los estudiantes.

Al inicio de la actividad, los alumnos, manipulando los materiales concretos, tratan de establecer un patrón a partir de la observación del número de sillas que *se pierden* cada vez que se agrega otra mesa. La idea parte del alumno Valter, al declarar que, cuando se ponen en fila 3 mesas, 2 sillas se pierden, es decir, una silla junto con cada mesa agregada (considera que se pierde sólo una silla por mesa agregada). Poco después Paulo, manipulando mesas y sillas (ver figura 3), también afirma que se perdieron 2 sillas para dos mesas:

> Paulo: Cuando hay 2 mesas, también se quitan 2 [sillas]. [57[2]]

En ese momento se genera un *conflicto semiótico de tipo interaccional*, ya que ocurre en la interacción, alumno-alumno, entre Valter y Paulo. Una de las profesoras (Prof. 1), al principio, no valida el discurso de Paulo:

> Prof. 1: ¿Sí? ¡A ver! [61]

Sin embargo Paulo usa el material concreto para confirmar su argumento, separa las dos mesas y apunta, indicando el lugar en que las sillas deberían estar (figura 3).

> Paulo: *Porque si unimos estas dos mesas, vamos perder los dos lugares que estarían aquí! [Paulo señala el espacio "donde se juntan" las mesas].* [68]

La profesora 1, pasa entonces a incentivar la exploración de este patrón, preguntando por el número de sillas que se pierde cuando se unen tres mesas y, luego, cuando se unen cuatro. El diálogo que se presenta a continuación muestra cómo Valter reestructura su pensamiento, y por tanto, el conflicto semiótico se resuelve.

> Valter: *[a partir de los elementos proporcionados por Paulo en la línea 68, figura 3]¡Ah!, acumulas dos [sillas] más y con 4 [mesas]...* [83]
> Valter y Paulo: ¡*Se van a perder 6! [sillas].* [84]
> Valter: *Aquí tenía 2 [mesas] y voy a añadir una mesa más y se pierden... 2, 4, [sillas] ...* [89]
> Prof. 1: *Con cada mesa que agregas pierdes 2 sillas.* [90]
> Marcelo: *Eso.* ¡*Más 2 [Enfatiza la expresión "más 2"]!* [91]

---

[2] El dígito al final de cada extracto refiere a la línea, por ejemplo la 57, de la transcripción del episodio didáctico.

Valter: *van a ser 2, 4, 6, 8, 10, 12... [contando las sillas que se tienen al juntar 3 mesas].* [92]
Prof. 1: *Vamos a hacer una tabla para tratar de alcanzar el término general.* [93]

Prof. 1 pide a los alumnos construir una tabla [línea 93], en un intento de llevarlos a generalizar el patrón obtenido a partir del material concreto. No considera, sin embargo, que este patrón, y en general la expresión que define la relación entre sillas y mesas, al utilizar otro tipo de artefacto como lo es la tabla de valores, podría ser otro. De hecho, como veremos, el patrón que emerge de la construcción de la tabla es otro. En otras palabras, Prof. 1 perdió la oportunidad de explorar la construcción de una expresión que podría describir el patrón descubierto por los alumnos con el uso de los materiales concretos. A saber (considerando x como el número de mesas):

$$6 \cdot x - 2 \cdot (x - 1)$$

En la expresión anterior, se considera que el número de sillas por mesa es de seis, por lo tanto se tiene $6 \cdot x$, y a continuación, se tiene en cuenta la necesidad de substraer el número de sillas que se pierden con cada "unión" (2 sillas por unión). Ahora bien, como el número de uniones –que con el uso de los materiales concretos se representa como el "segmento de línea" que se forma al unir dos mesas–, entre las mesas es siempre uno menos, $x - 1$, que el número de mesas, x, hay que substraer $2 \cdot (x - 1)$ de $6 \cdot x$.

