ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal

Construction and mental mechanisms for learning matrix theorem associated with a linear transformation

María Trigueros Gaisman, Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González y Miguel Rodríguez Jara

Resumen: Con base en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) como marco teórico y metodológico, investigamos las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir la Matriz Asociada a una Transformación Lineal (MATL). Diseñamos una descomposición genética (DG) del teorema de la MATL para analizar la forma en que estudiantes universitarios lo aprenden. Reportamos tres casos de estudio que muestran cómo los estudiantes construyen el concepto de coordenadas de un vector como objeto, pero tienen dificultades para utilizarlo en la construcción de un proceso de la matriz de coordenadas de imágenes de vectores mediante la transformación. Esta dificultad parece vinculada a que no han coordinado los procesos involucrados en términos del cuantificador. Específicamente, se muestran las dificultades en la construcción de la MATL como objeto y el papel determinante que juega la consideración de la transformación lineal como una función en la comprensión profunda del TMATL.

Palabras Clave: Matriz asociada, Transformación Lineal,teoría APOE, Álgebra Lineal.

Abstract: Based on apos theory (Actions, Processes, Objects and Schemes) as a theoretical and methodological framework, we investigate the mental constructions and mechanisms required to construct the associated matrix of a Linear Transformation (MATL). We design a genetic decomposition (DG) of the theorem matl to discuss how college students learn it. We report three cases of study. The results show how students construct the concept of coordinates of a vector as an

Fecha de recepción: 18 de junio de 2014; fecha de aceptación: 3 de julio de 2015 .

object, but have difficulty using it in the construction of the coordinate matrix associated to the image of vectors. Results also show students' difficulties to construct matl as an object and the crucial role of considering TL as a function in order to attain a deep comprehension of TMATL.

Key words: Matrix associate, Linear Transformation, apos Theory, Linear Algebra.

1. ANTECEDENTES

El álgebra lineal es una materia que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemáticas necesarios en diferentes carreras, como por ejemplo las ingenierías, economía o ciencias sociales; en ello radica el interés y la importancia de investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de esta disciplina. En los últimos 25 años, se han llevado a cabo numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades de los estudiantes para comprender dichos conceptos. En los estudios iniciales se encontró que en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra lineal no eran exitosos en términos del aprendizaje de los alumnos (Harel, 1989a; Harel, 1989b; Sierpinska, Dreyfus y Hillel, 1999; Sierpinska, 2000). Surgió de ahí el interés por formular propuestas didácticas específicas para el álgebra lineal, entre las que sobresale aquella diseñada con la teoría APOE, en la que se publicaron materiales de enseñanza que ponen de manifiesto la filosofía de los autores acerca de los contenidos a incluir y su organización en un primer curso universitario de álgebra lineal (Weller, Montgomery, Clark, Cottrill, Trigueros, Arnon y Dubinsky, 2002). Recientemente se han llevado a cabo investigaciones sobre diversos conceptos de esta disciplina. En particular, la documentación que existe sobre el concepto de transformación lineal da cuenta de las dificultades involucradas en su aprendizaje. Entre los resultados de algunas de las investigaciones realizadas se pueden mencionar los obtenidos por Uicab y Oktaç (2006), quienes analizaron, mediante el referente teórico del pensamiento práctico *vs*. el pensamiento teórico (Sierpinska, Nnadozie, & Oktac, 2002), la posibilidad de los estudiantes de determinar la linealidad de una transformación lineal a través de las imágenes de los vectores de una base presentadas en un ambiente de geometría dinámica. Por su parte, Molina y Oktaç (2007) estudiaron las concepciones de los estudiantes acerca de la transformación lineal en contexto geométrico. En ambas investigaciones, los autores identificaron algunos modelos que muestran los estudiantes en relación con el concepto en estudio. También en un contexto geométrico, Karrer y Jahn (2008) analizaron la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones lineales mediante el uso del *Cabri Géomètre*; mediante tareas que implican distintos registros de representación, mostraron que esta tecnología promueve la identificación de las relaciones entre la representación gráfica de las transformaciones lineales y la matriz asociada a ellas.

En 2010, Roa y Oktaç presentaron dos posibles descomposiciones genéticas del concepto Transformación Lineal considerando perspectivas de construcción determinadas por diferentes mecanismos mentales y reportaron la prevalencia de una de ellas debido, en su opinión, a la influencia de la presentación que se usa en los libros de texto. Por otro lado, Bagley, Rasmussen y Zandieh (2012) centraron su investigación en la relación conceptual que los estudiantes establecen entre las matrices y las funciones lineales. En su estudio indican que los estudiantes que concilian ambos conceptos son capaces de trabajar con matrices sin dificultades, mientras que aquellos que no lo hacen muestran dificultades frente al trabajo con matrices. En este sentido, Wawro, Larson, Zandieh y Rasmussen (2012) presentan una trayectoria potencial de aprendizaje sobre el concepto de transformación lineal y su relación con la multiplicación de matrices que ayuda a superar las dificultades encontradas en otros trabajos.

A pesar de la abundancia en investigación sobre el tema de las transformaciones lineales, no se encuentran en ella trabajos que se aboquen a los aspectos cognitivos relacionados con la transformación lineal en su perspectiva matricial y en particular al Teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal (TMATL, ver Anexo I). Esta investigación pretende contribuir justamente en esta dirección.

1.1 Relevancia del teorema

El TMATL proporciona, desde una perspectiva teórica, una manera eficiente y sintética de interpretar las transformaciones lineales, con importantes consecuencias prácticas. Por ejemplo, en la digitalización computacional de la información, cuando se logra hacer una selección adecuada de las dos bases incluidas en el teorema, es posible simplificar algunos cálculos de matrices de coordenadas, mediante la inclusión de un cúmulo de ceros en sus coeficientes. De esta forma, la matriz puede proporcionar información importante sobre la transformación lineal de manera más efectiva.

1.2. Pregunta y objetivo de investigación

Las preguntas de investigación que surgen de la discusión anterior son: ¿Qué construcciones y mecanismos mentales son necesarios como prerrequisitos para el aprendizaje del TMATL?; ¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales asociados a la construcción del TMATL? Para responder estas preguntas, se condujo esta investigación con estudiantes universitarios utilizando como marco teórico la teoría APOE. Consideramos que esa teoría es pertinente para este estudio dado que justamente se aboca al análisis de la construcción de conceptos matemáticos y proporciona una metodología que permite el diseño de instrumentos y el análisis de los datos de forma congruente con la propuesta teórica.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: TEORÍA APOE

La teoría APOE, desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros & Weller, 2014) es reconocida en la comunidad de investigación en Educación Matemática. En ella se toma como punto de partida el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget para describir la construcción de objetos mentales relacionados con objetos matemáticos específicos. La abstracción reflexiva se pone de manifiesto en la teoría a través de distintos mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, y reversión. A través de la realización de acciones, el estudiante entra en contacto con los conceptos matemáticos. La reflexión sobre esas acciones permite su interiorización en procesos. Cuando el estudiante tiene necesidad de hacer acciones sobre un proceso, este se encapsula en un objeto. Un conjunto de acciones procesos, objetos y esquemas construidos previamente y relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente que se ponen en juego en la solución de problemas. Un esquema puede ser tratado como un objeto; el mecanismo involucrado en este caso se conoce como tematización. Estas construcciones mentales son las que representa el acrónimo APOE.

Consideremos un concepto matemático. Un individuo posee una concepción acción de dicho concepto si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Un individuo ha interiorizado la acción en un proceso si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente realizar todos los pasos específicos. Dos o más procesos pueden coordinarse para construir un nuevo proceso y un proceso puede revertirse. Si el individuo considera un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre él, se afirma que ha encapsulado el proceso en un objeto. Además, si necesita volver desde el objeto al proceso que le dio origen, se dice que ha desencapsulado el objeto.

