Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Búa Ares, Jose Benito; Fernández Blanco, Teresa; Salinas Portugal, Mª Jesús
Una modelización matemática como mediode detección de obstáculos y dificultades de los alumnos sobre el concepto de función:alargamiento de un muelle sometido a un peso
Educación Matemática, vol. 27, núm. 1, abril, 2015, pp. 91-122
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Una modelización matemática como medio de detección de obstáculos y dificultades de los alumnos sobre el concepto de función: alargamiento de un muelle sometido a un peso

A mathematical modelling as a means to detection student's obstacles and difficulties related to the function concept: extension of a spring under a weight

Jose Benito Búa Ares, Teresa Fernández Blanco y Mª Jesús Salinas Portugal

Resumen: *En este trabajo se presenta una investigación sobre una actividad de modelización matemática en la Enseñanza Secundaria. Los alumnos generan experimentalmente una tabla de datos sobre el comportamiento de un muelle sometido a un peso. Partiendo de esos datos y utilizando GeoGebra, llegan a una expresión analítica que relaciona las dos variables presentes (masa y longitud del muelle). Una vez obtenido el modelo, los estudiantes responden a una serie de cuestiones relacionadas con el modelo matemático obtenido y con la situación extra-matemática origen de la modelización.*

Los objetivos principales de la investigación son, por un lado, mostrar hasta qué punto los alumnos integran los conocimientos adquiridos sobre funciones en el proceso de modelización. Y, por otro, mostrar hasta qué punto los alumnos interpretan el resultado matemático en la situación extra-matemática original.

Los resultados de investigación ilustran que es posible que los alumnos obtengan un modelo matemático sin integrar los conocimientos matemáticos implícitos y sin interpretar el resultado matemático en la situación extra-matemática, origen de la modelización.

Palabras clave: Modelización, Funciones, GeoGebra, Enseñanza Secundaria, Bachillerato.

Abstract: In this article we present a research about a mathematical modelling for the secondary school. Students start with a data table, it obtained experimentally by themselves, on the behavior of a spring subjected to a weight. From the data table and using the GeoGebra

Fecha de recepción: 30 de julio de 2014; fecha de aceptación: 28 de marzo de 2015.

program, students obtain an analytical expression that relates the two variables (mass and length of the spring). After they obtained the model, students have to answer questions related to the mathematical model and the original extramathematical situation.

The main objectives of the research are to show how students use their unserstanding about functions during the process to obtain the model and if students interpret the mathematical result in the context of the original extramathematical situation.

The investigation results show it is possible obtain a mathematical model without the use of implicit mathematical knowledge and without the interpretation of the mathematical result in the original extramathematical situation.

Keywords: Modelling, functions, GeoGebra, lower secondary education, upper secondary education.

INTRODUCCIÓN

La modelización utilizada en la enseñanza de las matemáticas constituye un campo de investigación desde hace más de 30 años y ha pasado a ser parte fundamental en la investigación actual en Didáctica de la Matemática. Así, los CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) incluyen el grupo de trabajo "Applications and modelling", entre los grupos de investigación. El ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) posee una sección afiliada, dedicada específicamente a la modelización (International Community of Teachers of Modelling and Applications, ICTMA); la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) y sus Principles and Standards for School Mathematics (2000) concede importancia a la modelización integrada, como parte de la resolución de problemas y el informe PISA (OCDE, 2012, p. 10) considera la construcción de modelos matemáticos como una piedra angular en la definición de competencia matemática.

Respecto a la enseñanza de las matemáticas en España, la mención sobre la inclusión de actividades de modelización no aparece de forma expresa, ni en el currículo de Enseñanza Secundaria obligatoria ni en el Bachillerato (Real Decreto1631/2006, Orden ESD/1729/2008). No obstante, sí aparecen menciones a la modelización en relación con las competencias matemáticas que los alumnos deben alcanzar, situando la modelización como una forma de "*abordar problemas de la vida real (...)*" de forma que el alumno combine "*diferentes herramientas y estrategias (...) para enfrentarse a situaciones nuevas*" (Orden ESD/1729/2008, p. 27606). Por tanto, la modelización se plantea, como un recurso o herramienta que permite enfrentarse a una situación nueva o problemática.

El objetivo central de la investigación es indagar si los alumnos integran la comprensión y el uso adecuado de conceptos y nociones asociados a las funciones, así como a sus operaciones en el proceso de obtención del modelo que realizan en la actividad planteada.

En la primera sección de este documento, se describe los fundamentos teóricos en los que se apoya la investigación. A continuación, se detalla la actividad y la metodología que se ha seguido para llevarla a cabo. Las siguientes secciones recogen el análisis de resultados y las conclusiones más relevantes. Finalmente, se realiza una breve reflexión sobre la puesta en práctica de este tipo de actividades de modelización.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En el contexto de la actividad, identificable con la construcción de un modelo matemático, realizaremos en primer lugar, una breve descripción del proceso asociado a la construcción de modelos matemáticos (ciclo de modelización). También se hará referencia a las praxeologías de Chevallard (1999).

El ciclo de modelización

El número de autores que se han ocupado de la modelización matemática en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es amplio (por ejemplo, Blum y Niss, 1991; Blum y Leiss, 2007; Blum y Borromeo, 2009; Kaiser, Sriraman y Blomhøj, 2007; Schmidt, 2010). Existen diferencias sobre lo que la modelización puede y debe aportar en el ámbito de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, lo que influye en la forma de definir qué es una modelización, qué procesos tienen lugar y qué fines debe alcanzar. Por ejemplo, Schmidt (2010, p. 2067) apunta que la definición depende de los objetivos que se le atribuyen a la modelización:

> Modelización matemática en general se refiere al uso de las matemáticas para resolver problemas reales y abiertos. Al mismo tiempo, la definición exacta varía en función de los objetivos, qué modelo en el proceso de modelado se está utilizando y la naturaleza del contexto asignado a la tarea de modelización.

Teniendo en cuenta esas diferencias, Kaiser, Sriraman y Blomhøj (2007, pp. 2037-2038) distinguen 5 perspectivas en relación con la modelización: modelización realista, contextual, educacional, socio-critica y epistemológica.

En general, se admite que la modelización es un proceso que puede dividirse en varios pasos. Dadas las diferencias al tratar el problema de qué es una modelización y cuáles son sus fines, hay una cierta variedad de esquemas descriptivos de los pasos, en que se puede dividir el proceso de modelización. Los pasos se ordenan de forma que, están fuertemente ligados entre sí, aunque son sucesivos, las relaciones entre los mismos pueden llevar a retomar pasos anteriores. Ese comportamiento cíclico lleva a denominar el proceso de modelización como "Ciclo de modelización".

Tomando como referencia el esquema descriptivo del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007, p. 225 (Figura 1); se observa, en dicho esquema, la modelización situada en dos ámbitos diferentes: las *matemáticas* y el *resto del mundo*. Se parte de una situación o problema real −*Situación real y problema*− susceptible de ser planteada como una situación a modelizar −1 *Construcción*−. La situación a modelizar requiere de una simplificación y estructuración −2 *Simplificación/Estructuración*−. La transformación de ese modelo o problema *real* en un problema que toma la forma de un modelo matemático, se realiza mediante un proceso de matematización −3 *Matematización* pasando en ese punto a trabajar en el seno de la matemática. El modelo matemático obtenido mediante el paso 4 (*Trabajo matemático*) permite disponer de una respuesta al problema matemático, que debe ser interpretado −5 *Interpretación*− en el contexto original −*Resto del Mundo*− para poder disponer de un resultado *real*. Por último, se inserta y contrasta el modelo obtenido con la situación y problema original, permitiendo dar respuesta a la cuestión o problema original −6 *Validación* y 7 *Exposición*−. Tanto la validación del modelo como su presentación, puede dar lugar a nuevas preguntas acerca del modelo obtenido, con lo que el proceso puede volver a ponerse en marcha. Los resultados, en forma de modelo, son *matemáticos* y *reales*, ambos se hallan fuertemente conectados entre sí por los procesos descritos anteriormente.

En una modelización podemos distinguir entre el proceso que se sigue, para responder a la pregunta inicial (modelización) y el producto de ese proceso, que tomará la forma de modelo matemático. Así, un modelo matemático podríamos definirlo como:

> Un modelo consiste en ciertos objetos matemáticos, correspondientes a "elementos básicos" de la situación original o del modelo real, y de ciertas relaciones entre

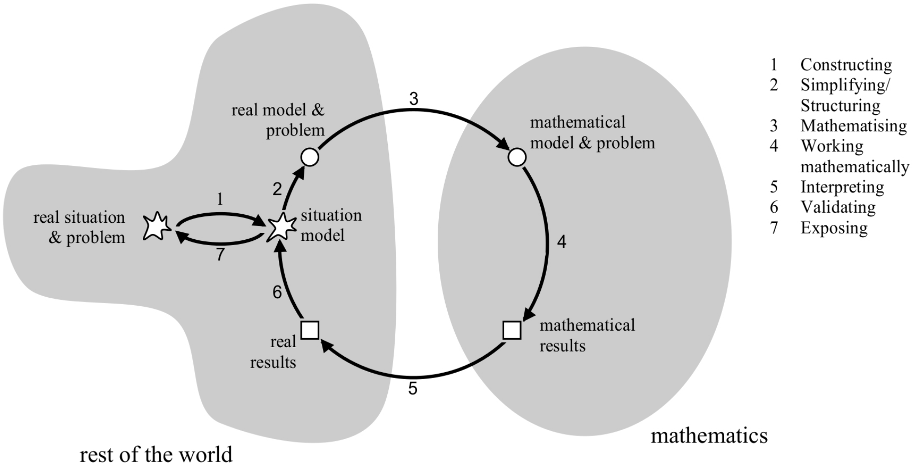

Figura 1. Esquema de Blum y Leiss (2007)

> estos objetos, que corresponden con relaciones entre los "elementos básicos". Para ser un poco más precisos, un modelo matemático puede ser visto como un triple (S, M, R), consistente en una situación problemática real S, una colección de entidades matemáticas M y una relación R entre los objetos y relaciones de S y los objetos y las relaciones de M. (Blum y Niss, 1991, p. 39).

