Regla de los signos de la multiplicación: una propuesta didáctica

Rule of signs of the multiplication: a proposal didactic

José Benjamín Chan Domínguez y Genny Rocío Uicab Ballote

Resumen: En este trabajo se describe el diseño e implementación de una propuesta didáctica para abordar las reglas de los signos de la multiplicación mediante la representación geométrica del producto como el área de un rectángulo. La propuesta considera una secuencia de actividades organizadas tanto en una hoja de trabajo como también en el software Cabri II Plus. Dicha propuesta se encuentra diseñada bajo el enfoque de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, y tiene como actor principal al estudiante, quien por medio de un proceso de experimentación, conjeturación y explicación en la solución de las actividades es el encargado de construir las reglas de los signos. La propuesta didáctica está diseñada para estudiantes que cursan el nivel de educación secundaria.

Palabras clave: Reglas de los signos, medio didáctico, tratamiento escolar, teoría de situaciones didácticas, ingeniería didáctica.

Abstract: This project describes the design and implementation of a methodological approach to introduce the rules of multiplications signs through the geometric representation of the product like the area of a rectangle. The proposal considers two sequences of activities organized, both on a worksheet as well as the software Cabri II Plus. This proposal is designed in the focus of Brousseau's theory of didactic situations, and it has the student as the principal actor, which is in charge of an experimentation and explanation process during the resolution of learning activities, for building of the signs rules. This proposal is designed for middle school students.

Fecha de recepción: 23 de septiembre de 2014; fecha de aceptación: 17 de febrero de 2015.

Key words: Rules of the signs, learning environment, school treatment, theory of the didactic situations, didactic engineering.

1. INTRODUCCIÓN

En el proceso de enseñanza y aprendizaje, intervienen tres elementos esenciales: profesor, alumno y saber. Al promoverse el conocimiento, el saber es presentado en las aulas de clase mediante una transposición didáctica que pretende, entre otras cosas, facilitarlo; sin embargo, a la puesta en escena del saber pueden presentarse el surgimiento de dificultades, obstáculos y errores por parte de los estudiantes. Es por ello, que el tratamiento escolar debe propiciar que el estudiante participe activamente en su aprendizaje, de tal forma que las definiciones, propiedades, teoremas, objetos matemáticos, etc. tengan un sentido lógico, ordenado y correcto que le permitan hacer uso de la información adquirida y convertirla en conocimiento.

En la educación secundaria muchos tratamientos escolares carecen de una estructura que permita el análisis y reflexión sobre los contenidos matemáticos. El tratamiento escolar para abordar las reglas de los signos de la multiplicación suele consistir en que el estudiante las conozca, las memorice y posteriormente las aplique en la resolución de ejercicios. Esto, aunque no es incorrecto pues la finalidad en este ámbito escolar no es presentar la matemática en su forma axiomática, tampoco es suficiente, por ello es importante proponer actividades y ejemplos que propicien la argumentación en torno de las nociones matemáticas.

2. PROBLEMA Y OBJETIVO DE LA PROPUESTA

La Reforma Integral de la Educación Secundaria en México hace notar que los estudiantes de este nivel muestran desinterés por adquirir los conocimientos durante su estancia en la escuela, puesto que las prácticas de enseñanza priorizan la memorización en lugar de desarrollar el pensamiento lógico (Reforma Integral de la Educación Secundaria, 2002). Bajo este marco, el Programa Nacional de Educación (Pro-NaE) propone modificar la práctica educativa para mejorar las oportunidades de aprendizaje de todos los estudiantes. Por lo anterior, a través del *Modelo Educativo basado en Competencias*, en el año 2002, dio inicio la reforma de la educación secundaria, y uno de sus requerimientos inmediatos es la construcción de competencias que respondan a las necesidades de la sociedad y del mercado laboral, lo cual genera la necesidad de un aprendizaje significativo y permanente para el estudiante. Un aprendizaje significativo requiere comprensión.

Gómez (2001) expresa que en los manuales escolares la suma de los números con signo se suele justificar con la ayuda de deudas y ganancias, cargos y abonos. "Pero cuando se aborda la multiplicación, este modelo no funciona" (p.290), ya que "el producto de pérdidas no puede ser una ganancia" (p.290). En ese sentido cabe cuestionarse ¿cuál es la razón de ser de la regla de los signos? ¿Qué modelos podrían sugerirse para la enseñanza de las reglas de los signos de la multiplicación?

Los números negativos forman parte del conjunto de los números reales, sustanciales en el estudio de diversas ramas de las matemáticas. Es importante destacar que a partir de la estructura axiomática de los números reales se pueden enunciar y demostrar todas las reglas usuales del Álgebra. En particular, hay dos teoremas que al demostrarse bajo los axiomas de campo de los números reales, justifican las reglas de los signos:

Teorema 1:	El producto de dos números con signos diferentes es un número negativo.
Teorema 2:	El producto de dos números con signos iguales es un número positivo.

Sin embargo, un enfoque axiomático de las reglas de los signos en un ámbito educativo básico, no es quizá el camino apropiado para que el estudiante adquiera el aprendizaje de dichas reglas, entonces, ¿cómo diseñar una propuesta didáctica que permita a los estudiantes construir las reglas de los signos? y ¿qué elementos se deben considerar en el diseño de esa propuesta? Ante estas interrogantes, el objetivo del presente trabajo se centra en el diseño de una propuesta estructurada que permita, didácticamente, que el estudiante conjeture las reglas de los signos para la multiplicación.

3. MARCO DE REFERENCIA

El diseño de la propuesta didáctica se orienta bajo el enfoque de la Teoría de Situaciones Didácticas. Dicha teoría, desarrollada por Brousseau (1986) está sustentada en una concepción constructivista del aprendizaje en un sentido piagetiano: por *adaptación* a un *medio*. El *medio* es el antagonista de la acción del alumno. Para alcanzar el objetivo de la acción, el actuante deberá modificar sus estados de conocimiento de acuerdo a ciertas reglas que opone el medio y dado que los aprendizajes están sometidos a múltiples variables, se hace necesario modelar una sucesión de *situaciones* –relaciones entre el alumno y el medio, que otorgan las condiciones que generan el conocimiento matemático– por medio de las cuales se alcance el aprendizaje deseado. Estas situaciones hipotéticas se denominan «*situaciones didácticas*» y se oponen a las situaciones adidácticas (ver, Brousseau, 2007, pp. 14-15).