En general puede decirse, a la luz de esta teoría, que las dificultades del estudiante con el simbolismo matemático provienen de tratar de realizar acciones sobre procesos que no han sido encapsulados. Al tratar un problema matemático, el individuo evoca un esquema y puede destematizarlo para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones entre ellas, y trabaja con el conjunto. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado.

Una descomposición genética (DG) es un modelo hipotético que describe en detalle las construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante aprenda un concepto matemático (Arnon *et al.*, 2014). En el caso de esta investigación, interesa el diseño de una descomposición genética que describa la construcción del conocimiento incluido en el TMATL, en el contexto del concepto de transformación lineal.

3. MÉTODO

Para determinar las construcciones y mecanismos mentales que subyacen a la construcción del TMATL en estudiantes universitarios, se diseñó una descomposición genética que se describe más adelante y se crearon instrumentos y registros de observación, basados en la descomposición genética, para llevar a cabo el análisis de las producciones escritas de los estudiantes, en particular de sus estrategias de solución de los ítems de dichos registros. Para analizar dichos procedimientos, consideramos que una aproximación adecuada es el estudio de casos, ya que es apropiada para estudiar una situación a profundidad en un periodo de tiempo acotado. Los estudios de casos se insertan dentro del ciclo de investigación de la teoría APOE para llevar a cabo un análisis coherente del trabajo de los participantes en la investigación.

3.1. Participantes

Los participantes de esta investigación fueron 18 alumnos chilenos de tres universidades distintas, registrados en las carreras de Licenciatura y Pedagogía en Matemática. (Stake, 2010). Los tres casos de estudio se sustentan y justifican en la necesidad de delimitar con precisión las construcciones que los participantes ponen en juego cuando trabajan con problemas relacionados con el TMATL. Los casos de estudio permiten explicitar las construcciones y los mecanismos mentales que se presentan. Además, la heterogeneidad en la formación de los estudiantes de distintas universidades permite explicitar las construcciones y los mecanismos mentales que son comunes en la construcción del teorema.

El procedimiento seguido en la selección de los casos se basó en la consideración de las siguientes categorías:

- Heterogeneidad en la formación de los estudiantes.
- Existencia de programas de Pedagogía en Matemática y de Licenciatura en Matemática, que incluyeran, al menos, una asignatura de álgebra lineal.
- Accesibilidad de los investigadores.
- Avance curricular: que los estudiantes hubieran aprobado las asignaturas de álgebra básica y cursaran cuando menos el sexto semestre de su primera carrera, para descartar, en lo posible, que sus construcciones mentales se limitaran a acciones y/o procesos.

Los 18 estudiantes con los que se trabajó fueron etiquetados por E1, E2, ..., E18, y seleccionados atendiendo al último criterio antes mencionado. La tabla 1 resume la información de los casos y los estudiantes.

Tabla 1. Resumen de la recogida de información por casos de estudio.

Tipo de estudiante	Caso 1 Estudiantes de la Universidad 1 E1, E2, E3, E4, E5	Caso 2 Estudiantes de la Universidad 2 E6, E7, E8, E9, E10, E11	Caso 3 Estudiantes de la Universidad 3 E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18

El análisis de los datos obtenidos se llevó a cabo, en primer término, de manera independiente por los investigadores. Posteriormente, dicho análisis se negoció entre ellos para triangular los resultados (Arnon *et al.,* 2014) y obtener, de esta manera, una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que mostraron los estudiantes.

3.2. Análisis teórico

El análisis teórico consistió en el estudio profundo, por parte de los investigadores, de los conceptos matemáticos incluidos en el TMATL. A partir de este análisis, se diseñó una DG preliminar del TMATL con la intención de contar con un modelo epistemológico-cognitivo de la construcción del TMATL.

3.2.1. Descomposición Genética TMATL

Partiendo de las hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas del TMATL, sostenemos que los conocimientos previos requeridos por un aprendiz para la construcción del TMSTL corresponden a los de espacio vectorial de dimensión finita como un esquema, que incluye el objeto espacio vectorial, el objeto base y el objeto dimensión, así como los conceptos de transformación lineal y de matriz como procesos.

La construcción del TMATL se inicia a partir del esquema espacio vectorial del cual se toman los componentes que lo conforman: espacio vectorial como objeto, base como procesos y vectores elementos de dicho espacio vectorial como objetos. Para ello consideramos los dos espacios vectoriales V y W con dimensiones finitas no necesariamente iguales (digamos n y m respectivamente), como procesos, se coordinan a través de la transformación lineal T en un nuevo proceso que permite considerar la transformación lineal como una función, cuyo dominio es uno de los espacios vectoriales y cuyo codominio es el otro espacio vectorial, digamos, T de V en W. Este proceso se coordina con la noción de base como un proceso que permite calcular las imágenes de los vectores de una base B de V bajo la transformación lineal T. La coordinación de este proceso con el de espacio vectorial W permite representar las imágenes de los vectores de una base B de V en el espacio vectorial W, y también presentar un vector w en el espacio vectorial W en términos de los vectores de una base B' del espacio vectorial W. Este proceso se encapsula en el objeto coordenadas del vector w en la base B', esto es $[w]_{B'}$.

En la figura 1 se muestra un diagrama que ilustra esta primera parte de la DG.

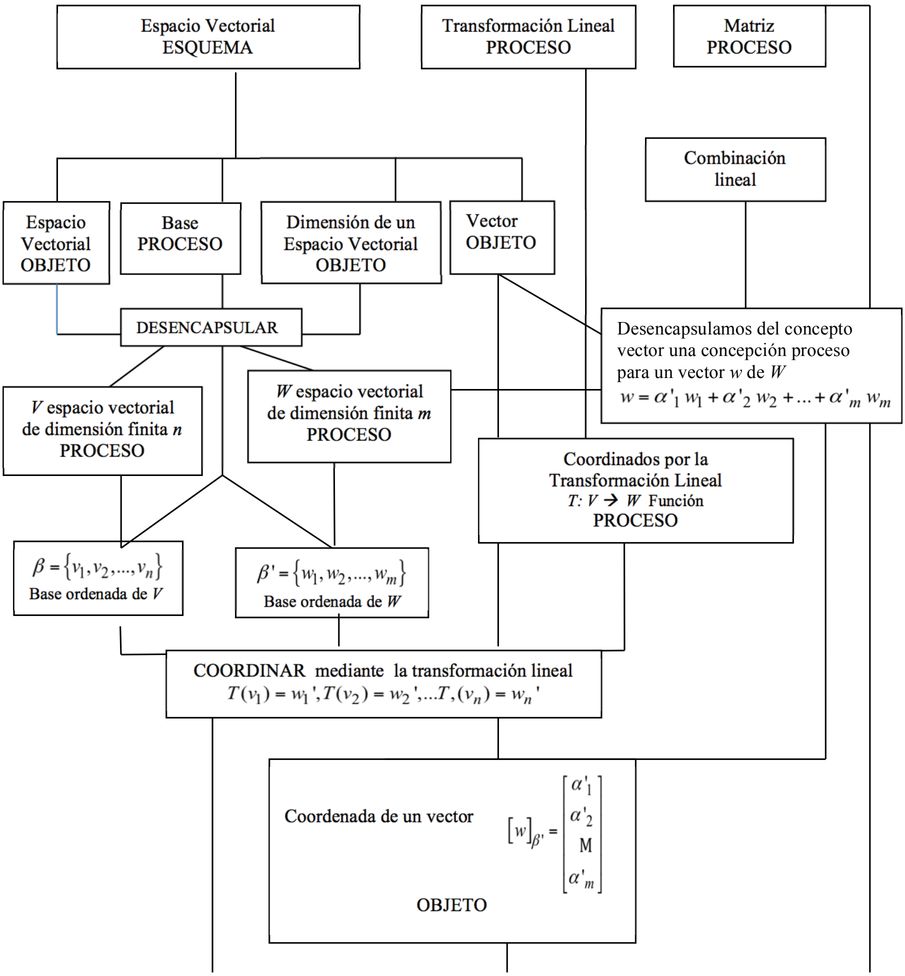

Figura 1. Ilustra la primera parte de la DG del TMATL.