Continuando con el desarrollo del trabajo, Prof. 1 orienta al grupo en la construcción de la tabla de valores. En este momento, los estudiantes exploran no sólo el número de sillas que se pierden con cada unión, sino también el número de sillas que *son añadidas* con cada mesa que se agrega a la fila de mesas. Paulo señala que se necesitan 12 sillas en el caso de la unión de dos mesas, ya que aparentemente él considera seis sillas por mesa. Sin embargo, Marcelo y Valter afirman que sólo se requieren 10 sillas. Paulo hace el conteo de las sillas, a petición de Prof. 1, y regresa a su respuesta, tal y como se muestra en el siguiente extracto:

Prof. 1: [...] *Cuando tengo una mesa, ¿cuántas sillas hay?* [107]
Paulo: ¡seis! [108]
Prof. 1: *Póngalas allí para mí [refiriéndose a que anote su respuesta en la tabla de valores], en frente, 6.* [109]
Prof. 1: *[Paulo anota 6 en la tabla]¡Eso es! Ahora con 2 mesas.* [110]

Paulo: *Son 12.* [111]
Prof. 1: *Vamos a contar [enfatizando el uso del material concreto].* [112]
Marcelo y Valter: ¡*Son 10!* [113]
Prof. 1: *Cuenta para mí,* ¡*Paulo!* [114]
Valter: *Hay 10, porque se perdieron 2 sillas.* [115]
Paulo: *1, 2, 3..., 10 [utilizando el material cuenta silla por silla].* [116]
Prof. 1: ¡Eso es! ¡Ahora cuenta con 3 (mesas), Paulo! Ponlas *allí para mí, por favor [nuevamente enfatizando el uso de los materiales].* [117]
Paulo: *1, 2, 3,..., 14 [cuenta silla por silla].Va a ser 14.* [118]
Valter: *Es lo que ya había hecho antes.* [119]

Es claro que existe una desvinculación, por parte de Paulo, entre los significados que se tienen del procedimiento de contar las sillas que se pierden y el procedimiento exigido por Prof.1 de encontrar un patrón para el número de sillas por *x* mesas, a través de la tabla de valores. Hay un conflicto cognitivo en Paulo que se origina por la instrucción de la profesora "Vamos a hacer una tabla para tratar de alcanzar el término general [93]", instrucción que 'rompe' con el procedimiento y avances que habían logrado los estudiantes al exigir que cuenten el número de sillas que se pierden por cada mesa agregada y explorar, en una tabla de valores, el número de sillas que se tienen por mesa agregada. Vemos cómo la profesora, Prof. 1, intenta hacer que Paulo supere dicho obstáculo con normas de tipo imperativo "Vamos a contar" [112], "Cuenta para mí, ¡Paulo!" [114], etc., que involucran el uso de los materiales concretos.

La profesora, Prof. 1, cuestiona a Paulo sobre el número de sillas necesarias al juntar cuatro mesas en fila. Valter, después de afirmar que se perderían seis sillas (dos por unión) afirma, equivocadamente, que el número total de sillas es de 16. Prof. 1 pide a los alumnos llevar a cabo el recuento y Paulo confirma que serán 18.

Cuando los alumnos son cuestionados por Prof. 1, sobre la diferencia entre los valores encontrados, Valter trata de relacionar la diferencia de cuatro unidades (número de sillas *añadidas*), que percibe entre el número de sillas encontradas para tres y cuatro mesas, con el número de sillas *perdidas* por unión.

Valter: ¡*Ahhhh! Las 4 que llevamos aquí, han vuelto.* [150]
Prof. 1: ¿Cuáles? [151]
Valter: *Aquí, hemos perdido 4 sillas [refiriéndose a las 4 sillas perdidas con las 2 uniones o articulaciones que se tienen cuando se juntan 3 mesas].* [152]

Valter: *Cuando ponemos otra [mesa], ganamos... Tomamos las 4 de vuelta.* [154]

Como vemos, nuevamente Prof. 1 no valida ni explora esta justificación, sino que pide al grupo que traten de descubrir el número de sillas necesarias para cinco mesas alineadas. Así mismo le pide también a Valter que, como en el caso de Paulo, haga una tabla en una hoja aparte (figura 5).