Las situaciones didácticas describen la actividad del alumno y del profesor. En términos de Brousseau (2007, p.18):

> Consideremos un dispositivo diseñado por una persona que quiere enseñar un conocimiento o controlar una adquisición. Este dispositivo comprende un medio material –las piezas de un juego, un desafío, un problema, incluso un ejercicio, una ficha, etc.– y las reglas de interacción con ese dispositivo, es decir, el juego propiamente dicho. Pero solamente el funcionamiento y el desarrollo efectivo del dispositivo, las partidas efectivamente jugadas, la resolución del problema, etc. pueden producir un efecto de enseñanza.

En consecuencia, el trabajo del profesor consistiría en diseñar el conjunto de situaciones didácticas que darían origen al conocimiento matemático cuando el estudiante está en situación «adidáctica», llamada así porque el profesor se abstiene parcial o totalmente de intervenir y el estudiante modifica sus estrategias y acciones en función de las retroacciones que proporciona el mismo medio (y que el profesor ha propuesto a los alumnos) para llegar al saber matemático.

3.1. Situaciones didácticas

La teoría de situaciones didácticas se organiza en situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización; la primeras emprendidas por el estudiante y las últimas desempeñadas por el profesor. Adicionalmente, es esencial considerar el acto de *la devolución*, que implica: comunicar un problema a un estudiante y promover que se sienta responsable de resolverlo asumiéndolo como su problema y respondiendo a las demandas del medio.

La *situación de acción*. Es el conocimiento en acto que se manifiesta en las decisiones y acciones que el alumno cree son eficaces para lograr su objetivo, de acuerdo a las restricciones y retroalimentaciones del medio. Se hace necesario, entre otros, cierto conocimiento matemático, el cual se revela como el más viable para alcanzar el éxito. Advirtiendo que:

> No se trata de una situación de manipulación libre, una buena situación de acción debe permitir al alumno juzgar el resultado de su acción y ajustar esta acción, sin la intervención del profesor, más bien, gracias a la retroacción por parte del medio de la situación (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 221).

Esta sucesión de interacciones entre el estudiante y el medio constituye lo que se denomina "dialéctica de la acción", el estudiante, por un lado, es capaz de anticipar los resultados de sus elecciones y, por el otro, sus estrategias son, en cierto modo, proposiciones confirmadas o invalidadas por la experimentación en una especie de *diálogo* con la situación (Brousseau, 1997).

La *situación de formulación*. Se caracteriza por la formulación de un conocimiento correspondiente a una capacidad del sujeto para reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico propio; por lo que el medio que exigirá al sujeto usar una formulación deberá entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero comprometerá a comunicarle una información (Brousseau, 2007).

Para que el alumno pueda hacer explícito su modelo implícito y para que esta formulación tenga sentido para él, es necesario que pueda utilizar dicha formulación para obtener él mismo o hacer obtener a alguien un resultado. "La formulación de los conocimientos pone en juego repertorios lingüísticos diversos (sintaxis y vocabulario). La adquisición de tales repertorios acompaña a la de los conocimientos que enuncian, pero ambos procesos son distintos" (Brousseau, 2007, p. 26).

La *situación de validación*. "La acción y formulación conllevan procesos de corrección, ya sea empírica o apoyada en aspectos culturales" (Brousseau, 2007, p.26) para establecer la pertinencia o conveniencia de la solución encontrada u obtenida al problema planteado.

> Pero la validación empírica obtenida en las fases precedentes es insuficiente, el alumno debe demostrar por qué el modelo que ha creado es válido. Para que el alumno construya una demostración y ésta tenga sentido para él es necesario

> que la construya en una situación, llamada de validación, en la que debe convencer a alguna otra persona. [...] Un estudiante (proponente) somete el mensaje matemático (modelo explícito de la situación) como una aseveración a un interlocutor (oponente). El proponente debe probar la exactitud y la pertinencia de su modelo y proporcionar, si es posible, una validación semántica y una validación sintáctica. El oponente puede pedir explicaciones suplementarias, rechazar las que no comprende o aquellas con las que no está de acuerdo (justificando su desacuerdo) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 223).

La *situación de institucionalización*. Los alumnos que han aprendido un conocimiento matemático pueden plantear adecuadamente y responder a cuestiones en torno a dicho conocimiento, sin embargo, dado que no tienen medios para contextualizar dichas cuestiones, no pueden adjudicar a los nuevos conocimientos un precepto adecuado. Por ello, el profesor debe esclarecer y puntualizar aquellas actividades realizadas por los estudiantes, sus proposiciones, otorgándoles un estatuto cultural (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

3.2. La ingeniería didáctica

La metodología utilizada en esta investigación se inspira en la ingeniería didáctica. Artigue (1995), expresa que la ingeniería didáctica como metodología de investigación "se caracteriza, en primer lugar, por un esquema experimental basado en las 'realizaciones didácticas' en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (p. 36). Esta metodología se caracteriza, también, por "el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori" (p. 37).

> En el análisis *a priori* se busca precisar las posibilidades que se han seleccionado, los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de esta selección y el sentido que pueden tomar los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores. En seguida, en el análisis *a posteriori*, este análisis *a priori* se compara con la realización efectiva y se busca lo que rechaza o confirma las hipótesis sobre las cuales estaba basado (Artigue, 1995, p.20).

La descripción de la metodología de la ingeniería didáctica se puede realizar por medio de una distinción temporal de su proceso experimental, diferenciando cuatro fases.

3.2.1. Fases de la ingeniería didáctica

Primera: análisis preliminares. Conocida como fase de planeación, se basa no sólo "en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también, en un determinado número de análisis preliminares, los más frecuentes", según Artigue (1995, p.38), son:

- El análisis epistemológico de los contenidos considerados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos (análisis didáctico).
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución (análisis cognitivo).
- El análisis de campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.
- Por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

Esta fase concluye en la formulación de una hipótesis que orienta las acciones del investigador tanto para la concepción como la gestión de las situaciones didácticas. La *hipótesis de la ingeniería didáctica* desempeña una función crucial: se constituye en el objeto de la investigación, se valida o refuta una vez realizados los análisis *a posteriori*.

Segunda: concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas. Conocida como diseño de las situaciones didácticas, el investigador explicita supuestos referidos a los procesos de enseñanza y aprendizaje que se generan en la situación y los resultados probables y seguros que se desean producir, también actúa sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones; estas son las variables de comando que el investigador concibe como pertinentes con relación al problema estudiado.

Tercera: experimentación. Se ejecuta lo planificado; mediante la puesta en escena del medio diseñado en las fases previas, se procura observar y detallar el proceso enseñanza aprendizaje de la mejor manera posible.