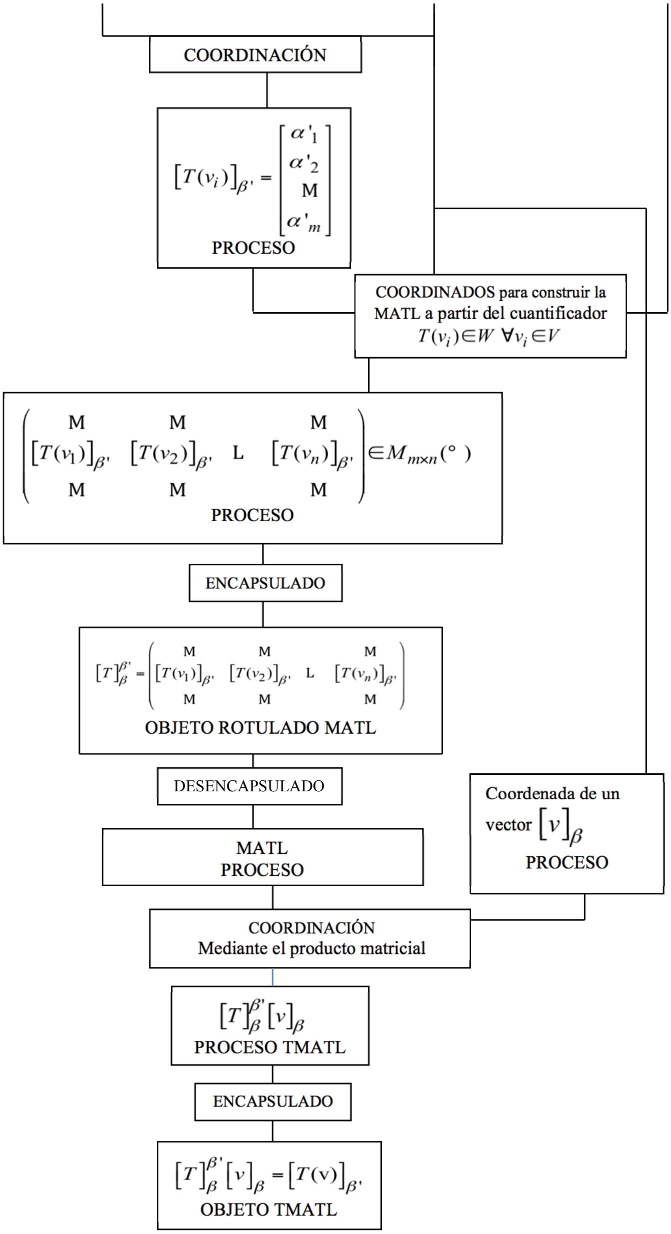

Figura 2. Ilustra la segunda parte de la DG del TMATL.

El proceso de cálculo de la imagen de un vector de una base B de V mediante la transformación lineal T se coordina con el proceso de escribir todas las imágenes de los vectores de la base B (generalización de cálculo de imágenes). Así, también, el proceso de base B' de W permite identificar las imágenes de la base B de V como elementos del espacio vectorial W como un nuevo proceso. De esta manera, es posible escribir los vectores imagen como combinación lineal de los vectores de la base B' de W (generalización dada por el cuantificador, que determina que el proceso de coordenada de un vector se repetirá en todos los vectores de la base ordenada B de V). Este proceso se coordina con el de matriz para obtener un ordenamiento de las imágenes mediante T, en una matriz que se identifica con la matriz de coordenadas. Finalmente, este proceso se encapsula en el objeto matriz asociada a una transformación lineal, rotulado como $[T]_B^{B'}$.

El proceso de matriz de coordenadas se coordina con el de coordenadas de un vector v de V en un proceso asociado a la matriz resultante del producto matricial $[[T]_B^{B'}[v]B$. Este proceso se encapsula en un objeto que puede rotularse como $[T(v)]_{B'}$.

A través de la acción de comparación de los objetos $[[T]_B^{B'}$ y $[T(v)]_{B'}$ es posible determinar la igualdad entre ambos objetos ($[[T]_B^{B'}[v]B= [T(v)]_{B'}$). Estas acciones se interiorizan en un proceso que se coordina con el proceso de función en un nuevo proceso que permite considerar esta igualdad como el resultado de la aplicación de una función, lo cual viene a ser la construcción mental proceso TMATL. Este proceso se encapsula en el objeto TMATL $[[T]_B^{B'}[v]B= [T(v)]_{B'}$. En la figura 2 se muestra un diagrama que ilustra la segunda parte de la DG.

3.3. Instrumentos

Diseñamos, en primer término, un cuestionario de 5 preguntas (Tabla 2), con la intención de documentar en una primera instancia las construcciones y mecanismos mentales previstos en la DG.

Pregunta 1	Sea $T: R^2 \rightarrow R^3$ transformación lineal definida por $T(x, y) = (x+ y, x-y, x)$, considere $C_2 = \{(1,0), (0,1)\}$ base canónica de R^2 y $C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica de R^3. Determine las coordenadas de la imagen del vector (2,1) en la base C_3.
Pregunta 2	Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x+ y-z, x+ z)$, considere $B1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ base de R^3 y $B_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ base de R^2. Determine $[T(2,1,0)]_{B2}$

Pregunta 3	Sea $T: M_2(R) \rightarrow R^2$ transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+ b\text{-}c,\ d).$ Considere $B_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ base de R^3 y $B_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ base de R^3. Determine $[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}]_{B2}$
Pregunta 4	Determine la matriz asociada a la transformación lineal definida desde $IP_2[x]$ *(polinomios de grado menor o igual a dos)* a R^3, *por* $T(\ ax^2+bx+c\ )=(a+\ c,\ a\text{-}b,\ b)$, *en las bases* $B_4=\{x^2,x^2+x,\ x^2+x\ +1\}$ *y* $B_5=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,01)\}$ de $IP_2[x]$ y R^3 respectivamente.
Pregunta 5	Considere la transformación lineal $F:\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \rightarrow \langle x^2, x+1\rangle$, definida por $\left[F\right]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde $B = \langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle$ y $B' = \langle x^2, x+1\rangle$ determine las coordenadas de la imagen del vector $\left[v\right]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Realizamos un análisis *a priori* y otro *a posteriori* para cada una de las preguntas del cuestionario. Ambos análisis fueron profusamente discutidos entre los investigadores y las discrepancias se negociaron hasta alcanzar un acuerdo que se presenta más adelante como el análisis *a priori* de las preguntas del cuestionario, y posteriormente como el análisis de los datos obtenidos en la investigación.

Una primera lectura de las preguntas puede hacerlas parecer como cuestiones que pueden ser respondidas de forma mecánica. Sin embargo, las preguntas no son triviales y esto se muestra en los resultados de este trabajo donde se observa que los estudiantes no fueron capaces de responder de esta manera, lo que indica que la solución de los problemas planteados requiere de reflexión. Es esta forma de respuesta lo que nos permite obtener evidencias que puedan contrastarse con las estructuras mentales previstas en la DG. Por otra parte, el hecho de incluir preguntas más difíciles podría conducir a la no respuesta por parte de los estudiantes que, pensamos, debe evitarse en una investigación que pretende profundizar en la forma en que los estudiantes construyen los conceptos involucrados en ellas.