El hecho de que Prof. 1 piense que a partir de la tabla sea posible inferir más fácilmente el número de sillas que se *añaden* por la unión de cada mesa, hace que el conflicto establecido cuando se intenta relacionar el *número de sillas perdidas* con cada unión con el *número de sillas que se añaden*, permanezca abierto. A continuación, Marcelo, viendo las anotaciones de Valter (figura 5), comienza a inferir un nuevo patrón para la secuencia.

Marcelo: ¡*Valter!, hay un incremento de 4 cada vez,* ¡*aquí! [señalando la tabla auxiliar de valores de la figura 5].* [159]

Marcelo intenta comunicar su descubrimiento a la profesora, poco después de tratar de comunicarlo a Valter. Sin embargo, en lugar de explorar y

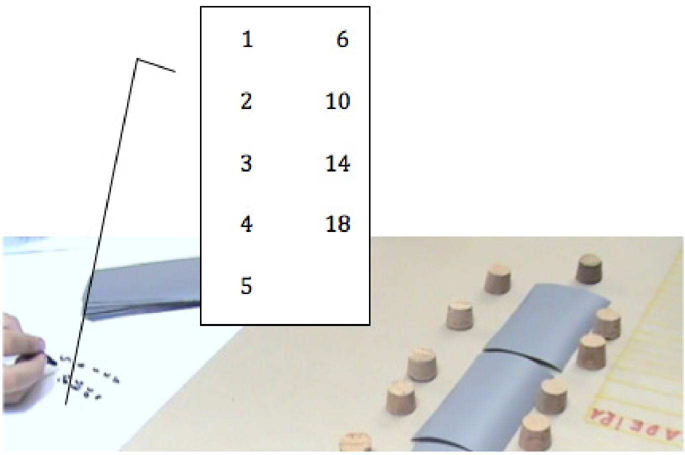


Figura 5. Registro de la actividad desarrollada por Valter

validar el discurso de Marcelo, Prof. 1 pide que examine con cinco mesas utilizando el material.

Marcelo: *Siempre aumenta 6 y disminuye más... menos 2 [dirigiéndose a Prof. 1].* [160]
Prof. 1: ¡*Vamos a hacer más para ver si es lo mismo! Pon una mesa más para nosotros. Una mesa más...* ¡*Ahora con 5!* [161]

Marcelo insiste en su argumento y Prof. 1 finalmente explora su razonamiento:

Marcelo: *Profesora, siempre aumenta 6 y quitas 2.* [163]
Prof. 1: ¿*Siempre aumenta 6?* [164]
Marcelo: *No, y quitas 2. De estos 6, quitas 2.* [165]
Prof. 1: *Entonces, vamos intentar, por ejemplo, con 18...* [166]

Aun cuando Paulo afirma que sólo tiene que añadir 4 a 18, Prof. 1 no valida la respuesta de Paulo y anima a Marcelo a explicar cómo está pensando.

Paulo: *18,* ¡*aumentas 4!* [167]
Prof. 1: *No, espérate [dirigiéndose a Paulo]! Marcelo, está bien. Habla de nuevo. 18...* [168]
Marcelo: *18... Va a dar 34* [equivocado]. *A continuación quitas 2 y va a dar 32* [equivocado]. [169]
Prof. 1: *Habla de nuevo Marcelo. [Marcelo hace una carita de "¡como así no me entienden!"]* ¿Cómo? [170]
Marcelo: *18* [más seis] *va a dar 24. Quitas 2,* ¡*va a dar 22!* ¡*4 más que el anterior!* [171]

Prof. 1 pide a los alumnos comprobar si el resultado es en realidad 22 y, a continuación, valida el razonamiento de Marcelo.

Prof. 1: *¡Genial! [Dirigiéndose a Marcelo]* [175].

No obstante, la profesora no aprovecha el momento para encaminar a los estudiantes al desarrollo de una expresión que pueda describir el patrón encontrado.