Dicho de otro modo, la modelización matemática centrada en situaciones o fenómenos provenientes de la realidad es:

> (...) el proceso que traslada el mundo real a las matemáticas en ambas direcciones" (Blum y Borromeo, 2009, p. 45).

La modelización es un proceso complejo que se mueve entre lo extramatemático −identificado con el mundo real (S)− y lo intramatemático −identificado como el tratamiento desde las matemáticas de esa realidad (M)−. Esa complejidad conlleva que, ante una misma modelización, los alumnos establezcan relaciones diferentes entre los distintos elementos de S y M,y entre los puntos esenciales del proceso de modelización. Como consecuencia, esas relaciones que están vinculadas a un estilo de pensamiento matemático (Borromeo, 2006; Blum y Borromeo, 2009) conforman rutas diferentes de modelización, que pueden ser estudiadas de forma individual. Estas rutas individuales deben ser potenciadas por el profesor pero, al mismo tiempo, debe procurar controlarlas para que el proceso de modelización cumpla con su cometido fundamental de conseguir que el alumno aprenda. De este modo, el equilibrio entre la necesaria autonomía del alumno y la necesaria intervención del profesor provoca en el profesor dilemas y tensiones, motivadas porque la enseñanza se convierte en más abierta y menos predecible (Blum y Borromeo, 2009; Doerr, 2006).

Las praxeologías de Chevallard

Las construcciones praxeológicas fueron introducidas por Chevallard (1999), hacen referencia al conocimiento y enseñanza de las matemáticas en términos de praxeologías. Siguiendo a Barquero, Bosch y Gascón (2011) las praxeologías están compuestas por dos elementos: la praxis, que se identifica con *saber-hacer,* y el logos, que se identifica con *saber*. La praxis constituye un bloque práctico y técnico englobando el tipo o tipos de problemas, las cuestiones que pretenden estudiarse y las técnicas que se usan. El logos constituye un bloque tecnológico y teórico e incluye la descripción, explicación y la justificación de las técnicas que se usan, que recibe el nombre de *tecnología*, y la fundamentación de la tecnología, que recibe el nombre de *teoría*. Así, alrededor de una tarea problemática, T, se encuentra al menos una técnica, τ, una tecnología de τ, ϕ, y una teoría de ϕ, θ. El total, indicado por $[T/\tau/\phi/\theta]$, constituye una *praxeología puntual*, usando "puntual" como indicativo de que se trata de una praxeología relativa a un tipo de tareas, T. Desde este punto de vista, el saber hacer y el hacer forman parte de un bloque praxeológico, por lo que no tiene sentido la diferenciación entre ambas.

Para algunos investigadores, como por ejemplo Gascón (2011), las competencias PISA inciden en la praxis o capacidad de *saber hacer*:

> De hecho, la noción competencia pone el acento en la capacidad de actuación o saber hacer y en las prácticas orientadas hacia una finalidad. (Gascón, 2011, p. 25).

A continuación, se proporcionan algunos datos considerados relevantes para determinar si la obtención de un modelo (asociado al saber hacer) no involucra, necesariamente, el saber implícito en ese saber hacer. Dicho de otro modo, se intenta ilustrar que los alumnos pueden obtener un modelo matemático, sin que los conocimientos asociados a las funciones se hallen realmente presentes, tanto en el proceso de construcción del modelo como en su interpretación en el contexto real que dio lugar al modelo.

METODOLOGÍA Y DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN "MUELLE"

La actividad se presenta en forma de pregunta inicial: *¿De qué forma se relacionan entre sí el alargamiento de un muelle con el peso a que éste es sometido?* Dicha actividad fue propuesta a estudiantes de la asignatura Matemáticas I de 1º de Bachillerato Científico Tecnológico (16-17 años de edad) como una práctica voluntaria durante dos años consecutivos (Cursos 2010-2011 y 2011-2012) y en el segundo trimestre del curso académico (una vez que ya habían estudiado el bloque de Análisis Matemático). El total de la muestra estaba formada por 22 alumnos, distribuidos en seis grupos (A-F). La actividad de los alumnos del grupo A y D fue grabada en audio y vídeo.

La pregunta inicial lleva a la generación de un modelo matemático que permite establecer, en forma de expresión analítica, la relación entre dos variables: peso (masa en realidad) y longitud. La expresión analítica de dicha relación es una función lineal o afín ($f(x)=ax$; $f(x)=ax+b$), dependiendo de si se mide la longitud del muelle sin ser sometido a peso o si se mide dicha longitud.

En cuanto a los conocimientos previos de los alumnos, la función lineal y afín es conocida por ellos desde 3º de ESO (14-15 años de edad; Real Decreto, 1631/2006, pp. 751-756). Además, deben distinguir ya en 1º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-13 años de edad), si la relación existente entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa, observando una tabla de valores. Los alumnos de esta etapa educativa (ESO) deben ir familiarizándose paulatinamente con el concepto o noción de función: en primer lugar con la obtención de la expresión algebraica que describe la relación entre variables provenientes o generadoras de una tabla de datos, posteriormente, con la representación gráfica de los puntos del plano a los que da lugar la tabla de valores y la representación gráfica de la expresión algebraica. Durante el primer curso de Bachillerato, los alumnos profundizan en la línea introducida ya en la ESO y estudian la expresión analítica de una función, su representación gráfica y sus propiedades (dominio, recorrido, continuidad, monotonía, extremos, asíntotas, etc.). Por lo tanto, los alumnos de la muestra parten de un conocimiento relativo a las funciones, bastante amplio para poder enfrentarse a la tarea propuesta.

La actividad se divide en tres fases claramente diferenciadas: (1) obtención de la tabla de datos, (2) Volcado de datos y función de ajuste y (3) cuestionario alrededor del modelo. Dichas fases se detallan a continuación.

- *1ª Fase: Obtención de la tabla de datos.* Los alumnos acuden al laboratorio del Instituto donde se les explica que deben colgar peso a un muelle y tomar los datos de alargamiento y del peso al que se ha sometido el muelle. Cuántos datos tomar y cómo hacerlo era parte de su responsabilidad, ejercida en forma de toma de decisiones de cada grupo de forma autónoma. Se le suministró un muelle a cada grupo, reglas, flexómetros, pesas y un soporte para las pesas. Los muelles suministrados eran diferentes en algunos grupos, lo que permitió que los alumnos obtuviesen el mismo tipo de función ($f(x)=ax+b$) pero con valores de a y b diferentes en cada caso. De esa forma, la función modelizadora del problema *real* tomaría claramente la forma de una función dependiente de parámetros (a y b).
- *2ª Fase: Volcado de datos y obtención de la función de ajuste*. Inmediatamente después de que los alumnos diesen por terminada la primera fase, se trasladaron al aula de Informática del Instituto para representar los datos obtenidos en los ejes cartesianos y obtener una función de ajuste para los puntos del plano observables en pantalla. Los alumnos utilizaron el programa de Geometría Dinámica GeoGebra, que permite la modificación de la gráfica de una función dependiente de parámetros mediante el uso de deslizadores. Se introducen los datos de la tabla de valores en forma de puntos del plano, que inmediatamente se ajustan los puntos mediante una función que depende de uno o varios parámetros.
- *3ª Fase: Cuestionario alrededor del modelo.* En esta fase se les entregó un cuestionario a los alumnos para contestar de forma individual y por escrito, indicándoles que dicho cuestionario no formaba parte del proceso de evaluación de la asignatura. Este cuestionario (Tabla 1) intenta incidir en algunos de los conocimientos, conceptos y nociones sobre funciones que se hayan involucrados en el modelo obtenido. La elección de las preguntas se apoya en la propuesta de Ursini y Trigueros (2006) y Ursini (2011) para trabajar exitosamente con problemas que involucran variables en relación funcional. Según estas autoras, las variables en relación funcional involucran los siguientes aspectos, correspondientes con distintos niveles de abstracción: (F1) Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas,

> problemas verbales, expresiones analíticas); (F2) Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente; (F3) Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente; (F4) Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas); (F5) Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra; (F6) Simbolizar una relación funcional, basada en el análisis de los datos de un problema. Los aspectos F2 y F3 se relacionan con la determinación del valor de una incógnita en una expresión pero que no son equivalentes, ya que: para determinar los valores de una variable en función de los valores de la otra, es necesario primero sustituir un valor en una de las variables y convertir de este modo una expresión que involucra una relación funcional en una ecuación. (Ursini y Trigueros, 2006, p. 7).