Se llevó a cabo, además, una entrevista semiestructurada, basada en las preguntas del cuestionario, con el fin de profundizar en las respuestas dadas por los tres alumnos que mostraron evidencias de haber construido la mayor parte de las estructuras incluidas en la DG y que accedieron a ser entrevistados. En esta entrevista se agregaron preguntas al cuestionario que se utilizaron de acuerdo con las necesidades de la entrevista para poder discriminar posibles dudas sobre el tipo de construcción mostrada en el trabajo de estos alumnos a lo largo de toda la entrevista.

3.3.1. Análisis a priori de las preguntas del cuestionario

La pregunta 1 tiene por objetivo determinar si un estudiante muestra la coordinación entre el proceso coordenada de un vector y el de imagen de un vector mediante la TL. Dicha coordinación se lleva a cabo mediante la combinación lineal. En una descripción más precisa, podemos decir que los procesos asociados a los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, de dimensión finita, se coordinan a través de la regla de una transformación lineal en un proceso función cuyo dominio es uno de los espacios vectoriales y cuyo codominio es el otro espacio vectorial [$T: V \rightarrow W$]. El estudiante debe calcular la imagen del vector (2,1) mediante la TL definida, es decir $T(2,1)=(3, 1, 2)$, lo que corresponde a mostrar que es capaz de efectuar la acción de calcular la imagen de un vector dado. Si el estudiante ha interiorizado las acciones correspondientes a las coordenadas de un vector en una base dada como un proceso, entonces podrá determinar la imagen de dicho vector en términos de una combinación lineal de los vectores de la base de llegada. En este caso escribiendo el vector (3,1,2) como combinación lineal de {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}, es decir: (3,1,2) =3(1,0,0)+1(0,1,0)+2(0,0,1) cuyas coordenadas son los números *3*, *1* y *2*.

La pregunta 2 requiere de las mismas construcciones que la pregunta 1, aunque ahora se pide explícitamente determinar la transformación de un vector específico de $\mathbf{R}^3$ en términos de una base no canónica de R^2. La pregunta tiene por propósito determinar si un estudiante coordina el proceso de combinación lineal con el de espacio vectorial *W* en un nuevo proceso que le permita identificar la base B_2 de R^2 en términos de la cual se puede escribir el vector $T(2,1,0) = (3,2) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$ de donde se obtienen las coordenadas $\alpha = 3$ y $\beta = -1$.

Es así que reescribir las coordenadas resultantes de la combinación lineal como una matriz $\left(\left[T\left(2,1,0\right)\right]_{B_2}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right)$, requiere que las construcciones mentales antes descritas se encapsulen en un objeto coordenada de la imagen de un vector específico para realizar acciones sobre este, y construir la matriz asociada a la transformación lineal.

Nuestra hipótesis es que si un estudiante no ha construido el concepto coordenada de la imagen de un vector como un objeto, tendrá dificultades para realizar las acciones necesarias sobre este para construir la matriz asociada a la transformación lineal.

La pregunta 3 da cuenta de las mismas construcciones mentales de las preguntas anteriores. Esto es, de la coordinación entre las construcciones mentales proceso del concepto coordenada de un vector y el concepto de imagen de un vector, mediante la TL. La coordinación se lleva a cabo mediante la combinación lineal del vector obtenido (la imagen) en términos de la base del espacio de llegada. El objetivo de esta pregunta es alejar al estudiante de la dimensión del cálculo numérico, que es un paso a la generalización necesaria para la construcción de la MATL. Dada la TL T definida por $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(a+b-c,d)$, para determinar las coordenadas del vector $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, bajo la transformación, debemos escribir el vector imagen como combinación lineal de la base B_2. Es decir: $(a+b-c,d)=\alpha(1,1)+\beta(0,1)$, de donde $\alpha = a + b - c$ y $\beta = d - a - b + c$.

Por lo que se tiene $\left[T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right]_{B_2}=\begin{bmatrix}a+b-c\\ d-a-b+c\end{bmatrix}$.

En la pregunta 4, el proceso de cálculo de la imagen de los vectores de la base B_4 del espacio de partida $-IP_2[x]-$, mediante la transformación lineal T se coordina con el proceso de coordenadas de un vector en un nuevo proceso que permite escribir a todos los vectores imagen como combinación lineal de los vectores de la base B_5 de $\mathbf{R}^3$. Desde una perspectiva matemática, el cálculo de las imágenes de los vectores de la base B_4, es: $T(x^2) = (1, 1, 0)$, $T(x^2 + x) = (1, 1, 1)$ y $T(x^2 + x + 1) = (2, 0, 1)$. Paso seguido se calculan las coordenadas de cada vector imagen: $(1, 1, 0) = \alpha_1(1, 1, 0) + \beta_1(0, 1, 0) + \delta_1(0, 0, 1)$, y $(1, 1, 1) = \alpha_2(1, 1, 0) +$

$\beta_2(0, 1, 0) + \delta_2(0, 0, 1)$ y $(2, 0, 1) = \alpha_3(1, 1, 0) + \beta_3(0, 1, 0) + \delta_3(0, 0, 1)$, para obtener los valores de las coordenadas de cada vector imagen.

Para la construcción de la MATL, el proceso que permitió construir las coordenadas de las imágenes de los vectores de una base, se coordina con el de matriz para obtener un ordenamiento de las imágenes mediante la transformación en una matriz, que se identifica como la matriz de coordenadas $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. El objetivo de la pregunta es determinar si el estudiante muestra una construcción proceso del TMATL. Puede esperarse que en la resolución del sistema de ecuaciones lineales para encontrar las coordenadas, un estudiante resuelva el sistema de la siguiente forma $\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, de donde la MATL corresponde a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En la pregunta 5, el proceso matriz de coordenadas se coordina con las coordenadas de un vector mediante el producto matricial para calcular $\left[F\right]_B^{B'}\left[v\right]_B$. La necesidad de comparar los procesos permite que éstos se encapsulen en objetos, los cuales pueden desencapsularse y los procesos resultantes se coordinan en un nuevo proceso, que permite considerar a $\left[F\right]_B^{B'}\left[v\right]_B = \left[F(v)\right]_{B'}$ como resultado de aplicar una función, esto es, $f(x) = y$ para $f = \left[F\right]_B^{B'}$, $x = \left[v\right]_B$ e $y = \left[F(v)\right]_{B'}$ que es el proceso TMATL. La comparación de estos procesos para determinar la igualdad permite que esos procesos se encapsulen en el objeto TMATL. La pregunta pretende determinar si el estudiante muestra una concepción objeto del TAMTL. Como respuesta esperada, un estudiante determina las coordenadas del vector, aplicando $\left[F\right]_B^{B'}\left[v\right]_B = \left[F(v)\right]_{B'}$, de esta forma se obtiene que las coordenadas del vector $\left[F(v)\right]_{B'}$ serían: $\left[F(v)\right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$.

3.4. Análisis de datos

Una vez diseñada la DG preliminar fue necesario validarla, es decir, tener alguna certeza de su viabilidad como modelo de construcción del TMATL. Para ello se diseñó el cuestionario de 5 preguntas que se presentó en la sección anterior. El análisis de las respuestas de los estudiantes, conjuntamente con los comentarios que hicieron en estas respuestas, permitió, por un lado, identificar las construcciones mencionadas en dicha DG y, por otro, analizar las construcciones y mecanismos mentales mediante las cuales los estudiantes pueden construir el TMATL. Los datos provenientes del cuestionario se complementaron, como se mencionó, con los datos de la entrevista de tres estudiantes elegidos entre quienes habían respondido el cuestionario.

Se analizaron los resultados obtenidos de la aplicación del instrumento por los investigadores, quienes los negociaron en términos de la DG preliminar. En general, el análisis fue hecho con nitidez, es decir, se prestó atención a estudiantes que parecen comprender el TMATL y a otros que parecen no haberlo entendido. Posteriormente se discutieron las diferencias detectadas en términos de la presencia o ausencia de cada una de las construcciones o mecanismos mentales que aparecen en la DG preliminar. Así, se detectaron los datos que apoyan las construcciones o mecanismos mentales previstos en la DG o que puedan aportar información para refinarla.