Cuarta: análisis a posteriori y evaluación. Se basa en el análisis del conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, observaciones realizadas de la secuencia de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes. Estos datos se complementan con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas como cuestionarios, entrevistas, etc. Posteriormente se realiza una confrontación de los análisis a priori y a posteriori, con lo cual se validan, o no, las hipótesis formuladas en la investigación.

4. ANÁLISIS PRELIMINARES

4.1. Referente epistemológico

Fue de particular importancia tener un referente histórico de las prácticas relacionadas con el surgimiento de las reglas de los signos de la multiplicación y las justificaciones que se presentaron por diversos matemáticos, en especial para la regla $(-)(-) = +$. Como expresan Maz y Rico (2009, p. 539) "puesto que la matemática tiene una larga historia, es importante investigar de qué forma los conocimientos matemáticos fueron evolucionando a lo largo del tiempo hasta adquirir los significados científicos y desarrollos formales, aceptados en el actual momento cultural".

En nuestro análisis se consideraron los períodos de desarrollo del álgebra, tomando como referencia la caracterización de dichas etapas que propone Nesselmann (1842, citado en Malisani, 1999) es decir, la etapa retórica, la etapa sincopada y la etapa simbólica. También es relevante mencionar que el surgimiento y desarrollo de las reglas de los signos de la multiplicación, dependió en gran medida del conocimiento tanto teórico como práctico de los números con signos en el seno de cada cultura; ya que las reglas de los signos tienen su origen a partir de la aparición de estos números. A continuación presentamos un breve resumen de cómo percibimos el surgimiento y desarrollo de las reglas de los signos y sus propias justificaciones a través de las etapas de desarrollo del álgebra.

Cabe señalar que no se tuvo acceso a las obras originales para el referente epistemológico, sin embargo a través de la información compartida por algunos autores, nos permitimos estructurar un resumen histórico.

4.1.1. Etapa retórica

Comprendió del año 4000 a.C. hasta el 300 d.C., y se caracterizó porque las operaciones generales se escribían mediante un enunciado gramatical, es decir, todo se escribía como un argumento en prosa. Las civilizaciones china, babilónica, egipcia y griega son los referentes de este período.

Los pobladores de la cultura china fueron los primeros en utilizar los números con signo (400 a.C.), estos números aparecieron por la necesidad de representar problemas de compra y venta de mercancías; en la práctica utilizaron palillos de color rojo para representar los números positivos y palillos de color negro para los números negativos (Gallardo y Hernández, 2007), en su matemática los números negativos cobran sentido en el contexto de la resolución de ecuaciones. Los chinos en la solución de las ecuaciones, operaron la multiplicación realizando sumas o sustracciones reiteradas, sin embargo no hay evidencia de argumentos relacionados con las reglas de los signos.

Respecto a las culturas babilónica, egipcia y griega, al parecer (en esa época) no se trabajó con números negativos, una razón atribuible es, que estas civilizaciones desarrollaron su matemática considerando aspectos geométricos, donde los negativos no tenían razón de ser.

Podría concluirse, que las culturas en sus inicios desarrollaron su matemática a partir de cantidades positivas, por tal razón en este periodo no tenía cabida hablar de las reglas de los signos para la operación multiplicación.

4.1.2. Etapa sincopada

Abarca del siglo III al XIV aproximadamente, se caracteriza por la sustitución de conceptos y operaciones que se usaban con más frecuencia, por abreviaturas; por ejemplo, las palabras más y menos se abreviaron como *p* y *m* respectivamente.

Diofanto (siglo III), haciendo alusión al producto de dos diferencias escribe una especie de reglas de los signos:

> Lo que es lo que falta multiplicado por lo que es lo que falta da lo que es positivo; mientras que lo que es lo que falta multiplicado por lo que es positivo, da lo que es lo que falta (Diofanto, libro I, citado en Gómez, 2001, p. 259).

Cabe señalar que Diofanto no otorgaba el estatus de número a los negativos. Así, por ejemplo, rechazaba las ecuaciones tales como $x + 6 = 0$, porque no las consideraba resolubles.

En general, los matemáticos en este período no aceptaban a los negativos como números, sin embargo, en esta etapa las culturas como la hindú utilizaron los números negativos por la necesidad de representar deudas, además los negativos aparecen en la solución de ecuaciones tanto lineales como cuadráticas.

Aunque en esta etapa hubo un mayor dominio de los números negativos si se le compara con la etapa retórica, y algunos matemáticos como Diofanto proporcionaron enunciados de las reglas de los signos, no hay presencia de demostraciones; posiblemente, porque en ese período la demostración no constituía un elemento fundamental de las matemáticas.

4.1.3. Etapa simbólica

Comprende del siglo XV hasta la actualidad y se caracteriza porque los enunciados comienzan a representarse con letras y signos. Los números negativos surgen al extender la sustracción a los casos en que el sustraendo era mayor que el minuendo. Conservando el orden numérico, dichos números habían de ser considerados menor que cero y, por tanto, menores que cualquier cantidad positiva. El matemático Simon Stevin (1548-1620), aceptaba las raíces negativas de una ecuación, por lo que utilizó números positivos y negativos como coeficientes de una ecuación; por su parte, Leonardo Euler (1707-1783) fue el primero en darles estatuto legal a los números negativos; y otros matemáticos como Pierre-Simon Laplace (1749-1827) interpretaban los números negativos como deudas. A continuación se presenta la justificación sobre las reglas de los signos que argumentan Stevin y Euler (citados en Gómez, 2001).

Stevin enuncia un teorema relacionado con las reglas de los signos, el cual justifica por medio de lo que él denominó una doble comprobación, es decir, aplica el teorema a un ejemplo, después el mismo ejemplo lo resuelve de otra forma y de ahí conjetura las reglas.

> Teorema. Más multiplicado por más, da producto más; menos multiplicado por menos, da producto más; más multiplicado por menos, o menos multiplicado por más, da producto menos.

> Explicación:
> Sea 8–5 multiplicado por 9–7, de esta manera: –7 veces –5 hacen (+35), porque como dice el teorema – por – hace +. Después –7 veces 8 hace –56 (–56, porque como se dice en el teorema – por + hace –). Y análogamente sea 8–5 multiplicado por el 9, dará como productos 72–45. Después juntad +72+35, que son 107. Después juntad los –56–45, que son –101. Y sustrayendo el 101 del 107, que restan 6, se tiene el producto de la multiplicación dada.
> Explicación de la regla. Hay que demostrar por lo enunciado que + multiplicado por + hace +, que – por – hace +, que + por –, o – por +, hace –.
> Demostración. El número a multiplicar, 8–5 vale 3, el multiplicador 9–7 vale 2. Pero multiplicando 2 por 3 el producto es 6. Luego el producto de aquí arriba también es 6, es el producto verdadero. Pero el mismo se ha obtenido por multiplicación, aquella donde hemos dicho que + multiplicado por + da producto +, – por – da producto +, + por –, o – por + da producto –, luego el teorema es verdadero. (Gómez, 2001, p.261).