En este trabajo, todos los aspectos son tratados en una o varias fases. Por ejemplo, el aspecto F1 es tratado en las tres fases en cada una de las representaciones que los alumnos generan y utilizan (tabular, gráfica y como expresión analítica). Los aspectos F2 y F3 son tratados expresamente en las preguntas 4, 5 y 8 del cuestionario. El aspecto F5 debe ser utilizado en la pregunta 7, pues existe una diferencia de dominio y recorrido de la función matemática y de la función aplicada en el contexto concreto de un muelle. El aspecto F6 es desarrollado, en primera instancia, en la primera fase mediante la obtención de una primera representación funcional (tabla de datos) y volverá a aparecer en las sucesivas representaciones, en la interpretación y solución a las preguntas planteadas en esta última fase.

Las preguntas 2, 3, 4, 5 y 8 se centran en las variables, tanto reales como matemáticas, y en el uso de esas variables para calcular valores concretos no presentes en la tabla de datos. En concreto, las preguntas 2 y 3 inciden en la diferenciación entre variable dependiente e independiente y parámetro. Como Drijvers afirma (2003, p. 77), el concepto de parámetro ocupa una posición jerárquica de mayor nivel comparada con el concepto de variable. El parámetro posee, en ocasiones, como es el caso concreto de la modelización que proponemos, la condición de constante variable, condición más compleja que la de variable y que, por tanto, conlleva más dificultades en su uso y comprensión.

Si bien los enunciados de las preguntas 1, 6, 7 y 9 se relacionan expresamente con una interpretación del modelo o de un resultado concreto obtenido, los objetivos se vinculan a los elementos de la tripleta (S, M, R) y a los pasos del ciclo de modelización. Dicho de otro modo, el alumno debe considerar, en mayor o menor medida, la situación real, el modelo real y las relaciones entre ambas a la hora de contestar.

Tabla 1. Preguntas del cuestionario

Cuestionario Muelle sometido a un peso
1. ¿Qué tipo de función has obtenido? Interpreta el resultado. **2.** ¿Cuál es la variable dependiente y la variable independiente en la función? **3.** En la función que has deducido, ¿aparece algún parámetro? Si es así, ¿qué significado tiene en el experimento que estás realizando? **4.** ¿Cuánto se alarga el muelle con 370 g de peso? **5.** ¿Qué peso se corresponde con 21cm de longitud del muelle? **6.** ¿Qué longitud de muelle obtienes por la función si no colocas peso sobre el muelle? Interpreta tu resultado. **7.** Según la función que has obtenido, ¿es posible alargar indefinidamente el muelle? Interpreta ese resultado pero teniendo en cuenta el experimento concreto que has realizado. **8.** Intenta deducir cómo conocer el peso colocado en el muelle, si conoces la longitud del muelle. **9.** Las funciones que se obtienen son distintas. ¿Cuál crees que es la razón?

El tiempo dedicado a cada fase, fue decisión de los propios alumnos. Al acabar cada fase entregaba el resultado obtenido al profesor y esperaban a que sus compañeros terminaran. Como los alumnos decidieron contestar el cuestionario inmediatamente después de la fase anterior, las diferentes fases se realizaron en el transcurso de una tarde.

Para completar el estudio, se realizaron entrevistas a siete alumnos, que nos permitieron profundizar sobre las nociones planteadas y mostrar sus opiniones sobre la actividad propuesta.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el análisis de resultados se van a agrupar la 1ª y 2ª fases, que identificamos con el *saber hacer*. Estas dos fases tienen como objetivo la obtención de una función modelizadora del fenómeno estudiado, que requieren de destrezas o conocimientos técnicos: medir con una regla o un flexómetro; volcar datos en un programa específico; identificar la expresión analítica de una función como la adecuada para ajustar los puntos visibles en pantalla y modificar la gráfica visible, mediante deslizadores en GeoGebra. La 3ª fase la identificamos con el *saber* porque se centra en la reflexión del alumno sobre la modelización obtenida y sobre la función asociada a esa modelización.

Por otra parte, la identificación de las tres fases con los pasos y procesos del Ciclo de modelización de Blum y Leiss citado resulta más compleja. Podríamos decir que la 1ª fase comprende los pasos de *Construccción, Simplificación/Estructuración* y *Matematización*, y que la 2ª fase pertenece, en principio, a las fases de *Matematización* y *Trabajo matemático*. El problema estriba en que obtener una tabla de datos o trabajar con un programa informático no tiene por qué representar, necesariamente, *matematizar* o *trabajar matemáticamente*. La matematización implica que el alumno asume que se encuentra en el *mundo de las matemáticas* y que, en ese mundo, los conceptos, nociones y herramientas poseen un significado matemático en el seno de las matemáticas. Es decir, no creemos que se pueda decir que un alumno realiza una matematización por el simple hecho de obtener una expresión por medio del uso de un programa informático. Eso será cierto si el alumno comprende lo que ha realizado y asume que la expresión obtenida es una función, con todo lo que eso conlleva. Tampoco obtener una tabla de valores implica necesariamente que los alumnos identifiquen los datos con variables funcionales, con lo que la matematización que representa la obtención de una tabla de datos puede ser una matematización limitada o parcial.

Como veremos, los alumnos no asumen matemáticamente el producto que han obtenido (una función modelizadora), por lo que no creemos que podamos identificar, plenamente o sin dar lugar a dudas, las dos primeras fases con los pasos indicados del ciclo de modelización. Respecto a la 3ª fase la podemos identificar con los pasos 4 y 5 *(Trabajo matemático; Interpretación*) si bien la interpretación del resultado, como veremos, se mueve entre la interpretación desde las *matemáticas* y desde el *mundo real*. Algunos alumnos interpretan el modelo matemático como una función sin identificación clara con el comportamiento de un muelle y otros, en cambio, sí tienen presente que el modelo obtenido pretende describir matemáticamente el comportamiento de un muelle. Se trata de las diferencias entre los alumnos al establecer las relaciones entre S y M, que dan lugar a rutas individuales en la modelización (Borromeo, 2006; Blum y Borromeo, 2009).

1ª y 2ª Fase: el *saber hacer*

Si los alumnos saben hacer un modelo, deberán obtener la expresión analítica de la función, algo que se consigue en la segunda fase de la actividad. El *resultado matemático* (*mathematical result*) permite, de forma directa, obtener el resultado real (*real result*) simplemente identificando variables matemáticas (x y $f(x)$) con magnitudes físicas (peso y longitud).

En la primera fase, el tiempo que los alumnos dedicaron a obtener la tabla de datos no superó en ningún caso los 18 minutos, por lo que se puede calificar esta fase como de corta duración. El ambiente de trabajo era relajado, y no se observaron pérdidas de tiempo significativas. Además, todos los alumnos participaron activamente, decidiendo consensuadamente la distribución del trabajo, asumiendo que es importante realizar bien las mediciones.

Durante la práctica, los alumnos buscan regularidades entre los datos que van obteniendo. En las conversaciones que mantienen, mencionan que la longitud del muelle aumenta tantos centímetros por cada tantos gramos de peso. Se hace patente, por tanto, que los alumnos se han dado cuenta de que la relación entre los datos que van obteniendo implica una tasa de variación media constante.

El número de datos que genera cada grupo varía considerablemente (de 9 a 32), así como el nombre asignado a cada conjunto de datos. Observaron el trabajo de sus compañeros y concluyeron que las diferencias con otros grupos se deben a que trabajan con muelles distintos.

En cuanto al volcado de datos y obtención de la función de ajuste, el tiempo total que invierten los diferentes grupos ronda los 15 minutos, de los cuales, 10 minutos los dedican a introducir los datos de su tabla de valores.

En los párrafos siguientes describiremos con más detalle cómo obtienen la función de ajuste los diferentes grupos.

El grupo A decide con facilidad, en función de los valores de su tabla de datos, el intervalo visible del eje de abscisas y de ordenadas. El cambio en los ejes lo determinan una vez que han introducido los datos de la tabla de valores, que toman la forma de puntos del plano visibles en la pantalla del ordenador. Este grupo realiza el ajuste mediante una recta determinada a partir de dos puntos visibles en la pantalla (Gráfico 1. Recta determinada a partir de los puntos (150,13) y (750,262)).