FACETA INTERACCIONAL: PRÁCTICAS ↔ FACETA COGNITIVA

Teniendo en cuenta la tarea propuesta, los alumnos demostraron tener el conocimiento necesario, en la medida en que han logrado mediante la interacción con sus compañeros y las profesoras, progresar en la resolución de la tarea llegando a la generalización, lo que difícilmente habrían hecho solos. Como parte fundamental de los análisis involucrados en esta sección, se encuentra la identificación de las *configuraciones cognitivas de objetos matemáticos primarios* (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) movilizados por los alumnos. Esta configuración cognitiva dará cuenta de los significados finalmente logrados por los estudiantes (sección 5.2.2). Para conseguir esto primeramente nos centramos en el estudio del acoplamiento que se va dando, a lo largo de la trayectoria didáctica, entre los significados pretendidos e implementados por las profesoras (ver sección 4) y los significados que van logrando gradualmente los estudiantes (configuraciones cognitivas "parciales").

Al comparar los conocimientos pretendidos que se movilizaron con la configuración epistémica implementada (sección 4), fue constatado que el grupo alcanzó los objetivos propuestos, desarrollando la tarea hasta al final. Todos los integrantes del grupo evidenciaron comprensión de la situación propuesta y permanecieron motivados durante toda la actividad. Hay que destacar la manera en que las profesoras interactuaron con los estudiantes, buscando, siempre que fue posible, incentivar su participación intentando mostrarles que eran capaces de desarrollar la actividad, ya que los estudiantes presentaban dificultades en matemáticas y esto se reflejaba en su autoestima. La interacción asertiva y afectiva por parte de las profesoras, a lo largo de todo el trabajo tanto de las actividades anteriores como en esta, hizo que el grupo adquiriera, gradualmente, cada vez más confianza en sus habilidades para enfrentar los problemas y perseverancia ante las dificultades.

Acoplamiento entre la faceta epistémica –configuración epistémica implementada– y la faceta cognitiva –significados que van logrando los estudiantes–

El episodio que a continuación se presenta, ejemplifica uno de los momentos en que las profesoras sintieron la necesidad de apremiar más la interacción con los estudiantes con el objetivo de profundizar en los significados que éstos iban logrando. En este evento, referente al apartado *c* de la tarea, los alumnos han registrado "42 - 2 ÷ 4", que fue el significado que lograron, y la profesora intenta hacerlos comprender que no está listo ya que necesitan todavía indicar al lector qué operación hacer primero. A través de la interacción, la maestra trata de "imponer" los significados institucionales haciendo "surgir" la necesidad de los paréntesis.

Vanderlei registra la expresión $42 - 2 \div 4$, dictada por Marcelo y Paulo (figura 6), y la Prof. 2 conduce el grupo a la necesidad de utilizar paréntesis (figura 7) argumentando que, si alguien intentase resolver la expresión, debería ser capaz de alcanzar el mismo resultado encontrado por el grupo.

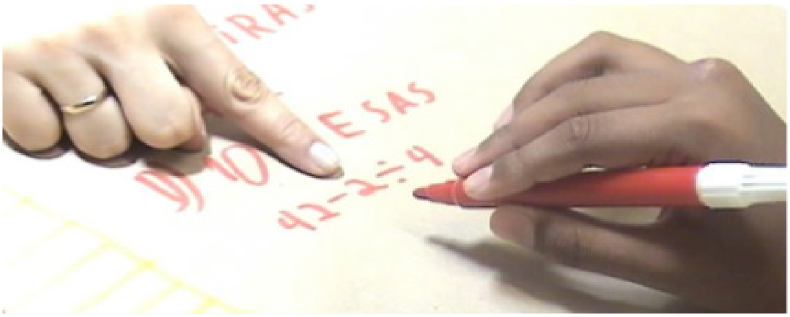


Figura 6. Registro de la sub-tarea *c* (parte 1)