Posteriormente para mayor garantía de verosimilitud, Stevin incluye una interpretación geométrica de las reglas mediante la representación del producto (8–5)(9–7) como área de un rectángulo que se forma de la descomposición de un rectángulo mayor.

> Euler, en sus *Elementos de Algebra* (1770, p.35) argumenta a partir de la interpretación de los negativos como deudas, considera que la multiplicación de cantidades con signo es conmutativa y razona por eliminación diciendo que –*a* por –*b* será *ab* ya que no puede ser –*ab* que es lo que vale –*a* por *b*. (Gómez, 2001, p.262).

Este referente histórico nos permite plantear las siguientes consideraciones para el diseño de la propuesta didáctica:

- Una construcción de la regla de los signos transitando por momentos retóricos, sincopados y simbólicos.
- Considerar una propuesta válida (matemáticamente hablando) sin presentar a los estudiantes una demostración axiomática como se estudia en un nivel universitario, pero sí usando referentes matemáticos en la argumentación, tal como se perciben en las aportaciones de los personajes matemáticos.
- La regla de los signos asociado a una representación geométrica.

4.2. Referente didáctico

Se revisaron 6 libros, correspondientes a la lista de textos autorizados y publicados por la Secretaría de Educación Pública en diferentes ciclos escolares, comprendidos del año 2000 al 2011, para su uso en las escuelas secundarias del Sistema Educativo Nacional (publicados en el *Diario Oficial de la Federación*). La selección fue apoyada accediendo a los libros que se usaron en su momento en algunas escuelas y otros vigentes (durante el desarrollo de la presente investigación). Las ediciones de los libros están comprendidas entre 1993 y 2009.

Para realizar el análisis de los libros y apreciar el tratamiento otorgado para abordar las reglas de los signos, se definieron ciertos ejes que permitieran organizar la información. Los ejes fueron: temas antecedentes, temas posteriores, estructura del tema (cómo se inicia, cómo se desarrolla y cómo se concluye la regla de los signos), actividades (situación o contexto mediante la cual se aborda el tema; dicha situación o contexto puede ser en el plano intramatemático o extramatemático), construcción de las reglas (se pretende identificar si las actividades conducen a que el alumno construya las reglas, o en su defecto si el o los autores del libro las proporcionan directamente) y ejercicios para el alumno. Para proporcionar un referente de los análisis realizados, a continuación se presenta el análisis del libro Matemáticas 2, de Martínez y Struck (2001):

El *tema antecedente* a las reglas de los signos de la multiplicación, es el tema de la adición y sustracción, donde se hace una introducción a las reglas de los signos mediante el planteamiento de un ejercicio cuya solución involucra una multiplicación de números con signos.

Estructura del tema. El tratamiento para abordar el tema se divide en tres momentos: introducción, desarrollo y cierre; también se aprecia un apartado de evaluación y ejercicios de reforzamiento. *Introducción.* En un primer momento se presenta la gráfica de una semirrecta en un sistema de ejes perpendiculares (*actividad o situación* para abordar el tema), en la cual se hace referencia a la tabla de multiplicar, el autor ejemplifica con la tabla de multiplicar del 3, (Imagen 1). En este caso el número 3 representa al primer factor, (pero no se ubica geométricamente en la gráfica), mientras que los números ubicados en la recta horizontal representan el segundo factor de la multiplicación y los números ubicados en la recta vertical corresponden al producto de la multiplicación. En esta situación se observa que tanto los factores como el producto involucran números positivos, es decir, se relacionan con la regla (+)(+).

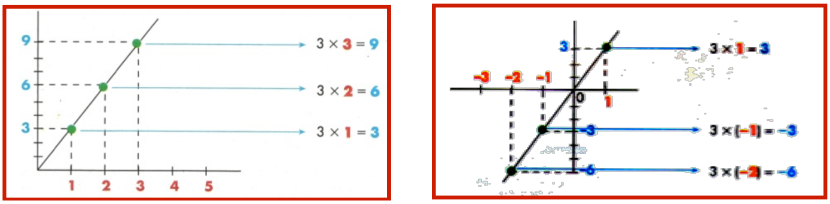

Imagen 1. Representación gráfica de la regla (+) (+), imagen izquierda, y (+) (–) en la imagen derecha. Libro de texto de Martínez y Struck (2001).

Se procede de manera similar para justificar la regla (+)(–), prolongando la semirrecta al tercer cuadrante, donde el primer factor sigue siendo el número 3 y el segundo factor son los números ubicados en la recta horizontal a la izquierda del cero (–1, –2, –3, etc.). *Desarrollo.* Posteriormente se guía al estudiante a reflexionar, cuestionándolo sobre cómo se representaría gráficamente la tabla de multiplicar del (–3). La solución presentada por los autores es la representación de la Imagen 2, para construirla se proporciona el argumento de que cualquier número multiplicado por uno es igual al mismo número, entonces (–3)(1) = –3, para construir la semirrecta se unen los puntos (0,0) y el punto que representa que al 1 le corresponde –3, es decir (1,–3) y se prolonga en el segundo y cuarto cuadrantes (Imagen 2). En este caso el primer factor de la multiplicación es el –3, mientras que los números del segundo factor son aquellos números ubicados en la recta horizontal (parte positiva). Con esta representación gráfica, al parecer, los autores esperan que se infiera que el producto de dos números con signo negativo, da un número positivo y que el producto de un número negativo por uno positivo da como resultado un número negativo.

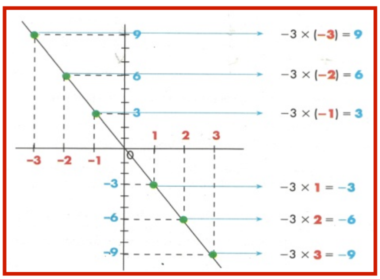

Imagen 2. Representación gráfica de las reglas (–) (–) y (–) (+) en el libro de Martínez y Struck (2001).