Los grupos B, C, D y E ajustan los datos mediante la función afín $f(x) = ax + b$. (Gráfico 2, Gráfico 3, Gráfico 4 y Gráfico 5). El grupo C, al contrario que sus compañeros, utiliza la longitud del muelle en el eje de abscisas y el peso en el eje de

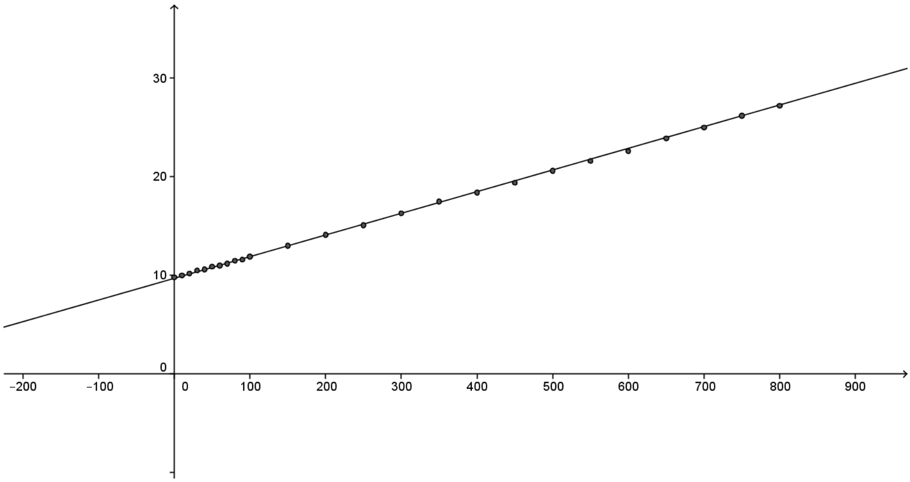

Gráfico 1. Datos y función obtenida por el Grupo A: *y = 0.02x + 9.7*

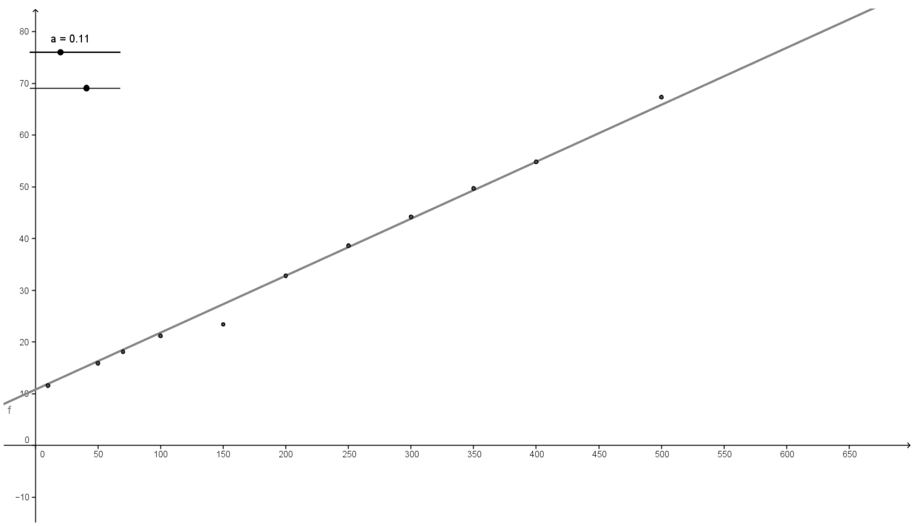

Gráfico 2. Datos y función obtenida por el Grupo B: *f(x) = 0.1x + 10.8*

ordenadas (Gráfico 3). Por otro lado, el grupo D tiene dificultades para fijar los intervalos visibles de los ejes. Dudan sobre cómo introducir los parámetros y modificar su valor.

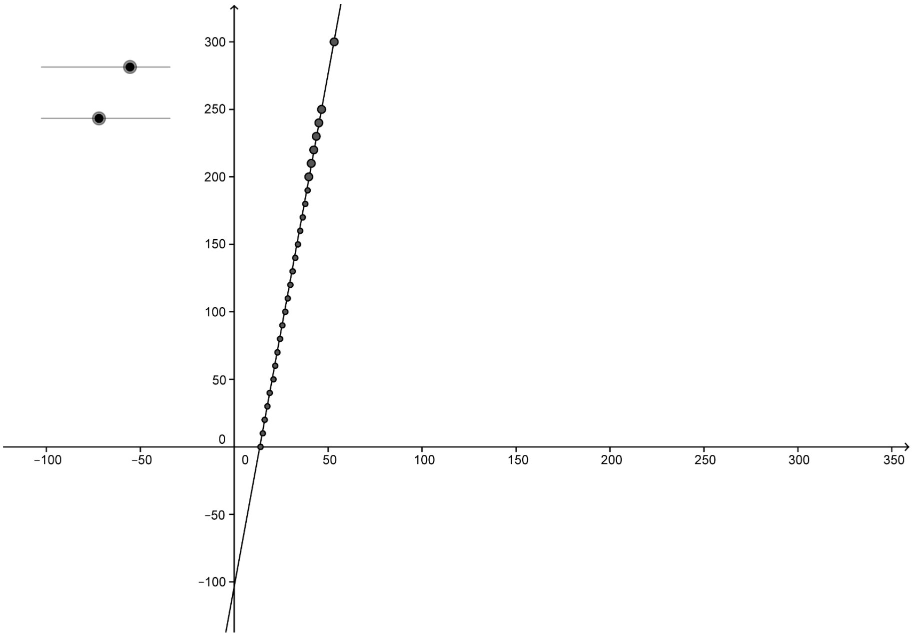

Gráfico 3. Datos y función obtenida por el Grupo C: *f(x)=7.6x-103.4*

Por su parte, el grupo F ajusta los datos mediante una recta de la forma *y = ax + b*. Usan y modifican parámetros para obtener la recta adecuada (Gráfico 6).

Los resultados obtenidos muestran, que generar un número de datos grande no influye de forma decisiva en la determinación adecuada de la función de ajuste. Así, el grupo A generó 25 pares de puntos frente a los 13 del grupo F y ambos grupos obtuvieron la misma función.

Esta parte de la actividad se centra en la parte técnica y, limitadamente, la parte tecnológica de la actividad planteada como praxeología. Los apartados prácticos y teóricos no se manifiestan en ningún momento en la actividad de los alumnos, que realizan y enfocan su trabajo como un proyecto puramente técnico: deducir una expresión mediante el uso técnico, aprendido previamente, de un programa informático. Los grupos A y F no plantean el problema como la búsqueda de la expresión analítica de una función que posea una gráfica que cumpla una condición determinada (ajustar una serie de puntos del plano) sino

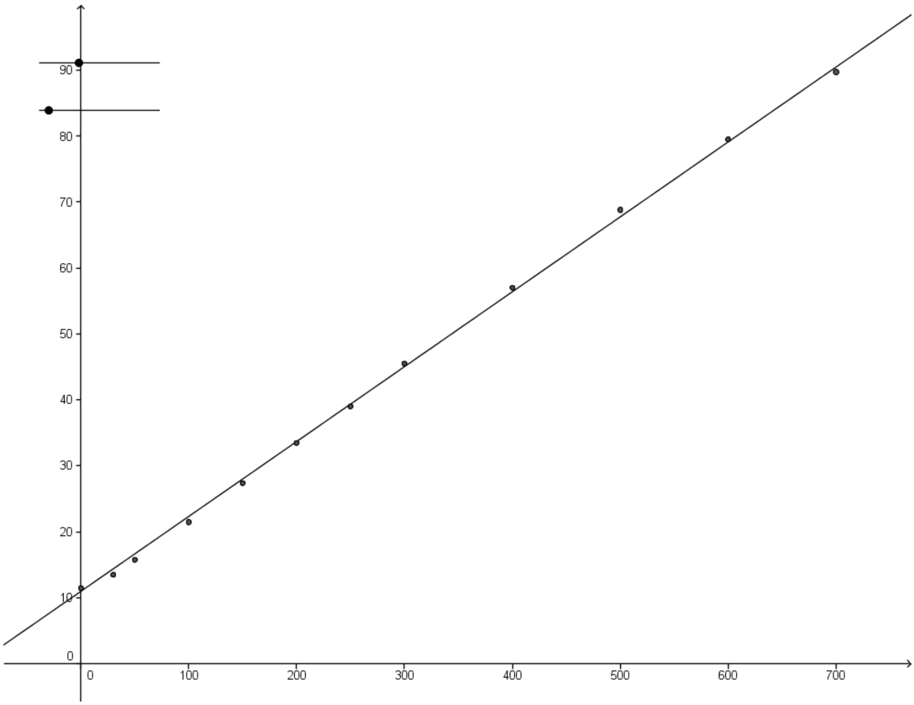

Gráfico 4. Datos y función obtenida por el Grupo D: *f(x) = 0.11x + 11*

como la búsqueda de la ecuación de una recta. Los puntos del plano que observan en la pantalla son puntos en el plano y no pares de puntos vinculados por una relación de dependencia entre valores numéricos. Así, la variable *y* del par *(x, y)* no es considerada una variable dependiente de una función por determinar, sino que es tomada como la segunda coordenada de un punto del plano. Lo dicho cobra mayor sentido con la forma de obtener la expresión algebraica del grupo A, que plantea y resuelve el problema determinando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos concretos. En su caso, ni siquiera la noción de variable se haya presente o tiene repercusión alguna en su trabajo de forma clara. Dilucidar si realmente los alumnos consideran los conjuntos de datos como variables funcionales en estas dos fases resulta complicado, pero el hecho de que dos de los seis grupos determinen la expresión como una recta (que ajusta todos los datos o que pasa por dos de los puntos visibles) lleva a pensar que no es así. Se podría especular que los integrantes de los otros grupos —que determinan