4. RESULTADOS

A continuación se presenta el análisis de las respuestas al cuestionario y los comentarios incluidos en la discusión de las mismas. Es importante mencionar que el interés de este estudio consiste en explorar la posibilidad de validar las construcciones y mecanismos mentales previstos en la descomposición genética a partir de los razonamientos que los estudiantes evidencian en sus respuestas.

Construcción de las coordenadas de un vector respecto a una base como una acción

La mayoría de los estudiantes de los tres casos no mostraron evidencia de haber construido la MATL como un proceso. Algunos entre ellos, como el estudiante E2, revelan que son capaces de calcular las imágenes de vectores dados bajo una transformación específica y son capaces de escribirlos como combinación lineal en términos de los vectores de la base, que corresponde a la imagen de la transformación y no necesariamente a la base canónica. Esta evidencia pone de manifiesto que los alumnos de este grupo posiblemente han interiorizado en un proceso los conceptos de combinación lineal y espacio vectorial, pero no los han coordinado en un proceso que les permitiría identificar las coordenadas de la imagen en una base, y representarlas de manera ordenada en una matriz. (Figura 3 y figura 4).

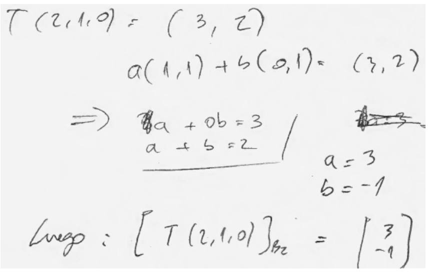

Figura 3. Respuesta de E2 a la pregunta 2

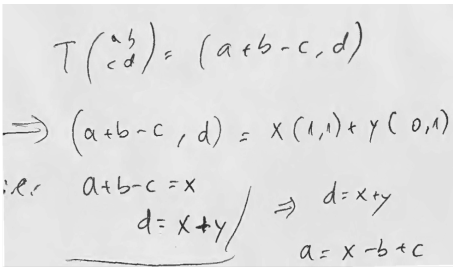

Figura 4. Respuesta de E2 a la pregunta 3

Los alumnos de este grupo muestran también dificultades para identificar la incógnita en los sistemas de ecuaciones que es necesario resolver para encontrar dichas coordenadas en casos un poco más complejos o que están dados en términos de variables. Otros, después de usar la técnica de la matriz aumentada para resolver un sistema de ecuaciones, no son capaces de interpretar el resultado y no pueden organizar la información para dar respuesta a las preguntas mostrando claramente que no han interiorizado estas acciones en un proceso que les permita trabajar de manera general. Este es el caso de E13, quien obtiene correctamente las imágenes de los vectores bajo la TL en la pregunta 4, pero respecto a la matriz que se le pide, comenta *"... recuerdo que los coeficientes se escriben en una matriz... pero no sé cómo era..."*, mostrando claramente que no ha construido la MATL como un proceso, mientras que en el caso de la pregunta 3 (como se muestra en la figura 5), no es capaz de interpretar el resultado de la matriz al trabajar únicamente con variables.

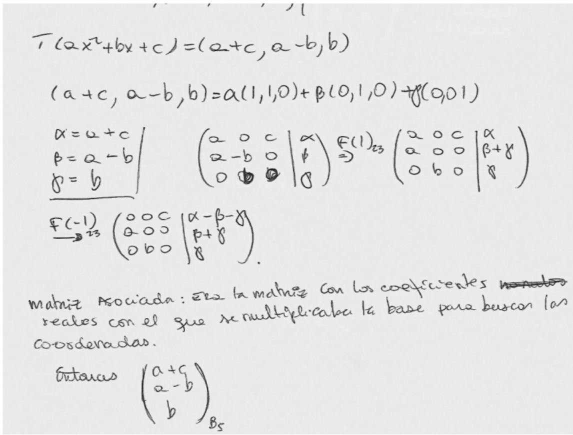

Figura 5. Cálculos realizados por E13

Diez estudiantes no responden las preguntas 4 y 5 o solamente dan respuestas del tipo *"no recuerdo las propiedades, pero no era difícil"*, *"no recuerdo la notación en general"* o *"recuerdo que tenía que ver con lo de las bases, pero nunca lo supe hacer"*. En el caso de la pregunta 5 utilizan alguna propiedad que recuerdan, como en el caso de E17, quien únicamente verifica la imagen del elemento neutro y comenta *"la transformación del cero vector es e a la cero que es uno, coma cero"* pero no hace nada más.

En relación con el TMATL, se puede decir que la falta de construcción de los procesos asociados a las acciones antes mencionadas repercute en la imposibilidad de estos alumnos de trabajar con dicho teorema. De acuerdo con la DG elaborada, es necesaria la construcción de dichos procesos y su coordinación para poder hacerlo.

Construcción de la MATL como proceso

Los 5 estudiantes que muestran haber construido una concepción proceso de la TMATL son capaces de calcular las coordenadas de la imagen de un vector, tanto en el caso de vectores y bases específicos, como en los casos en que se presentan de manera general. Por ejemplo, en la pregunta 3, E9 responde lo solicitado (Figura 6), calculando las coordenadas de la imagen de un vector, escrito en forma general, de donde puede determinarse que ha coordinado el proceso vector con el de espacio vectorial y de base, para construir el proceso coordenadas del vector en una nueva base dada.

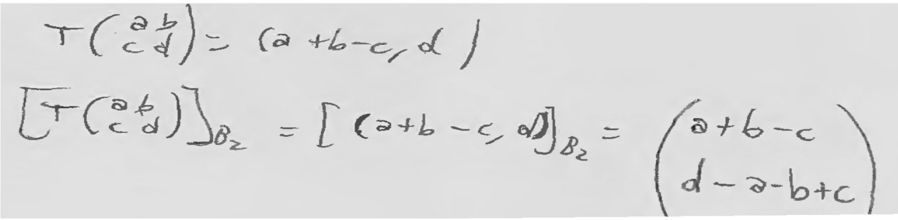

Figura 6. Respuesta de E9 a la pregunta 3

Estos alumnos muestran evidencias de haber coordinado las coordenadas de todos los vectores de una base en el dominio de la TL con los vectores de la base correspondiente a su imagen. Por ejemplo, el estudiante E9 escribe sus cálculos en el caso de la pregunta 4 y explica: *"Es como antes, pero aquí ya se encuentra para la transformación dada de manera general, no es específica".*

Estos alumnos muestran, además, una construcción proceso de la MATL. Proporcionan evidencias de coordinar este proceso, resultante de la coordinación de aquellos correspondientes a encontrar las coordenadas de los vectores en términos de las bases del dominio y la imagen de la TL, respectivamente, con el proceso de ordenamiento de los vectores en la MATL. Los cálculos de E9 cuando daba respuesta a esta pregunta, en un caso particular, se muestran en la figura 7. Al comentar en la entrevista su respuesta a esta pregunta, explica su proceder: *"Estos vectores corresponden a la base de la imagen de la TL. Es lo que va en la matriz, pero aquí. Al construir la matriz, no se pueden poner las columnas de cualquier manera...se necesitan poner como deben de ir, en un orden específico para que la matriz sí sea la asociada. El orden importa."* Mediante este comentario es posible afirmar que E9 da evidencias de haber construido el proceso MATL.

Estos alumnos tuvieron, sin embargo, dificultades para coordinar el proceso de matriz de coordenadas con el de coordenadas de un vector, o muestran no haber encapsulado la matriz de coordenadas en un objeto que permita compararlos y considerar su igualdad. Esta encapsulación es necesaria para reconocer el papel que juega la función en el TMATL.