Posterior a la actividad se presentan inmediatamente las reglas de los signos, primero en forma de enunciados y después en una tabla (cruzada, que incluye los signos + y –) en la cual se sintetizan dichos enunciados. "Si se multiplica un número positivo por uno negativo, el resultado tiene signo negativo. Si se multiplican dos números con signos iguales, el resultado tiene signo positivo" (Martínez y Struck, 2001, p. 51).

El tratamiento de las reglas de los signos se concluye con dos bloques de ejercicios para el alumno, uno al término del tema y otro al concluir la unidad, en dichos ejercicios la tarea del alumno se reduce a la aplicación de las reglas de los signos en ejercicios algorítmicos.

El *tema posterior* a las reglas de los signos es la división de números con signos. En los siguientes temas que versan sobre operaciones algebraicas y sistemas de ecuaciones se requiere el uso de dichas reglas.

Se podría decir, que "la extrapolación", es la esencia de la estrategia presentada por los autores. Hay presencia de un método inductivo, en virtud de que a través de los casos particulares se espera la generalización de las reglas de los signos para la multiplicación. Sin embargo, desde nuestra perspectiva, esta estrategia pretende que el estudiante le dé un significado a la regla de los signos de la multiplicación, pero partiendo (en un sentido matemático) de una hipótesis que tiene involucrada a la tesis, es decir, ¡inferir algo partiendo de lo que se quiere inferir! por ejemplo, el primer factor (el número 3) se multiplica por un número positivo (segundo factor, ubicado en el eje x positivo) pero ¿por qué se propone que la representación sea en el primer cuadrante y no en el cuarto cuadrante?, porque el eje y que representa al resultado, necesariamente debe ser positivo, es decir, debe ser positivo de acuerdo a la regla de los signos de la multiplicación, por lo tanto debe quedar en el primer cuadrante. Pero, cómo entonces, se pretende que después de los casos particulares presentados, el estudiante reflexione sobre ¿cómo representaría gráficamente la tabla de multiplicar del –3? ¡Tendría que saber la regla de los signos para la multiplicación!

4.3. Referente cognitivo

Para tener información relacionada al conocimiento de los estudiantes sobre las reglas de los signos, se estructuró un instrumento conformado de tres secciones: la primera sección solicitaba escribir las reglas de los signos, la segunda aplicar las reglas (operaciones a resolver) y la tercera plantear un problema cuya solución sea por medio de las reglas de los signos. El instrumento se aplicó a 23 estudiantes de tercer grado de secundaria, observándose como resultados: la memorización de las reglas de los signos, la aplicación incorrecta en los ejercicios y ausencia de situaciones modelizadas por dicha noción, esto último nos permite pensar, que la enseñanza impartida a dichos jóvenes no incluyó modelos concretos.

Los referentes, didáctico y cognitivo, nos permiten plantear la siguiente consideración al diseño:

- Proponer un modelo concreto que permita al estudiante explorar sus propias interrogantes y en función de sus acciones recibir las retroalimentaciones correspondientes, y de esa forma conjeturar las reglas de los signos.

4.4. Hipótesis de la ingeniería

Diseño de un modelo concreto consistente, planteado en el marco de un contexto lúdico, que permita a los estudiantes de secundaria conjeturar las reglas de los signos para la multiplicación.

4.4.1. Variables

- La extrapolación de la representación geométrica a la aritmética.
- Las diferentes rutas solución que conllevan al planteamiento de conjeturas.
- Los colores asociados a las dimensiones del rectángulo y a su área.

5. DISEÑO DE LA PROPUESTA

5.1. Las reglas de los signos y su representación geométrica

Para el diseño de la propuesta didáctica se consideró utilizar como tratamiento la representación geométrica del producto a partir del concepto de área de regiones rectangulares. Al hacer referencia a la representación geométrica del producto mediante áreas, se hace alusión a que los factores de la multiplicación denotan las dimensiones del rectángulo (largo y ancho), por lo tanto el producto denota su área (Imagen 3).

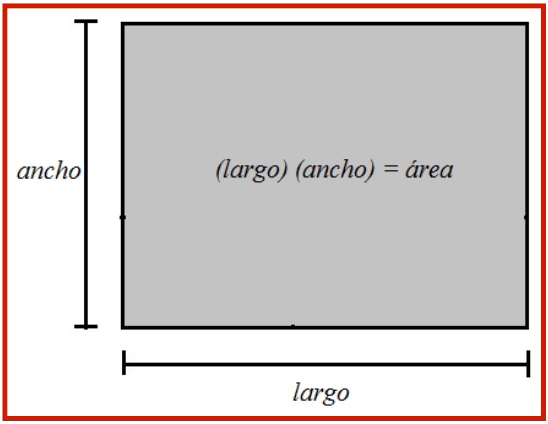

Imagen 3. Representación geométrica del producto mediante el área.

Al presentar las reglas de los signos mediante la representación geométrica, se asocian a las dimensiones del rectángulo (largo y ancho) un signo (positivo o negativo) de tal manera que cuando se multiplican las dimensiones de dicho rectángulo se obtiene un signo para el área resultante. Sin embargo, en la propuesta diseñada no se utilizan directamente los signos positivo y negativo, sino colores para representar los signos. De esta manera se asocia un color para cada dimensión y un color para el área del rectángulo. Para representar la regla *el producto de dos números con signos iguales, es positivo*, se utilizaron colores iguales representando así los signos iguales, estos asociados a cada dimensión del rectángulo (por ejemplo: verde-verde; azul-azul; rojo-rojo), y para denotar el área positiva se utilizó específicamente el color naranja, el cual siempre es el mismo sin importar los colores asociados a las dimensiones.

Para representar la regla *el producto de dos números con signos diferentes es negativo*, se utilizaron colores diferentes haciendo alusión a los signos diferentes, asociados a cada dimensión del rectángulo (por ejemplo: verde-gris; azul-rojo; verde-rosa), de igual manera, se utilizó un color para denotar el área negativa, en este caso el color amarillo, el cual siempre es el mismo sin importar los colores de las dimensiones.

5.1.2. El recurso didáctico

Para la elección del recurso didáctico, se consideraron los siguientes aspectos:

- Hacer uso de las herramientas tecnológicas para lograr dinamismo en las actividades y motivar la curiosidad del estudiante.
- Propiciar la interacción, es decir, presentar una situación en la que exista una comunicación estudiante y medio didáctico, de tal forma que el medio proporcione retroalimentación a las acciones de los estudiantes.
- Que el estudiante sea el "protagónico", es decir, que las actividades se encuentren inmersas en una historia y la tarea del escolar sea "jugar-aprendiendo".