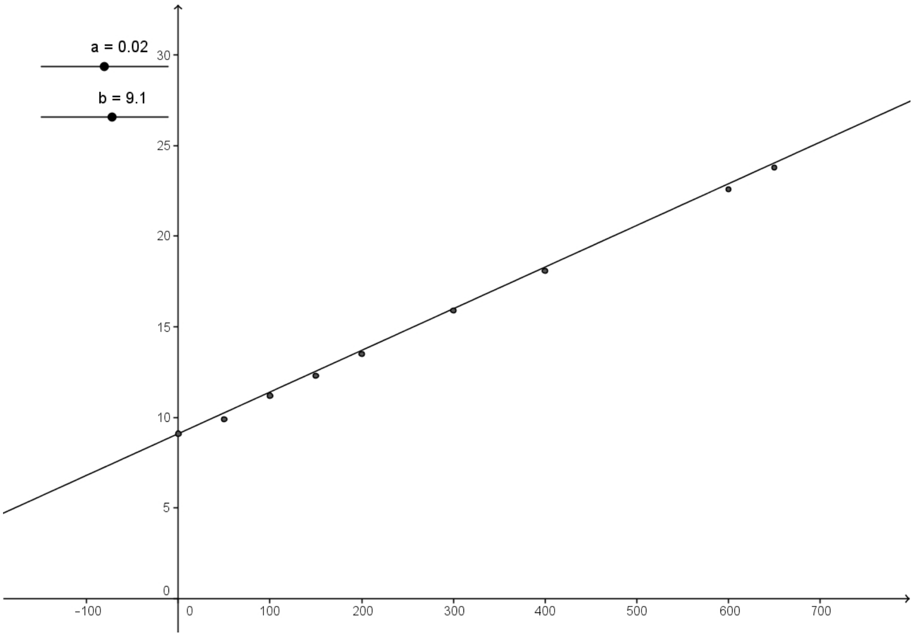

Gráfico 5. Datos y función obtenida por el Grupo E: *f(x) = 0.02x + 9.1*

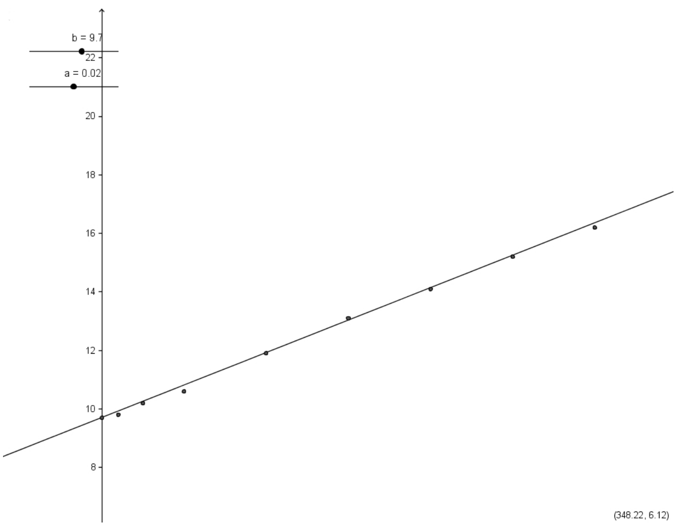

Gráfico 6. Datos y función obtenida por el Grupo F: *y = 0.02x + 9.7*

una función– sí identifican los datos como variables funcionales, pero destacamos que, en realidad, los alumnos se han limitado a usar una técnica aprendida previamente.

En este punto, se resalta que los alumnos obtienen al término de la segunda fase una expresión matemática considerada como *resultado matemático* y, al mismo tiempo, *real* a la cuestión inicial planteada (por simple identificación de las variables con las magnitudes físicas). Esto puede llevar a pensar que los alumnos han conseguido generar un modelo matemático –al menos en cuatro de los seis grupos– de forma exitosa. Incluso se podría afirmar que el resultado de los grupos que obtuvieron una recta como lugar geométrico representa un modelo matemático que relaciona las variables de peso y longitud, restando importancia al hecho de que no obtengan una función para que consigan un *resultado matemático*. El hecho de que los alumnos obtengan un modelo matemático (la función) puede llevar a la conclusión de que han completado el ciclo de modelización en su mayor parte porque han realizado los procesos de simplificación, estructuración, matematización y trabajo matemático que conducen a la obtención de un resultado matemático (Greefrath, 2011). Como veremos al analizar las respuestas del cuestionario, el *saber hacer* un modelo no implica que los alumnos comprendan los conceptos y nociones vinculados a ese *saber hacer*.

3ª Fase: El *saber*

El cuestionario, compuesto por 9 preguntas (Tabla 1), fue planteado con el objetivo de mostrar hasta qué punto los alumnos integraban el saber en el saber hacer. Acudiendo a su competencia generando un modelo, los alumnos han demostrado que son competentes pero, ¿esa competencia puede decirse que sea una competencia asociada al conocimiento matemático?

Los alumnos contestaron el cuestionario de forma individual. Al entregarles el cuestionario, se apuntaron en el encerrado las funciones y expresiones obtenidas por cada uno de los grupos para que observaran que los valores de a y b en la expresión $f(x) = ax + b$ son, al mismo tiempo, variables y constantes. Esa visibilidad de la condición de parámetros de a y b resulta fundamental para las preguntas 2 y 3.

Un análisis completo de las respuestas conllevaría un estudio personalizado encaminado a mostrar las diferentes rutas que establecen los alumnos (Borromeo, 2006; Blum y Borromeo, 2009). Por falta de espacio, optaremos por realizar un análisis de respuestas que *prime* los elementos en común, entendiendo que no se pretende un estudio cuantitativo de las respuestas obtenidas a pesar de mostrar algunas de ellas a través de porcentajes. Para ello, hemos agrupado las respuestas en función del objetivo fundamental de la pregunta. Por un lado, mostraremos los resultados que se asocian más a la interpretación del modelo o del resultado obtenido (preguntas 1, 6, 7 y 9) y, por otro lado, los resultados relacionados con las variables y parámetros que aparecen en el modelo (preguntas 2, 3, 4, 5 y 8).

Interpretación del modelo y del resultado

La primera pregunta del cuestionario solicita que los alumnos identifiquen el tipo de función que han obtenido e interpreten el tipo de función en el contexto origen del modelo. Se buscaba averiguar qué elemento o elementos característicos usan los alumnos para nombrar la función. En la Tabla 2 se muestra que un porcentaje elevado de alumnos identifican el tipo de función con su representación gráfica (50%). Además, el hecho de que identifiquen la representación gráfica que obtienen con una relación de proporcionalidad directa entre las variables (22,7%) indica que los alumnos identifican la presencia de una tasa de variación media constante con la proporcionalidad directa.

Algunos alumnos convierten una expresión que involucra una relación funcional en una ecuación (Figura 2), algo necesario, según Ursini y Trigueros (2006), para determinar los valores de una variable en función de los valores de la otra. La cuestión fundamental es que esta identificación no se realiza al determinar el valor concreto de una variable en función de un valor de la otra, sino que la identificación es la de la propia expresión funcional con una ecuación.

La pregunta número seis (¿qué longitud se alcanza, según el modelo obtenido, si no se coloca peso en el muelle?), se centra en comprobar si los alumnos observaban claramente la diferencia entre los datos que habían obtenido experimentalmente, que dieron lugar a la tabla de datos, y la función que modeliza el fenómeno, construida a partir de dicha tabla de datos. De las seis funciones obtenidas a partir de las tablas de datos confeccionadas en el laboratorio, sólo dos funciones poseen un valor de b ($f(x) = ax + b$) igual al valor correspondiente a *0 g* en la tabla de datos ($f(x) = 0.02x + 9.1$ del grupo E y $f(x) = 0.02x + 9.7$ del grupo F). La función representa un ajuste de datos, lo que se traduce en que el valor correspondiente a *0 g* obtenido usando la función ($f(0)$) será diferente al

Tabla 2. Interpretación de la función obtenida

	Nº de alumnos	%
Vinculan/Identifican el tipo de función con su representación gráfica (recta).	11	50
Utilizan la forma que toma la expresión algebraica como definitoria de la función (polinómica).	1	4,5
Relacionan la representación gráfica y el crecimiento con una relación de proporcionalidad directa.	5	22,7
Relacionan la pregunta con la propiedad de continuidad de las funciones.	3	13,6
No responden.	2	9
Total	22	100

valor en la tabla de datos. Sólo un alumno detecta la contradicción que representa disponer de dos resultados diferentes para el mismo peso.