> Prof. 2: *Vamos a volver aquí, la expresión, rápidamente. Si la profesora [refiriéndose a Prof. 1] pasa aquí y mira, ¿ella va a llegar al mismo resultado que ustedes?* [329]
> Paulo: *Va a llegar.* [330]
> Prof. 2: ¿Va a llegar? [331]
> Vanderlei: ¡*Espera!* [332]
> Prof. 2: *En una expresión, ¿qué debo hacer primero?* [333]
> Marcelo: *La división.* [334]
> Prof. 2: *Entonces, lo primero que ella haría [refiriéndose a Prof. 1 y a la expresión de la figura 6] aquí seria la división. Entonces, ¿qué tengo que poner aquí?* [335]
> Valter: (inaudible) [337]

Prof. 2: *Ustedes están diciendo que [en la expresión de la figura 6] esta cuenta se hace primero, ¿verdad? [señalando a la división en la expresión]* [338]
Vanderlei: *Es el número de sillas, menos el número de sillas en la punta dividido por...* [339]
Prof. 2: *No, gente...* cálmense. [Sonríe] Retrocedamos. La expresión es casi cierta. Ustedes me dijeron que tengo que resolver aquí [señalando la sustracción en la expresión] *primero, ¿no? ¿Qué elementos debo utilizar en la expresión para resolver aquí primero?* [340]
Marcelo: *Los paréntesis.* [341]
Prof. 2: Ahh, ¿así que esto tiene que ir [la operación 42−2] entre que? [342]
Todos: *Paréntesis.* [343]
Prof. 2: ¡Muy bien! [344]

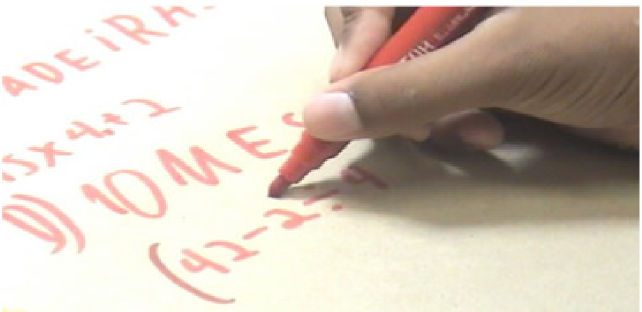


Figura 7. Registro de la sub-tarea ***c*** (parte II)

Configuración cognitiva final

A continuación, se destacan los significados que lograron los estudiantes al final de la trayectoria didáctica, a partir del soporte que recibieron de las profesoras. Para ello describimos los objetos matemáticos primarios que se movilizaron en las diversas prácticas, operativas y discursivas, que desarrollaron a lo largo de la trayectoria didáctica. Así, en las prácticas matemáticas llevadas a cabo por los estudiantes, podemos destacar los siguientes tipos de objetos matemáticos primarios:

1. Los *elementos lingüísticos* incluyen interpretaciones de representaciones icónicas: la disposición de las mesas y sillas. Los elementos lingüísticos también incluyen gestos, expresiones verbales, representaciones simbólicas (x para describir la variable independiente, símbolos para la suma, sustracción, multiplicación y división, y símbolos indicativos de expresiones y ecuaciones tales como paréntesis y el signo de igualdad) y representaciones gráfico simbólicas (figuras 8):