De acuerdo a los aspectos mencionados, el contenido que guió la construcción de la regla de los signos se estructuró en el software Cabri II Plus, el cual permitió colocar imágenes, mostrar y ocultar información, mover objetos, trazar trayectorias, sombrear (colorear) áreas y presentar escenas consecutivas.

Las actividades didácticas se construyeron en una estructura al estilo de videojuegos en el marco de una historia ficticia que se desarrolla en una época de caballeros y princesas, cuya trama comienza cuando unos malvados caballeros, secuestran a la princesa Angie del castillo de Metha, y el rey muy preocupado encomienda la misión de rescatar a su hija al caballero Ham (protagonista de la historia), quien para ello, debe realizar una travesía, seleccionando caminos de diferentes colores que conduzcan a distintos castillos hasta encontrar a la princesa; los caminos son las dimensiones de las regiones rectangulares que forman el recorrido.

5.1.3. Descripción del contenido de la propuesta

La propuesta didáctica se conforma de tres actividades construidas en la interface del software Cabri II Plus y tres actividades diseñadas en una hoja de trabajo para la formulación y evaluación de las reglas de los signos. A continuación se describen las actividades diseñadas con el software y las actividades que conforman la hoja de trabajo.

5.1.3.1. Diseño de las actividades en el software de Cabri II Plus

La ambientación de la historia construida en la interface del software se conforma de ocho escenas (ver Imagen 4).

Escena 1. Introducción. Se presenta una breve reseña de la historia y las instrucciones para realizar las actividades. Los elementos característicos de esta escena son: el título de la actividad "Rescatando a la princesa Angie", información acerca del manejo de los botones, relato de la historia, reglas de los movimientos para cada actividad respectivamente y un mapa de la ubicación de los castillos.

Escenas 2 y 4. Desarrollo. En estas escenas se presenta la situación que involucra a las reglas de los signos por medio de dos actividades (Actividades 1 y 2); en las cuales, el caballero Ham debe dirigirse a determinados castillos para intentar rescatar a la princesa, para ello debe ir seleccionando caminos hasta llegar a los castillos. La selección de los caminos se realiza por medio de un movimiento (que consiste en un desplazamiento horizontal y uno vertical sin importar el orden); así cuando el caballero selecciona caminos que conducen al castillo se sombrean áreas de un mismo color, haciendo alusión (implícitamente) a las reglas $(-)(-) = +$, $(+)(+) = +$, (*el producto de dos números con signos iguales es positivo*); y cuando selecciona caminos que no conducen al castillo se sombrean áreas de otro color, lo anterior relacionado a la regla $(-)(+) = -$, (*el producto de dos números con signos diferentes es negativo*). Adicionalmente se incluyen unos botones, que permiten al estudiante evaluar sus movimientos.

Los objetivos específicos de las Actividades 1 y 2 son, que el estudiante:

- Identifique las características de los movimientos que conforman las rutas para llegar a los castillos.
- Establezca una relación entre los movimientos y el área que determinan los caminos de la ruta para llegar a los castillos.
- Establezca conjeturas y plantee una estrategia solución.

En dichas actividades se espera que el estudiante explore los diferentes caminos para llegar a los castillos, no importa si selecciona los caminos por ensayo y error; se confía que conforme avance en su trayectoria, encontrará estrategias que le permitan determinar de manera inmediata cuáles caminos conducen hacia los castillos y en particular al rescate de la princesa (Actividad 3). Lo anterior, constituye la situación de acción. Conforme se desarrolla la actividad el rol del estudiante se centra en observar patrones que le permitan rescatar a la princesa y de esa forma enunciar resultados (situación de formulación).

Escena 7. Cierre. En la Actividad 3 (escena 7), se pretende que el estudiante seleccione, de cuatro caminos proporcionados el camino que conduce al rescate de la princesa, basándose en las conjeturas realizadas en las fases previas; esta actividad constituye la situación de validación.

Imagen 4. Actividades diseñadas en Cabri II Plus.

5.5.3.2. Diseño de las actividades correspondientes a la hoja de trabajo

El documento denominado hoja de trabajo, consiste en un folleto de 16 páginas (de 21.59cm de largo x 13.97cm de alto), la primera y última son la portada y contraportada; la página que ocupa el noveno lugar entre todas las páginas es una portadilla y las páginas restantes numeradas del 1 al 13 contienen tareas (estructuradas en tres actividades) que guían al estudiante a la formulación y evaluación de las reglas de los signos.

La página 1 presenta brevemente la historia del secuestro de la princesa y de la encomienda que hace el rey al caballero Ham para ir en su rescate. En la página 2 se solicita al estudiante abrir el archivo diseñado en el software Cabri y ayudar al caballero a rescatar a la princesa. De la página 3 a la 7, se presenta a través de varias tareas la *primera actividad* que conforma la hoja de trabajo, cuyo propósito, es que el estudiante pueda conjeturar mediante enunciados las reglas de los signos. La primera tarea (página 3, Imagen 5) solicita al estudiante trazar con su lápiz la ruta que siguió para llegar al castillo de Cataña. Como segunda tarea (página 4, Imagen 5), el estudiante debe describir todos los movimientos que realizó para llegar a Cataña.

Imagen 5. Tareas correspondientes a la Actividad 1 de la hoja de trabajo.

Descritos los movimientos para llegar a Cataña, el estudiante debe realizar una descripción, pero utilizando los colores de los caminos recorridos, para posteriormente completar la frase que hace alusión al término "iguales" que es la característica que tienen en común los caminos seleccionados por el caballero Ham (página 5, Imagen 5). En seguida se le solicita que construya igualdades, relacionando los lados de los caminos y las áreas sombreadas (página 6, Imagen 5). Esta solución se puede decir que pertenece a una escritura que corresponde al álgebra retórica, primera fase en el desarrollo histórico del álgebra, debido a que los problemas y sus soluciones se describían mediante lenguaje natural, sin incluir símbolos. Finalmente el estudiante debe completar un enunciado que hace referencia (implícitamente) a las reglas de los signos (página 7).

Al término de esta *primera actividad* de la hoja de trabajo se espera que el estudiante por medio de las frases que completó pueda relacionar los colores de las dimensiones del rectángulo y el color del área respectiva, elementos que posteriormente le permitirán construir las reglas de los signos.