Una parte importante de los alumnos (40,8%) no considera que la modelización realizada le resulte útil para obtener datos del problema no presentes en

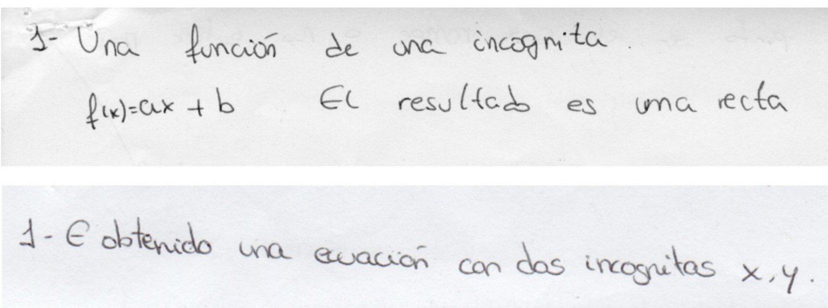

Figura 2. Identificación de la función con una ecuación

Transcripción: *Una función de una incógnita. f(x) = ax + b El resultado es una recta*
He obtenido una ecuación con dos incógnitas x, y

la tabla de datos, como muestra el hecho de que usen la tabla de datos y no la función para obtener su respuesta. Los siete alumnos (31,8%) que mencionan que el valor obtenido es lo que mide el muelle son los únicos que realmente interpretan el resultado.

El objetivo de preguntar si el muelle se puede alargar indefinidamente (pregunta 7), es comprobar si los alumnos distinguían adecuadamente entre la función obtenida y la función aplicada en el caso concreto de la modelización realizada o, lo que es lo mismo, la interpretación del resultado matemático en el contexto real. Evidentemente, el muelle no puede ser estirado indefinidamente ni encogido (valores negativos de longitud), sometido a un peso negativo o a un peso igual a $+ \infty$. El dominio de definición de la función aplicada al modelo real debe ser *[0, G]*, siendo *G* el peso máximo que se corresponde con el peso en el que el muelle alcanza la longitud del alambre usado para construir el muelle (*L*). De esa forma, el recorrido de la función resulta *[l, L]*, siendo *l* la longitud del muelle sin ser sometido a peso. Conviven, por tanto, dos funciones: la función matemática, de dominio y recorrido igual a R y la función matemática que representa una modelización del fenómeno físico, con dominio y recorrido diferente.

Nos encontramos de nuevo ante el 5º paso del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007) –*Interpretación*– en el que los resultados son trasladados a la situación real para obtener un resultado real asociado al modelo real mediante un proceso de validación. Así mismo, se halla presente el aspecto F5 descrito por Ursini y Trigueros (2006) que consiste en determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

A partir de los resultados obtenidos, podemos afirmar que los alumnos no utilizan explícitamente el dominio y recorrido de la función ni responden en términos de un intervalo concreto de la variable independiente y su correspondiente para la variable dependiente. Tampoco mencionan que la función obtenida debe ver modificado su dominio para poder obtener una función como *resultado real*. Solo tres alumnos señalan la relación de la pregunta con el dominio y recorrido de la función y la relación entre intervalos que establece la función, pero también resulta claro que los alumnos son conscientes, en general, de que el muelle no puede ser alargado indefinidamente. Ello nos lleva a la conclusión de que existe una desconexión o ruptura, en un porcentaje alto de alumnos entre el *resultado matemático* y el *resultado real*, así como en su interpretación en contexto. Los alumnos no realizan el proceso de interpretación en términos propios relativos al conocimiento de las funciones (dominio, recorrido e intervalos). Volvemos a encontrar claras deficiencias en el conocimiento matemático relacionado con el *saber*.

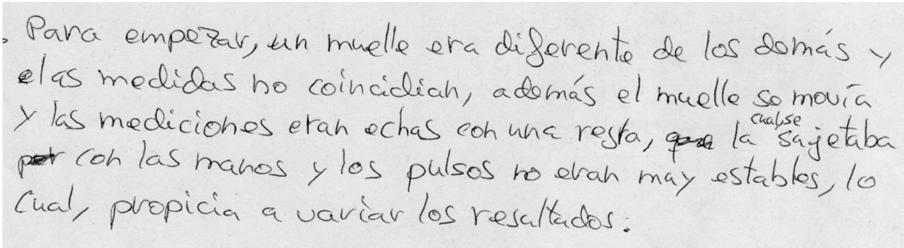
. Para empezar, un muelle era diferente de los demás y ~~e~~las medidas no coincidían, además el muelle se movía y las mediciones eran echas con una regla, ~~que~~ la cual se sujetaba ~~por~~ con las manos y los pulsos no eran muy estables, lo cual, propicia a variar los resultados.

Figura 3. Respuesta de un alumno en relación con las características de cada muelle

Transcripción: *Para empezar, un muelle era diferente de los demás y las medidas no coincidían, además el muelle se movía y las mediciones eran hechas con una regla, la cual se sujetaba con las manos y los pulsos no eran muy estables, lo cual, propicia a variar los resultados*

El hecho de que los diferentes grupos obtengan funciones diferentes no conduce a los alumnos a vincular las características de cada muelle con los parámetros presentes en las funciones obtenidas (pregunta 9 del cuestionario), con lo que la interpretación del resultado matemático en el contexto real resulta, nuevamente, deficiente. Es más, separan el fenómeno físico del modelo matemático hasta el punto de considerarlos independientes. En la Figura 3 se muestra la respuesta de un alumno en la que queda recogido lo anterior. Solo un alumno identifica los parámetros presentes con las características específicas de cada muelle usado aunque, la mayoría de ellos, mencionan la diferencia en las características físicas de los muelles (77,3%).

Nuevamente aparecen deficiencias en la interpretación del resultado en contexto, lo que indica la escasa importancia que concede el alumno a la interpretación del resultado. El alumno considera que debe, únicamente, obtener un resultado matemático a una tarea encomendada, siendo la interpretación del mismo un elemento secundario cuando no prescindible.

Variables y parámetros

La atención se centra en comprobar si los alumnos reconocen y diferencian las variables dependientes de las independientes y si vinculan los nombres asignados en la función a las variables (*x* e *y*) con las magnitudes del fenómeno físico estudiado (peso y longitud). Se intentó comprobar si los parámetros del modelo eran reconocidos y si eran mencionados como variables o no. Es aquí donde se tratan los aspectos F1, F4 y F6 descritos por Ursini y Trigueros (2006): la diferenciación jerárquica entre variable y parámetro y la condición de variable constante de los parámetros (Drijvers, 2003).

En la segunda parte de la pregunta 3 (¿qué significado tiene el parámetro en el experimento?) se pretende dilucidar si los estudiantes comprenden las conexiones y relaciones que existen entre los distintos pasos del ciclo de modelización: la obtención de la función de ajuste consiste en una matematización de un caso real, con lo que nos encontramos en una fase intramatemática (trabajo en el seno de la Matemática), fuertemente relacionada con algo extramatemático (la situación real a modelizar).

En la Tabla 3 se observa que sólo 36,4% de los alumnos identifican correctamente las dos variables (dependiente e independiente). Los errores al identificar las variables provienen, por ejemplo, de considerar en la expresión $f(x) = ax + b$, el valor b como variable independiente porque su valor no depende del valor de x o no varía (identificando la variable independiente con una constante-variable). En la misma línea, el valor a o ax, es identificado como la variable dependiente porque su valor depende del valor que tome x. Es decir, la distinción entre variable dependiente e independiente se realiza en función de su vinculación con x.

En el siguiente extracto de una de las entrevistas podemos observar lo que se acaba de exponer:

30 Profesor: ¿Y la independiente?
31 Alumno 6: El *11*, que no varía.
20 Alumna 3: [...] Eh, sí, la dependiente es la que depende de la *x* entonces la independiente es la que es siempre constante [...] [*Se ríe*].

50,1% de los alumnos consideran los parámetros como variables dependiente o independiente al constatar que su valor varía en las expresiones que observan en el encerado. Aparecen, por tanto, las dificultades en la comprensión del parámetro asociadas a su condición de constante-variable (Drijvers, 2003). En definitiva, los resultados obtenidos muestran que un porcentaje elevado de alumnos (72,7%) no sabe qué es un parámetro. Este resultado contrasta con el hecho de que estos alumnos han trabajado con parámetros en múltiples contextos (continuidad, derivada y sus aplicaciones, estudio y determinación de asíntotas) desde 3º de la ESO. Por otra parte, se pone en cuestión las ventajas del uso de los

Tabla 3. Identificación de las variables dependiente e independiente

		Nº de alumnos	%
Identifican correctamente la variable dependiente e independiente.	Identifican la variable *x* como *peso* y la variable *y* como *longitud*.	3	13,6
	Identifican la variable independiente como *x* y la dependiente como *y*.	1	4,5
	Identifican el peso como la variable independiente del problema y la longitud como la dependiente.	4	18,2
Identifican de forma deficiente las variables.	Identifican $0.11x$ y 10.8 o 11 como variable dependiente.	6	27,3
	Identifican como variables dependiente e independiente los números *a* y *b* de la expresión $f(x) = ax + b$.	5	22,8
	Otras opciones.	3	13,6
Total		22	100

programas de geometría dinámica y de deslizadores para una mejor comprensión del concepto de parámetro (Drijvers, 2003).

Las preguntas 4 y 5 se corresponden claramente con los aspectos F2 y F3 descritos por Ursini y Trigueros (2006). El objetivo de estas preguntas es que los alumnos apliquen el modelo obtenido para calcular datos que no aparecían en la tabla de valores. Como se puede observar en la Tabla 4, solo 27,2% de los alumnos usan la función en ambas preguntas y un porcentaje alto de alumnos utilizan en una o ambas preguntas la regla de tres (50%).