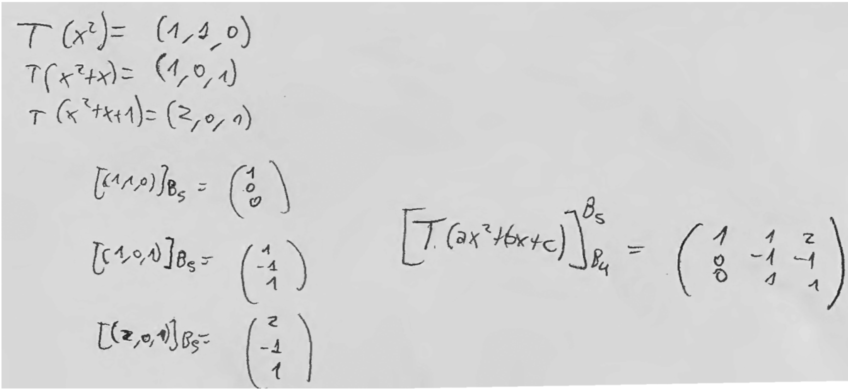

Figura 7. Respuesta de E9 a la pregunta 5

Construcción de la MATL como objeto y su relación con el TMATL

Los tres alumnos restantes dieron, a través de sus respuestas al cuestionario, evidencia de haber construido la MATL como objeto. Por sus respuestas fue posible evidenciar la importancia de la construcción objeto de la MATL en la construcción del TMATL. Entre estos estudiantes, E4 fue el único que se consideró podría haber construido el TMATL como objeto. Con sus respuestas a todas las preguntas del cuestionario y sus explicaciones a las mismas dio muestra de haber construido las estructuras mencionadas en la DG; sus respuestas fueron siempre contundentes y nunca hizo uso de procedimientos auxiliares en sus respuestas. Mostró, además, ser capaz de hacer acciones sobre la MATL. La utiliza para calcular la imagen de un vector bajo la TL. Al preguntarle si está seguro de su respuesta, responde:

"Sí, porque la matriz asociada me permite encontrar las imágenes de un vector sin necesidad de tener la TL en forma explícita, además no me piden cuál es la transformación, en realidad, no necesito hacer más". E4 evidencia en su trabajo en el cuestionario que ha coordinado todos los procesos involucrados en la construcción del TMATL y que es capaz de establecer la igualdad entre ellos (Figura 8). Identifica con claridad los elementos que debe usar en la respuesta de cada pregunta. Sin embargo, de sus respuestas no es posible inferir con certidumbre si ha construido el TMATL como objeto, pues no es posible discriminar si considera el teorema desde el punto de vista matricial o si reconoce su carácter funcional,

al no haberle hecho más preguntas, pues no fue posible que participara en la entrevista.

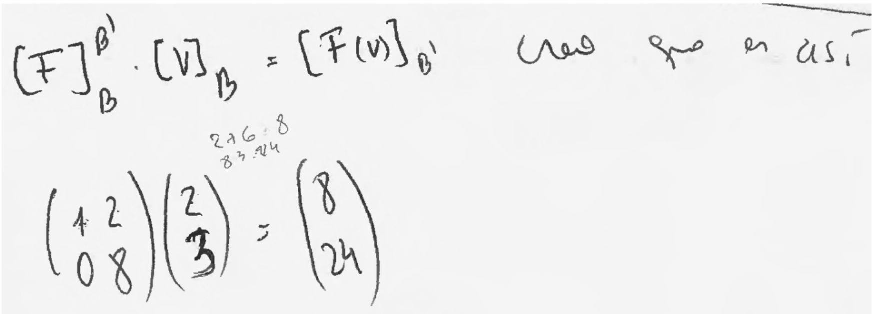

Figura 8. Respuesta de E4 a la pregunta 5

En la respuesta de E18 se encuentra un ejemplo de un alumno que, a pesar de mostrar haber construido una concepción objeto de la MATL, enfrenta algunas dificultades frente a la construcción del TMATL. Este alumno responde correctamente las primeras cuatro preguntas y explica sus procedimientos con claridad. Si bien contesta correctamente la pregunta 5, no efectúa las acciones sobre la MATL que le permiten la construcción del TMATL (Figura 9), en cambio, hace un proceso de reversión sobre la MATL dada para encontrar el vector de coordenadas y determinar la imagen del vector dando un paso hacia atrás, regresando a la combinación lineal, lo que le permite reconstruir el proceso para encontrar la matriz.

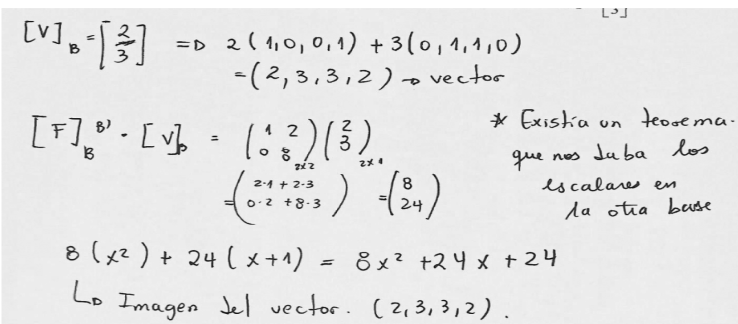

Figura 9. Respuesta de E18 a la pregunta 5

Es importante destacar que a partir de las respuestas al cuestionario y los comentarios que los alumnos ofrecen sobre ellas, E4 es el único que muestra una concepción objeto de la MATL y la construcción del TMATL en transición entre una concepción proceso y una concepción objeto.

Construcción de la MATL y del TMATL como proceso: la entrevista

De entre los alumnos que respondieron el cuestionario se eligió a los tres, aparte de E4,que dieron alguna muestra de haber construido una concepción del TMATL que posiblemente se encontraba en transición entre la concepción proceso y la concepción objeto. Se decidió indagar más a profundidad sobre sus construcciones a través de una entrevista a profundidad. Los alumnos entrevistados fueron E3, E9 y E18.

El análisis de los datos de la entrevista permitió adentrarse en la construcción del TMATL. Como se mencionó anteriormente, las preguntas de la entrevista se basaron en las del cuestionario y se añadieron otras particulares, dependiendo de las respuestas de cada uno de los entrevistados. Una pregunta que se utilizó en las tres entrevistas y que resultó clave en la posibilidad de permitir a los estudiantes reflexionar y reconstruir conocimiento durante la entrevista fue la siguiente:

Sea T: $R^2 \rightarrow R^2$ transformación lineal definida por $T(u) = Au$, donde $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ para $\theta = 30°$, T define una rotación de 30° en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

a. Demuestre que es una transformación lineal.
b. Determine las coordenadas de la imagen del punto $P = (5, \sqrt{3})$ bajo la Transformación T. ¿Puede graficar?
c. Si $T_1(u) = A^2u$. Cómo mueve la transformación T_1 al vector u.
d. Si $T_2(u) = A^{-1}u$. Cómo mueve la transformación T_2 al vector u.

En ella se presenta una transformación en términos del producto de una matriz por un vector. Se pidió a los alumnos señalar si la transformación es lineal y probarlo, con el propósito de mirar las acciones que podían hacer sobre la transformación, en las que se pone a prueba la evolución en la construcción del concepto MATL, puesto que una resistencia a la prueba corresponde a no haber construido como objeto la MATL. Por otra parte, si su respuesta era positiva, permitía obtener evidencias de una construcción proceso del concepto TL, pero al complementar la demostración con las respuestas a las preguntas c) y d), es posible obtener información sobre la posibilidad de haber construido como objeto la MATL, lo que se reconoce como el TMATL.

En el caso de E18, se observó su capacidad de realizar los cálculos particulares propuestos en la pregunta b), pero no fue capaz de hacer la demostración pedida, como se muestra en la figura 10.