La *segunda actividad* que comprende de la página 8 a la 11, está conformada por seis tareas. Las primeras dos tareas de la *segunda actividad* son similares a la *primera actividad*: trazar la ruta para llegar a otro castillo (de Barza) y describir los movimientos realizados para llegar al castillo, reforzando así aquellos elementos relevantes para la construcción de las reglas de los signos. La tercera y cuarta tareas presentan una lista con los nombres de los colores que aparecen en las actividades, solicitándole al estudiante que invente un símbolo para cada color, a continuación se le pide que describa simbólicamente la ruta para llegar al castillo de Barza, es decir, sustituir los colores por los símbolos que inventó (página 9, Imagen 6). Posteriormente, en la quinta tarea, el estudiante debe representar simbólicamente las igualdades entre los lados de los caminos y las áreas sombreadas (esta etapa es la formulación de las reglas de los signos simbólicamente).

Como cierre de esta *segunda actividad*, en la escena 7 (Actividad 3), el estudiante debe determinar en un solo movimiento cuál de los cuatro caminos proporcionados con el software, conduce a Ham al rescate de la princesa (página 11, Imagen 6); para ello debe representar simbólicamente los movimientos a realizar (pre-construcción de las reglas).

Al término de la segunda actividad se espera que el estudiante haya construido la representación simbólica de las reglas de los signos. Por lo que, la *tercera actividad* servirá para verificar el aprendizaje de las reglas, mediante dos tareas; en la primera tarea colocar el signo (+) o (−) a las áreas presentadas por regiones rectangulares, de acuerdo con los colores (iguales o diferentes) que corresponden a las dimensiones (página 12, Imagen 6).

En la segunda tarea (página 13, Imagen 6) se presentan movimientos realizados por Ham de manera simbólica, incluyendo a propósito los símbolos (−)(−), (+)

(+), (−)(+); y solicitando al estudiante colocar el signo (+) o (−), si el movimiento conduce o no al rescate de la princesa.

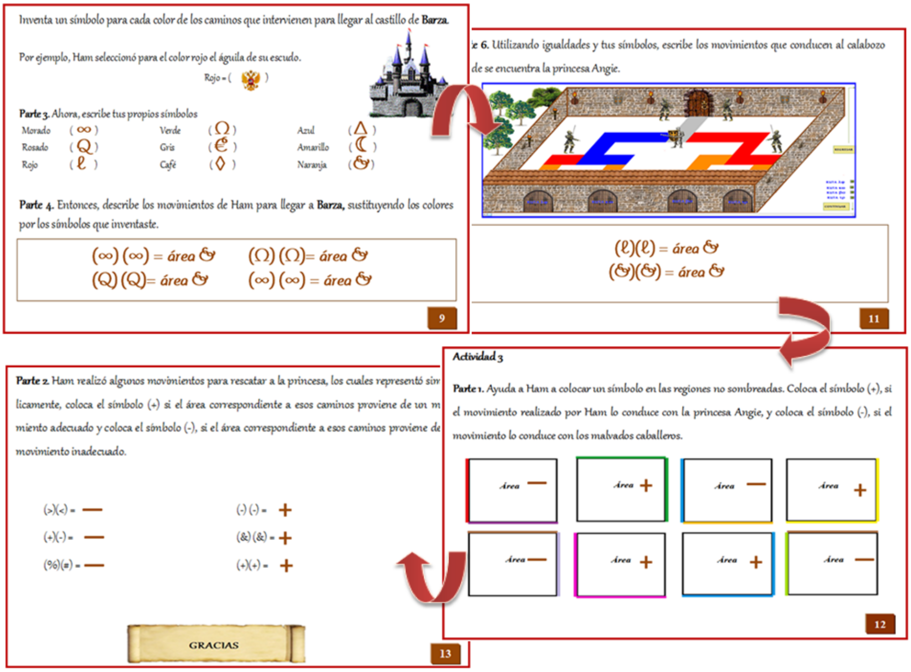

Imagen 6. Tareas que competen a las Actividades 2 y 3 de la hoja de trabajo.

Esta última actividad da la pauta para determinar si el estudiante plantea la representación simbólica de las reglas de los signos. Una vez concluida las actividades, el profesor cuestiona a los estudiantes sobre los resultados obtenidos en cada una de las actividades. De esta forma el profesor se enfoca en los puntos principales de la actividad para concretar la conjetura de las reglas de los signos (situación didáctica de institucionalización).

5. RESULTADOS

La propuesta didáctica fue aplicada a 9 estudiantes del segundo grado de secundaria de edades entre 12 a 16 años. Se seleccionó 20% de la población de estudio de cada escuela participante. Para la selección se aplicó un muestreo irrestricto aleatorio (utilizando la función Aleatorio.entre de Excel) seleccionando 4 números aleatorios comprendidos entre 1 y 20, número de alumnos en la Escuela Secundaria Técnica # 22 (Chicxulub Pueblo), y seleccionando 5 números entre 1 y 25 para la escuela Diego Lope de Cogolludo (Conkal).

Es importante destacar que las situaciones didácticas de formulación y validación (en el diseño de la propuesta) no las consideramos involucrando a otro(s) estudiante(s), sino en cierto modo y con intención, mediante la hoja de trabajo en la cual el estudiante deberá comunicar una información. Brousseau (2007) en los inicios de su teoría hace notar que el medio que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien deberá comunicar una información. Aunque la hoja de trabajo no es un sujeto permite que el estudiante comunique lo que ha encontrado. La formulación de los conocimientos pone en juego repertorios lingüísticos diversos (sintaxis y vocabulario) (Brousseau, 2007).

El diseño considera que los recursos didácticos pueden proporcionar las retroacciones que permitan al estudiante llegar (intuitivamente) al saber matemático. Al término de las actividades, el profesor cuestiona a los estudiantes sobre los resultados obtenidos en cada una de las actividades, validando y argumentando las estrategias que conducen a la conjetura de las reglas de los signos (presencia de la situación de formulación, combinada con la situación de institucionalización).

A continuación se exponen los resultados obtenidos de la aplicación, los cuales se organizaron siguiendo las situaciones didácticas de la Teoría de Situaciones Didácticas.

5.1. Situación de acción

En la Actividad 1 diseñada a manera de juego en el software Cabri II Plus, por medio de la manipulación del caballero Ham, los estudiantes participantes interactuaron con el medio para dar solución al problema planteado. Experimentaron realizando movimientos para llegar al castillo de Cataña, y así pasar al siguiente nivel del juego. En general se observaron las siguientes estrategias para llegar a dicho castillo.

Estrategia: ensayo y error. Algunos estudiantes, realizaron varios movimientos sin orden específico hasta llegar al castillo de Cataña, por lo general realizaban un movimiento correcto después de una serie de intentos incorrectos, en ocasiones pasando por el mismo camino más de una vez sin analizar las características de la ruta solución.