En la Figura 4 se muestra la respuesta de un alumno que utiliza la regla de tres para responder a la pregunta 4.

El uso de la regla de tres por parte de los alumnos, nos remite a la consideración del problema como un caso en que las magnitudes son proporcionales o, lo que es lo mismo, se identifica la relación entre variables con una relación que

Tabla 4. Uso de la función para obtener nuevos datos

	Nº de alumnos	%
Utilizan la función para obtener los datos solicitados en las dos preguntas.	6	27,2
Utilizan la regla de tres para obtener los datos solicitados en las dos preguntas.	8	36,4
Utilizan la regla de tres en una de las preguntas y la función en la otra.	3	13,6
Usan la regla de tres y la función en la misma pregunta.	1	4,5
Incluyen únicamente un valor numérico en sus respuestas.	3	13,6
Para calcular el peso, aproxima el valor mediante valores próximos de la tabla de datos.	1	4,5

sigue una ley de proporcionalidad directa. De esta forma, aparece claramente la confusión entre tasa de variación media constante y proporcionalidad directa, que ya hemos comentado con anterioridad, que se encuentra en relación con la representación gráfica de una recta:

15 Profesor: Sigue una recta pero, ¿es directamente proporcional?
16 Alumno 2: Si, creo que sí, sí.
70 Alumna 3: Claro, porque tienes la tabla de datos y dices, si tengo esto y tengo tanto entonces de esto tengo que tener otro tanto y haces una regla de tres (...)

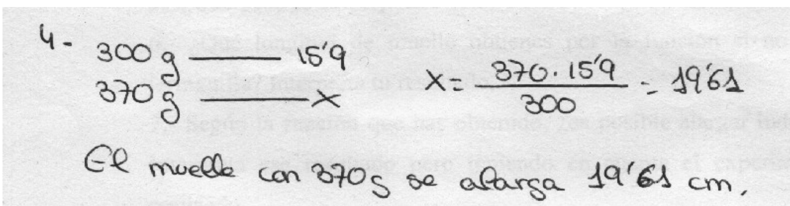

Figura 4. Uso de la regla de tres en la pregunta 4

Sobre el escaso número de alumnos que usan la función para calcular los valores solicitados, en las entrevistas aparece con claridad la mención al *saber* asociado a las funciones. En el siguiente extracto, el alumno reconoce la influencia que ese conocimiento tiene sobre las respuestas al cuestionario para no aplicar la función:

138 Alumno 7: (...) claro, es que si no tienes realmente el concepto de función después no lo vas a saber aplicar. De hecho aquí [*señala una de sus respuestas*] ni menciono que es una función esto. Si no sé que esto es una función, ¿cómo lo voy a aplicar aquí? [*Señala su respuesta*]. Yo creo que es ese el problema que teníamos.
148 Alumno 7: (...) claro, la notación que se utiliza y todo, eso tienes que conocerlo realmente para saber de qué estás hablando (...)

La pregunta 8 (deducir cómo conocer el peso colocado en el muelle si se conoce la longitud del muelle), se relaciona con el aspecto F2 descrito por Ursini y Trigueros (2006) y con las operaciones con funciones. Se pretendía evaluar si los alumnos conocían el significado de la función inversa y si sabían aplicarlo al caso concreto de la modelización realizada. De los 22 alumnos, sólo una alumna menciona expresamente la inversa de la función, aplica el método algorítmico que ha aprendido (cambia la x por la y y viceversa) pero se equivoca al realizar el cálculo de la función inversa y la nombra como y en vez de f^{-1} (Figura 4).

La forma de presentar el resultado parece indicar que los alumnos consideran la expresión de la función como una relación entre variables que permite calcular una variable en función de la otra. Las palabras *sustituir* y *despejar* aparecen a menudo. El cálculo es un cálculo algebraico sin relación alguna con las funciones y su significado. El análisis es algebraizado y, como ya comentamos brevemente con anterioridad, las expresiones funcionales son consideradas y tratadas por los alumnos como igualdades, ecuaciones o expresiones en las que las variables no son variables funcionales y deben ser despejadas, llegando a ser nombradas por algunos alumnos como incógnitas (Figura 5).

Es importante que el alumno transforme la relación funcional en una ecuación para obtener un resultado (Ursini y Trigueros, 2006) pero, además, esa transformación debe ser interpretada en términos funcionales para que resulte un aspecto positivo en el contexto de la actividad que se realiza. Dicho de otro modo, los alumnos realizan un cálculo y obtienen un resultado pero no utilizan el “saber” asociado al “saber hacer” del cálculo.

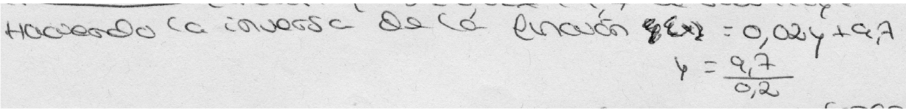
Haciendo la inversa de la función g(x) = 0,02y+9,7
y = 9,7/0,2

Figura 5. Cálculo de la función inversa

Transcripción: *Haciendo la inversa de la función x=0.02y+9.7; y =* $\dfrac{9.7}{0.2}$

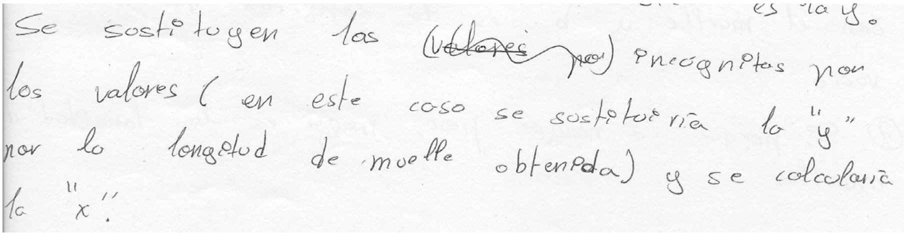
Se sostituyen las (~~valores~~ por) incognitas por los valores (en este caso se sostituiría la "y" por la longitud de muelle obtenida) y se calcularía la "x".

Figura 6. Identificación de la función con una ecuación

Se sustituyen las incógnitas por los valores (en este caso se sustituiría la "y" por la longitud del muelle obtenida) y se calcularía la "x".

CONCLUSIONES

¿Cuál es la razón por la cual los alumnos desconocen, de forma mayoritaria (63,6%), el significado de "*variable dependiente*" y "*variable independiente*", así como los términos de uso habitual y básico al estudiar funciones? ¿Cuál es la razón de que prácticamente la totalidad de los alumnos participantes (95,5%) desconozcan el significado del término "*parámetro*"? La razón fundamental se encuentra en que los ejercicios que realizan habitualmente se resuelven repitiendo una serie de pasos prefijados, lo que los convierte en ejercicios rutinarios o de tipo algorítmico. Como consecuencia, la comprensión, uso de conceptos, nociones y términos se hace innecesaria. La enseñanza basada en el uso de algoritmos transforma las funciones y su uso en ecuaciones o fórmulas para resolver el ejercicio propuesto de una forma fija e invariable.

Se cree que uno de los peligros al hablar de la introducción de la modelización en la Enseñanza Secundaria, es que el profesor suponga, por ejemplo, que en el proceso de obtención de la tabla de datos los alumnos han identificado dos variables presentes en el problema (masa y longitud) con dos variables matemáticas (dependiente e independiente), con lo que han realizado un primer proceso de matematización de la realidad. Ese primer paso lleva a plantearse la resolución de un problema matemático: ¿qué tipo de relación matemática se establece entre las variables (físicas y matemáticas)? La segunda fase da respuesta a esa pregunta, puesto que obtienen una expresión matemática que relaciona ambas variables, podremos suponer que el modelo matemático que obtienen integra todo aquello que una función conlleva: variable dependiente e independiente, relación de dependencia entre variables mediante una expresión matemática, parámetros, relación de la expresión analítica con la gráfica de la función, etc. (Greefrath, 2011).

En definitiva, se supone que obtener un resultado matemático representa que la *praxis* se ha integrado en el *logos*, característica de las evaluaciones del conocimiento que priman la obtención de resultados correctos. Un profesor puede, por tanto, plantear la modelización como una actividad encaminada a la obtención de un modelo matemático, suponiendo la integración de *praxis* y *logos*. Así, la enseñanza de las matemáticas se centra en el aprendizaje de técnicas, τ, resultando de menor importancia la tecnología asociada a la técnica, ϕ, y la teoría que justifica dicha tecnología, θ. Como consecuencia, el bloque praxeológico $[T/\tau/\phi/\theta]$ se halla claramente descompensado. Además, la práctica docente encaminada a que el alumno obtenga un resultado correcto lleva a que éste no se cuestione el resultado que obtiene. Si utiliza adecuadamente las técnicas que ha aprendido, no es necesario interpretar el resultado porque solo se le solicita obtener un resultado.