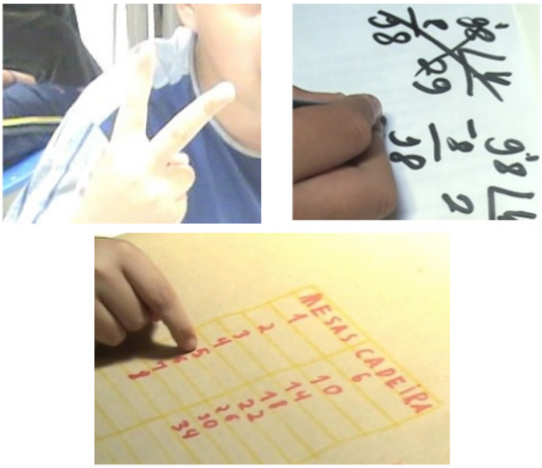


Figura 8. Ejemplos de elementos lingüísticos gestuales y gráfico-simbólicos

2. Entre los *conceptos/definiciones* podemos encontrar las nociones de secuencia matemática, patrones y relación entre magnitudes.
3. Las *proposiciones* evidenciadas, que a su vez son soluciones para los apartados de la tarea, fueron las siguientes: **P1** (ítem a), "El número de sillas es 4 veces el número de mesas más 2"; **P2** (ítem b), "62"; **P3** (ítem c), "10"; **P4** (ítem d), "No"; **P5** (ítem e), "Para descubrir el término siguiente de la sucesión se debe sumar 6 (al término anterior) y sustraer 2"; y **P6** (ítem f), "(x + 4)+2". También fueron identificadas las siguientes *propiedades*: **P7** "Las operaciones en una expresión tienen un cierto orden para ser resueltas (jerarquía de las operaciones básicas)"; **P8** "Utiliza paréntesis si es necesario resolver la expresión en un orden distinto del establecido por la propiedad anterior".

4. Como *procedimientos* podemos destacar el reconocimiento de regularidades, el conteo (de las sillas cuando el número de mesas era pequeño), la generalización (la cual también es un proceso) y la construcción de una expresión matemática para representar el enésimo término y/o para expresar la regularidad encontrada.
5. Los *argumentos* evidenciados, fueron los siguientes: **(A1)** Comprobación empírica a partir del recuento y la construcción de una tabla; Para el ítem a de la tarea, es utilizado como *argumento* la comprobación empírica a partir del recuento y la construcción de una tabla; **(A2)** Para obtener el número de sillas para 15 mesas (ítem b), multiplicamos 15 por 4 y añadimos 2; **(A3)** Para obtener el número de mesas debemos hacer lo contrario [se refiere a P1], lo contrario de la suma es la sustracción y lo contrario de la multiplicación es la división, entonces tenemos que calcular el número de sillas menos 2 dividido por 4 (ítem c). La solución se obtiene mediante la simplificación de la expresión $(42 - 2) \div 4$; **(A4)** (ítem d) Resolución de la ecuación $4x + 2 = 100$. Puesto que $x = 24.5$, entonces no es posible; **(A5)** (ítem e) Cada nueva mesa que añadimos "viene" con 6 sillas. Sólo necesitamos quitar 2 que perdemos en las uniones; **(A6)** (ítem f) Utilizando "*x*" para representar el número de mesas podemos escribir "$x \cdot 4$". Como también es necesario tener en cuenta las sillas de las cabeceras, añadimos "+2". El número de sillas, entonces, está dado por $x \cdot 4 + 2$.

Durante las actividades, varios *procesos* matemáticos fueron "puestos en juego", como los definidos por Font, Planas y Godino (2010). En general, el análisis del episodio ha evidenciado una serie de procesos entre los cuales podemos destacar el de *problematización*, cuyo objetivo fue que a partir de procesos de *particularización* se lograra uno de *generalización*. Las profesoras y estudiantes movilizaron procesos de valoración, suportados por normas y metanormas (Assis, Godino y Frade, 2012) y procesos de *significación*.

Faceta interaccional: Normas y metanormas

Debemos destacar la importancia del papel de las profesoras, en el sentido de gestionar las normas, para garantizar la optimización del aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, en esta tarea, los alumnos, principalmente Paulo, insisten en hacer el procedimiento del recuento a pesar de la persistencia de la profesora para que intenten generalizar. Esto ocurre porque los alumnos están movilizados por la norma metaepistémica *el procedimiento de conteo es un proceso que tiene más éxito*. Fue necesario que las profesoras se esforzaran para convencer a los alumnos de la necesidad e importancia del procedimiento y proceso de generalización, proceso sin el cual los estudiantes se quedarían satisfechos con los resultados obtenidos, sin dar solución a todos los ítems de la actividad propuesta.

CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo hemos presentado el análisis de un episodio didáctico el cual consistió en la implementación de una actividad exploratorio-investigativa sobre patrones. Para ello, y basándonos en las ideas fundamentales del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), hemos resaltado la *faceta interaccional*, como eje central para el análisis de un proceso de instrucción, pues es a partir de dicha faceta que se puede explorar, analizar y describir la gestión de los aprendizajes en el aula mediante la descripción de las prácticas didáctico-matemáticas que llevan a cabo el profesor y los estudiantes en torno a la resolución de una tarea.