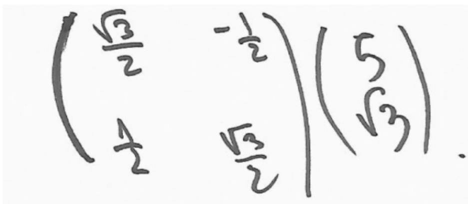

Figura 10. Respuesta de E18 a la pregunta b)

Podemos pensar que E18 realiza acciones sobre las matrices, pero no trabaja con la función TL, esto es, no coordina los procesos función combinación lineal y matriz.

Las evidencias obtenidas en las respuestas de E9 durante la entrevista reafirmaron la dificultad de los alumnos para considerar al producto de la matriz por el vector como una función.

[E9–13] *Me había complicado un poco con la anotación.*
[Ent–14] ¿Qué pasó con la anotación?
[E9–14] *Es que de hecho me había confundido, porque pensé en un momento que la transformación lineal era tomada de algún ángulo y le aplicaba entonces esto como la variable...*

No obstante, respondió la pregunta como se muestra en la siguiente figura 11.

En este caso, E9 mostró ser capaz de realizar acciones sobre la matriz para demostrar que es una TL. En su descripción se encuentra evidencia de la forma en que coordina los procesos asociados al producto entre matrices y vectores.

$$T(\alpha u + v) \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ u, v \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{p.d.} = \alpha T(u) + T(v) \qquad (x, y) = (x\ y)$$

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) = A(\alpha u + v) &= A \cdot \alpha u + Av \\ &= \alpha Au + Av \\ &= \alpha T(u) + T(v) \ // \end{aligned}$$

Figura 11. Respuesta de E9 a la demostración de la TL

[E9–19] *Los vectores cuando son de* R^2, *puedo escribirlos como una matriz de* 1x2. Entonces, por propiedades de las matrices conforman una línea, entonces puedo aplicar distribución. El producto distribuye.

[Ent–20] *Entonces es por distributividad, es por propiedad de las matrices.*

[E9–20] *Sí.*

[E9–21] *Y nuevamente por distributividad de las matrices se puede distribuir este producto y puedo bajar esto.*

[Ent–22] ¿Y eso depende de la matriz que te dieron?

[E9–22] *No.*

Por su parte, E3 realiza la prueba para la matriz dada sin dudar sobre el procedimiento a realizar, esto se aprecia en su trabajo, que aparece en la figura 12.

En las respuestas a las otras partes de la pregunta dadas por E9 y E3 es posible observar que, a pesar de ser capaces de operar con la matriz como proceso y de coordinar este proceso con el proceso de función, su trabajo se ve limitado al considerar la TL como una rotación o una reflexión, como se aprecia en la respuesta de E9 que se muestra en la figura 13.

[Ent–30] *Ahora la transformación inversa.*

[E9–30] *Esta propiedad viene a ser por la paridad del coseno y la disparidad del seno. Entonces el ángulo es el vector del ángulo negativo. Entonces es como aplicar la transformación con coseno de -30º... Se da un giro.*

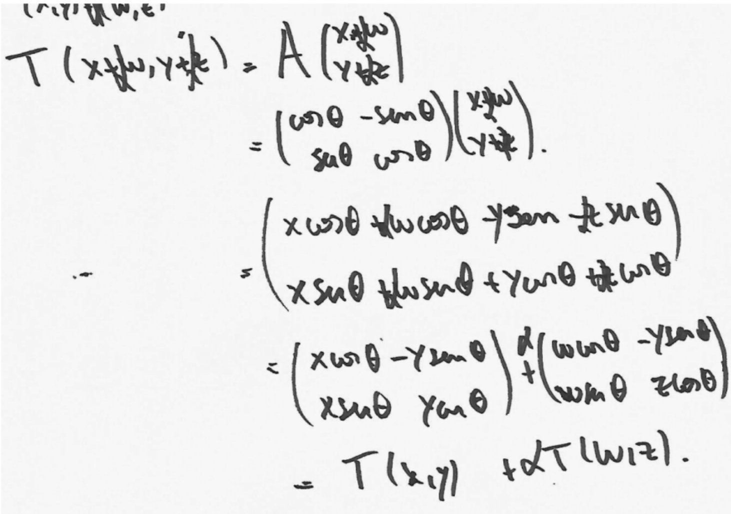

Figura 12. Respuesta de E3 a la demostración de la TL

Por su parte, E3 explica cómo la matriz actúa sobre los vectores, explicando la relación entre los grados y el movimiento de los vectores, argumentando: " ...*60°, primero 30 y después 30, en el sentido contrario a las manecillas del reloj...*" al mismo tiempo que realiza los cálculos sobre las matrices que se muestran en el figura 14, que no son claros ni se relacionan con su discurso.

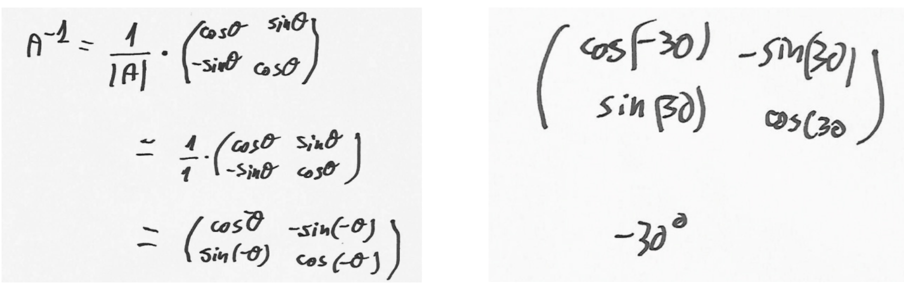

Figura 13. Producción de E9 al considerar la transformación inversa

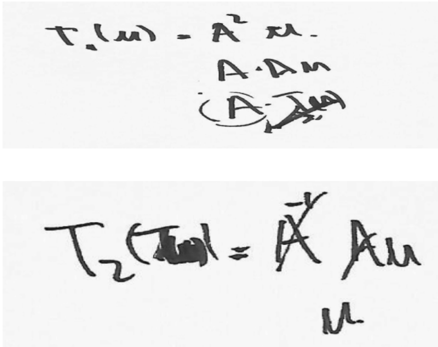

Figura 14. Respuesta de E3 a los apartados c) y d)

En el transcurso de la entrevista, y como se muestra en las figuras anteriores, E3 y E9 dan muestras de utilizar las estructuras que han construido y de reflexionar sobre ellas, para, con la guía de la entrevistadora, encapsular, ahí mismo, la MATL como un objeto al dar evidencias de poder hacer acciones sobre ella, mientras que las respuestas de E18 ponen en evidencia una concepción proceso de la MATL. Sin embargo, al enfrentar el TMATL, aunque son capaces de utilizarlo con comprensión, únicamente se puede concluir que lo han construido como un proceso. Sus respuestas no muestran evidencia alguna de considerar al TMATL como una función, es decir, concebir el teorema como la función: $[T(v)]_B \rightarrow [T]_B^{B'} \rightarrow [T(v)]_{B'}$. Al parecer, los alumnos comprenden el teorema en términos matriciales, pero no alcanzan a construir la relación con su interpretación funcional, pero los datos de este trabajo no alcanzan para sugerir cómo sería posible lograrla.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Los resultados de esta investigación muestran las construcciones y mecanismos mentales que modelan el aprendizaje del TMATL. Entre ellos se destacó la construcción del concepto coordenadas del vector como objeto y la coordinación entre los procesos de coordenadas de un vector respecto a una base del espacio dominio de la TL como proceso con la idea de matriz asociada a una transformación lineal como proceso para obtener como resultado las imágenes mediante la TL.

En cuanto al teorema que nos ocupa, el análisis de los resultados obtenidos da cuenta que los estudiantes que logran construir el TMATL, mostraron evidencias de haber construido las siguientes construcciones y desarrollado los mecanismos mentales asociados a ellas:

(1) *La construcción objeto del concepto de coordenada de la imagen de un vector*: Se logra a partir de la coordinación del proceso imagen de un vector en términos de la base del espacio vectorial de llegada de la TL con el proceso de matriz. Esta coordinación se realiza a partir de la construcción de la combinación lineal de vectores como proceso.