Los alumnos pueden obtener un modelo sin problemas al término de la 2ª fase, lo que podría llevar a pensar que han integrado *Saber* y *Saber hacer*, pero al responder preguntas en la 3ª fase es cuando las desconexiones entre *praxis* y *logos* resultan evidentes. Por ejemplo, el uso mayoritario de la regla de tres para responder a las preguntas 4 y 5, representa una constatación de la identificación de la recta y la tasa de variación media constante con una relación de proporcionalidad directa. Además, representa también la presencia de deficiencias importantes en el proceso de matematización y trabajo matemático, pues el modelo obtenido no es usado para responder las preguntas. Representa, al mismo tiempo y en relación directa con lo anterior, una ruptura o desconexión entre *saber* y *saber hacer*.

La obtención de la función parece no ser útil para alcanzar datos no presentes en la tabla de datos, para una parte importante de los alumnos. Por tal motivo, el paso del ciclo de modelización consistente en el traslado del modelo a la situación real y su validación no se produce. El hecho de que algunos alumnos usen la función en una de las preguntas y una regla de tres en la otra nos lleva a pensar que no tienen una idea clara de lo que han conseguido hacer (obtener un modelo). De hecho la importancia que conceden a la tabla de datos a la hora de obtener nueva información, lleva a pensar que aunque deducen la función, no la consideran de utilidad para estudiar el fenómeno físico que analizan. La tabla de datos resulta más fiable y útil, quedando la función como un simple cálculo que los alumnos debían realizar.

Además, la comparación de sus respuestas a la pregunta 9, con las respuestas a las preguntas anteriores, nos lleva a pensar que se halla presente una deficiente comprensión del significado de *variable funcional* y *parámetro*, de igual manera se muestra una limitada comprensión de lo que significa *dominio de definición* y *recorrido, así como* las relaciones entre intervalos de la variable dependiente con intervalos de la variable dependiente al hablar de funciones. Resulta destacable que la mayoría de los alumnos asuman que las características del muelle modifican el valor de la función y que, sin embargo, esta convicción no se manifestase claramente en las preguntas precedentes al hablar de las variables presentes en el modelo. La modificación de la función se limita al valor de a y b en cada muelle usado, aunque la forma de la función se mantiene ($f(x) = ax+b$). Los alumnos tienen en cuenta que cada muelle se comporta de forma diferente, por tanto da lugar a una tabla de datos diferente en cada caso. Pero este hecho no lo explican en términos de conceptos y conocimientos asociados a las funciones. Por ejemplo, los alumnos comprenden la utilidad del cálculo de la función inversa y, de hecho, utilizan el proceso de cálculo de la función inversa en el contexto de la modelización, pero ambas cosas aparecen desvinculadas, de forma que calculan la función inversa pero no le dan ese nombre.

En resumen, las relaciones (R) entre la situación problemática real (S) y la colección de entidades matemáticas (M), son claramente deficientes cuando no inexistentes, lo que hace que la actividad entendida como una tripleta (S, M, R) resulte una modelización claramente deficiente.

Todos los conceptos y conocimientos mencionados son básicos en el estudio de las funciones, los alumnos conocían muchos de ellos años antes de realizar las experiencias. La función asociada al modelo es una función afín, que no puede ser calificada como una función compleja, aún así, los alumnos tienen serias dificultades con los elementos presentes en el modelo. Creemos que solo desde la descontextualización, compartimentación, desconexión o la desvinculación entre *saber* y *saber hacer* y la algoritmización del saber matemático es posible explicar estos hechos. Como afirma Bolea (2002, p. 49), en relación a las definiciones en la Enseñanza Secundaria, las *"definiciones hacen un papel esencialmente descriptivo con la finalidad de precisar ciertas características de objetos supuestamente conocidos"*. El problema es que los objetos "supuestamente conocidos" son, en realidad, "objetos desconocidos", con lo que las definiciones aportadas o alcanzadas en las clases no forman parte del saber matemático que los alumnos deben comprender, asimilar y adquirir.

En el marco de una enseñanza basada en la resolución de ejercicios a través de métodos básicamente algorítmicos, la comprensión adecuada de conceptos y nociones, las definiciones, propiedades, teoremas, etc. carecen de utilidad, con lo que el alumno tiende a prescindir de ellas o restarles importancia. Se produce de esa forma una trivialización del saber matemático (Gascón, 2001), que reduce el saber matemático a la realización de cálculos rutinarios al servicio de problemas o situaciones intramatemáticas o extramatemáticas.

REFLEXIÓN FINAL

Si las actividades de modelización, como la que se ha descrito anteriormente, son llevadas al aula de Secundaria o Bachillerato de forma que se prime la obtención de la función de ajuste, gran parte de su utilidad se perderá y no contribuirá a que los alumnos adquieran y comprendan mejor conocimientos considerados como básicos en el estudio de las funciones en estas etapas educativas. Creemos que las consecuencias de este modelo de enseñanza-aprendizaje, basado en una enseñanza compartimentada o dividida en bloques aislados y basado en la enseñanza de algoritmos (incluidos los problemas reducidos a algoritmos), constituye un obstáculo de origen didáctico que puede manifestarse con fuerza en actividades de modelización como la aquí descrita. La forma de evitarlo o reducir su influencia debe basarse en que la actividad de modelización constituya una praxeología completa, por tanto, debe evitarse que la actividad de modelización se vea limitada o reducida a la obtención del modelo o la realización de cálculos utilizando la función obtenida (obtener una longitud a partir de un peso, por ejemplo).

Desde nuestro punto de vista, serían necesarios cambios en la propuesta realizada, de forma que las preguntas que se han analizado (u otras) se planteen durante y no al finalizar el proceso de obtención del modelo. Por ejemplo, la confusión entre tasa de variación media constante con la proporcionalidad directa estará ya presente en la fase de obtención de datos. Es ese el momento en que se deben realizar preguntas que lleven a los alumnos a comprender qué significa una relación de proporcionalidad directa y la diferencia entre una relación de proporcionalidad directa entre variables y una relación que conlleva que la tasa de variación media es constante. Esa misma pregunta puede dar lugar a nuevas preguntas que introduzcan la 2ª fase, momento en que se podrá tratar qué variables físicas y matemáticas están presentes, la diferencia entre la gráfica de una función que describe una relación de proporcionalidad directa de otra que no, etc. Los parámetros, el dominio y recorrido diferente de la función matemática y de la función en contexto, etc. serían temas a tratar en ese momento. También podría plantearse la misma modelización en edades más tempranas y usarla como medio de introducción de conceptos y nociones clave en funciones: variables, relación funcional, expresión analítica de una función, variables dependiente e independiente, parámetros, gráfica, etc. Entran en juego en este punto las creencias y concepciones del profesor, que derivan en un modelo epistemológico y docente (Gascón, 2001), lo que condiciona el uso o enfoque de la modelización en la enseñanza (Borromeo, 2006).

REFERENCIAS

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *29 (5),* 339-352.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues mathematics instruction, *Educational studies in mathematics*, *(22)* 37-68. Ed. Dorfler

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan, (2006), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing,

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1 (1)*, 45-58.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38 (2)*, 86-95.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19 (2)*, 221-266.

Doerr, H. M. (2006). Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *ZDM*, *38(3)*, 255-268.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter.* Tesis doctoral. Universidad de Utrecht, (www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation).

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4 (2)*, 129-159.

Gascón, J. (2011). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *31 (1)*, 9-50.

Greefrath, G. (2011). Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling–Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo, y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling (ICTMA 14),* (pp. 301–304). New York: Springer.

Kaiser, G., Sriraman, B. y Blomhøj, M. et al. (2007). Modelling and applications –Differentiating perspectives and delineating commonalties. *Comunicación en el CERME 5, WG 13. Modelling and Applications* (pp. 235-242). http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/

N.C.T.M. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: S.A.E.M. THALES.

Orden ESD/1729/2008 de 11 de Junio. BOE 18/06/08, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato.

OCDE (2012). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias* (2013). Madrid: MECD del Gobierno de España (Traducción al castellano de la publicación original de la OCDE).

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE del 5 de Enero de 2007.

Schmidt, B. (2010). Modeling in the classroom motives and obstacles from the teacher's perspective. *Comunicación en el CERME 6 2010, WG 11. Applications and Modelling* (pp. 2066-2076).

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática, 18 (3)*, 5-38.
Ursini, S. (2011). Il Modello 3UV: uno strumento teórico a disposizione degli insegnanti di matemática. *Quaderni CIRD 2011*, 59-70. (http://www.openstarts.units.it/dspace/handle/10077/3845).

DATOS DE LOS AUTORES

Jose Benito Búa Ares
bua@edu.xunta.es
IES Sánchez Cantón
Pontevedra. España

Teresa Fernández Blanco
teref.blanco@usc.es
Universidad de Santiago de Compostela. España.
Depto. Didáctica de las Ciencias Experimentales. Área de Didáctica de la Matemática.
Facultad de Ciencias de la Educación. Campus Norte.

Mª Jesús Salinas Portugal
mjesus.salinas@usc.es
Universidad de Santiago de Compostela. España.
Depto. Didáctica de las Ciencias Experimentales. Área de Didáctica de la Matemática.
Facultad de Ciencias de la Educación. Campus Norte.