En la primera parte de nuestro estudio hemos caracterizado la configuración epistémica que emerge de la actividad de planeación por parte de las profesoras, lo cual en el EOS se conoce como significados pretendidos. Estos significados pretendidos, forman una parte de los significados de referencia que tendrá el profesor al momento de la implementación, que da paso a la exploración de los significados efectivamente implementados, y que serán relevantes en el estudio del acoplamiento de los significados implementados respecto de los significados pretendidos.

En un primer momento podríamos considerar que, en caso de haber un acoplamiento 'perfecto' entre las configuraciones epistémicas y las configuraciones cognitivas, estaríamos delante de un proceso de enseñanza 'ideal'. Lo que ocurre, no obstante, es que el aprendizaje es situado y, siendo así, no puede ser del todo determinado el momento en que se da dicho aprendizaje. En general, los significados pretendidos no pueden ser implementados –o replicados de otra práctica– siguiendo de forma 'rígida' un planeamiento previo. En otras palabras, el profesor necesita establecer inicialmente las posibles soluciones de las situaciones-problemas que propone a sus alumnos, identificando posibles objetos matemáticos, sus significados y procesos que pudieran emerger durante la implementación de la actividad (i.e., configuraciones epistémicas). No obstante, es fundamental que interprete dichas configuraciones epistémicas, esencialmente como *referencia* para que no se corra el riesgo de –frente a un posible *no acoplamiento* entre los significados pretendidos inicialmente y los significados que van logrando los estudiantes– dejar de reconocer los significados producidos por los estudiantes, 'impidiendo' o no favoreciendo la emergencia de otros significados.

Este hecho nos lleva a destacar la complejidad del trabajo del profesor, quien debe tener un amplio conocimiento de las configuraciones epistémicas de referencia, de las plausibles configuraciones cognitivas de los estudiantes en relación a los contenidos matemáticos pretendidos, ser capaz de identificar en los momentos críticos los conflictos semióticos y tomar decisiones sobre el tipo de actuación que debe adoptar momento a momento a lo largo del proceso de estudio.

RECONOCIMIENTO

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores: R02/15 y R04/15 (Universidad de Los Lagos), EDU2012-32644 (Universidad de Barcelona) y EDU2012-31869 (Universidad de Granada).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Assis, A., Godino, J. D. y Frade, C. (2012). As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 171-198.

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(3), 207-225.

Coll, C. y Sanchez, E. (2008). Presentación. El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación*, 346, 15-32.

Contreras, A., García, M., y Font, V. (2012) Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Bolema*, 26(42B), 667-690.

Fernándes, F. L. P. (2010). Letramento algébrico em um contexto de aulas exploratório-investigativas. In: *XIV EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática*, Campo Grande. Educação Matemática: Diversidades e Particularidades no Cenário Nacional.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Franke, M. L., Kazemi, E. y Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). Charlotte, NC: NCTM y IAP.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME).* Recife, Brasil.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in Mathematics Education. *The International Journal on Mathematics Education. ZDM,* 39(1-2), 127-135.

Hmelo-Silver, C. Y., Duncan, R. G. y Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: a response to Kirschner, Sweller and Clark. *Educational Psychologist*, 42(2), 99-107.

Planas, N. y Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 12(2), 179-213.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de Matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(3), 361-394.

Ponte, J. P., Fonseca, H. y Brunheira, L. (1999). As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat99 (APM),* 91-101.

Robles, M. G., Del Castillo, A. G. y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción de la derivada. *Educación Matemática*, 24(1), 5-41.

DATOS DE LOS AUTORES

Luis R. Pino-Fan
Departamento de Ciencias Exactas
Universidad de Los Lagos, Chile
luis.pino@ulagos.cl

Adriana Assis
Direção de Educação a Distância
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Brasil
adriana.assis@ufvjm.edu.br

Juan D. Godino
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada, España
jgodino@ugr.es