(2) *La construcción del concepto MATL como objeto*: Para ello es necesario coordinar los procesos de matriz y de coordenada de la imagen de un vector a través del cuantificador, que exige que todas las imágenes de la base del espacio de partida, sean puestas en combinación lineal de la base del espacio de llegada de la TL. Este proceso se encapsula en el objeto matriz asociada a una TL, denotado como $[T]_B^{B'}$. Esta encapsulación mostró ser difícil para los sujetos de los casos de esta investigación. Únicamente uno de ellos, E4, dio muestras en su trabajo de haberlo construido y, durante la entrevista, con la guía de la entrevistadora, dos alumnos más, E3 y E9, lograron dicha encapsulación.

Las evidencias obtenidas dan cuenta de las dificultades en la construcción del MATL. Claramente, el análisis de los resultados muestra que la no construcción del concepto coordenadas de la imagen de un vector como un proceso imposibilita la construcción de la MATL. Sin embargo, la determinación de las coordenadas de la imagen de un vector no basta para construir la MATL. Esta dificultad implica que no se ha construido la coordinación del proceso que permite escribir a estos vectores imagen como combinación lineal de los vectores de la base del espacio dominio de *T*, con el de matriz, para obtener un ordenamiento de las imágenes mediante *T*, en una matriz que se identifica con la matriz coordenadas.

(3) *La construcción del concepto de TMATL como proceso:* Se obtiene mediante el proceso de comparación de los objetos $[T]_B^{B'}$ y $[T(v)]_{B'}$ mediante la igualdad entre ambos objetos: $[T]_B^{B'}[v]_B = [T(v)]_{B'}$. Este proceso debe coordinarse, además, con el proceso de función en un nuevo proceso que permite considerar esta igualdad como el resultado de la aplicación de una función, lo cual viene a ser la construcción mental proceso TMATL. En los datos de la entrevista se observó que los estudiantes E3 y E9 construyeron una concepción proceso de TMATL. Ambos son capaces de comparar los objetos $[T]_B^{B'}$ y $[T(v)]_{B'}$ a través del producto de matrices. Sin embargo, nin-

guno de ellos fue capaz de coordinar el proceso de comparación con el de función, indispensable en la posible encapsulación de TMATL. Los resultados de esta investigación muestran las dificultades involucradas en esta construcción.

Una contribución relevante de este trabajo consiste en mostrar que la construcción de la MATL como un objeto, no garantiza que se ha construido la relación $\left[T\right]_{B}^{B'}\left[v\right]_{B}=\left[T\left(v\right)\right]_{B'}$ que establece el TMATL como un objeto. Al parecer, el peso que se le da al manejo de las matrices hace que la posibilidad de pensar en el TMATL como una relación entre funciones quede en un segundo plano. Este resultado parece indicar que en los cursos de álgebra lineal es necesario llevar a cabo actividades explícitas para poner de relieve el papel de la función en este importante teorema.

En general podemos decir que las construcciones previstas en la DG que aparecen en el trabajo de los estudiantes son, fundamentalmente, la construcción del concepto de coordenadas de un vector como un objeto, la construcciónde la MATL como un objeto, y la importancia del reconocimiento de MATL como una función. Estos datos muestran que la DG diseñada parece dar cuenta de las construcciones necesarias en el aprendizaje del TMATL. Cabe señalar que la evidencia encontrada no es suficiente para afirmarlo. Es necesario llevar a cabo más investigación que contemple entrevistas a un mayor número de estudiantes para tener evidencia que lo sustente.

Con este estudio se propone una primera respuesta a la pregunta de investigación planteada acerca de las construcciones y mecanismos mentales asociados a la construcción de la MATL y, al mismo tiempo, a la pregunta sobre las construcciones y mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje del TMATL. Se propone, así, esta DG a la comunidad interesada en el aprendizaje de este tema como un posible modelo de enseñanza-aprendizaje del TMATL y como diseño de investigación que permita validarla. Los resultados de este estudio, sin embargo, van más allá de la validación de la DG. Entre las contribuciones que la investigación hace a la literatura se pueden señalar el estudio de la transformación lineal desde una perspectiva matricial; las construcciones que parecen ser indispensables en la comprensión de este importante teorema; la construcción de las coordenadas de la imagen como objeto; la importancia del orden en la construcción de la MATL; la construcción de la MATL como objeto en la construcción del TMATL; el papel de la relación de la MATL con una función y su papel en el teorema como paso fundamental para la comprensión real del mismo. Este estudio proporciona nueva evidencia de que el uso de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de los alumnos y a sus estrategias.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto FONDECYT núm. 1140801, DI-PUCV 037.495-2013, por la Asociación Mexicana de Cultura y el ITAM. Los autores manifiestan sus agradecimientos por la buena disposición de todos los participantes en la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., J. Cottril,E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa, M. Trigueros y K. Weller. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*.New York: Springer.

Bagley, S., C. Rasmussen & M. Zandieh (2012). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. In (Eds.) S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, and M. Oehrtman, *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics.*

Godino, J. D., C. Batanero y V. Font. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), pp. 127-135.

Harel, G. (1989a). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: aspects of familiarity and mode of representation. En *School Science and Mathematics* 89, pp. 49-57.

Harel, G. (1989b). Teaching in learning linear algebra; difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. En *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11 (1-2), pp. 139-148.

Karrer, M. y A-P Jahn. (2008). Studying plane linear transformations on a dynamic geometry environment: analysis of tasks emphasizing the graphic register. ICME 11- TSG 22, Theme number 1.

Molina, G., y A. Oktaç.(2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (1), pp. 241-273.

Roa, S., y A. Oktaç. (2010). Construcción de una descomposición genética. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (1), pp. 89-112.

Sierpinska, A. (2000). "On some aspects of students' thinking in linear algebra", in J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Dortrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 209-246.

Sierpinska, A., A. Nnadozie & A. Oktac. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra. Concordia University. Unpublished Manuscript.

Sierpinska, A., T. Dreyfus, and J. Hillel. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques* 19 (1), pp. 7-40.

Stake, R.E. (2010). *Investigación con estudio de casos*.Barcelona: Labor.

Uicab, R., y A. Oktaç.(2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9 (3), pp. 459-490.

Wawro, M., C. Larson, M. Zandieh & C. Rasmussen.(2012). A hypothetical collective progression for conceptualizing matrices as linear transformations. Paper presented at the Fifteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Portland, OR.

Weller, K., A. Montgomery, J. Clark, J. Cottrill, I. Arnon, M. Trigueros y E. Dubinsky. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL. Recuperado de http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

ANEXO 1. TEOREMA MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL (TMATL)

Dicho teorema establece lo siguiente: sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K, $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base de V y $B' = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ una base de W. Los vectores $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)$ están en W y por lo tanto, cada uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base B':

$$\begin{gathered} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}\, w_m \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}\, w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}\, w_m \end{gathered}$$

En otras palabras, $\left[T\left(v_1\right)\right]'_B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \ldots \left[T\left(v_n\right)\right]'_B = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$; y la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases B y B', que rotulamos como $[T]_B^{B'}$ es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, tal que $\left[T\right]_B^{B'}\left[v\right]_B = \left[T\left(v\right)\right]_{B''}$ para todo v en V.

DATOS DE LOS AUTORES

María Trigueros Gaisman
Depto. de Matemáticas
División de Actuaría Estadística y Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
trigue@itam.mx

Isabel Maturana Peña
Instituto de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
isamatup@hotmail.com

Marcela Parraguez González
Instituto de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

Miguel Rodríguez Jara
Depto. de Matemáticas
Universidad de Playa Ancha, Chile
mrodriguez@upla.cl