Estrategia: movimiento (abajo) (derecha). Otros estudiantes conjeturaron que la ruta para llegar a Cataña involucraba siempre la elección de los movimientos de la siguiente manera: primero un desplazamiento hacia abajo y luego un desplazamiento hacia la derecha, sin embargo, esta regla no se cumplía en toda la ruta, pues el movimiento tres hacia Cataña no seguía el mismo patrón.

Estrategia: colores iguales. Otros estudiantes identificaron que los movimientos involucraban caminos cuyos colores eran iguales (estrategia adecuada).

Posteriormente en la Actividad 2 diseñada en el software, los estudiantes recurrieron a la implementación de sus modelos construidos en la Actividad 1 para llegar al castillo de Barza, se observó que algunos estudiantes cambiaron la estrategia de *ensayo y error* y *la de movimiento (abajo) (derecha)*, y se centraron en buscar patrones y características de los caminos; de esta forma adoptaron como nueva *estrategia la de colores iguales*, en ese sentido se aprecia que el diseño de las actividades en el software comunicaron que las estrategias debían ser modificadas para ayudar al caballero Ham a rescatar a la princesa. Se *provocó* un cambio proveniente de ciertas características de la situación adidáctica que suscitó que fracasaran las estrategias espontáneas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

5.2. Situación de formulación

En el diseño de la propuesta se incluyó una hoja de trabajo tratando de que esta jugara en cierto modo el papel de actuante, así en esta situación de formulación se tienen "dos actuantes" y el medio. Esto no indica que el diseño de la propuesta no pueda incluir a más estudiantes para llevar a cabo una comunicación verbal en la que haya devoluciones de información enriquecedoras. Sin embargo, en nuestra propuesta privilegiamos la hoja de trabajo como el "sujeto ficticio". Consideramos que cada estudiante se enfrentó a una situación de formulación, al completar enunciados en la hoja de trabajo que hacen referencia a las características de las reglas de los signos. Por ejemplo, en la *primera actividad* de la hoja de trabajo, los estudiantes trazaron la ruta para llegar al castillo de Cataña (tarea uno); posteriormente completaron enunciados de las condiciones que deben cumplir los movimientos que forman parte de la ruta para llegar a Cataña (tarea cuatro). También describieron las condiciones que deben cumplir los movimientos para llegar a Cataña y la relación con el área sombreada (tarea seis). El repertorio lingüístico y simbólico es el que plasman los estudiantes en sus respectivas hojas de trabajo. Asimismo el estudiante podía transitar entre las actividades del software y las hojas de trabajo reconstruyendo sus apreciaciones (retroacciones).

Se ha mencionado que el profesor también juega el papel de actuante, pero hasta finalizar la realización de las actividades, proporcionando argumentos acerca de las estrategias que conducen a la conjetura de las reglas de los signos.

5.3. Situación de validación

La situación de validación se encuentra en la Actividad 3 diseñada en el software; en ella los estudiantes debían rescatar a la princesa de un sólo intento, lograr esto era indicador de que los estudiantes habían realizado conjeturas adecuadas a las trayectorias de los caminos relacionadas a las reglas de los signos. Esto fue realizado correctamente por 6 de los 9 estudiantes. Otra situación de validación se encuentra en la *segunda actividad* de la hoja de trabajo, en donde se les solicitó a los estudiantes que escribieran de manera simbólica la relación que se cumplía entre los lados de los rectángulos y el área de dicha figura (tarea 5). Esta representación simbólica es un aspecto importante en la situación didáctica de institucionalización.

5.4. Situación de institucionalización

Se retomaron las producciones de los estudiantes para la institucionalización de la regla de los signos. En esta situación, el profesor planteó cuestiones a los estudiantes para que describieran los recorridos óptimos para rescatar a la princesa de la historia, la relación de dichas estrategias descritas en forma de enunciados y luego simbólicamente. Se compartieron diferentes símbolos usados, el porqué de ellos, hasta conducir a los estudiantes a la enunciación de las reglas de los signos como se conciben en el campo de las matemáticas. Se platicó que esa construcción y enunciación que ellos habían hecho, es en cierto modo análogo a cómo años atrás diversos matemáticos argumentaron y demostraron las reglas de los signos para la multiplicación.

5.5. Producciones de un estudiante

Tomando como referencia lo anterior, a continuación se presentan las producciones de un estudiante en cada una de las situaciones. (Imagen 7)

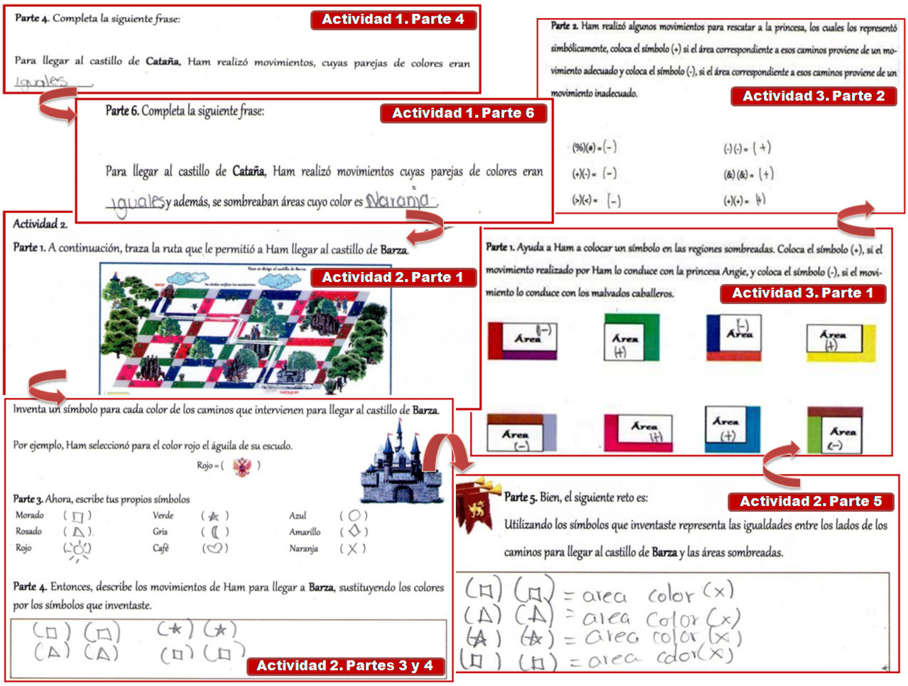

Imagen 7. Producciones de un estudiante.

Las acciones que realizó en la primera actividad (interacción con el *software*) fueron movimientos por ensayo y error (Castillo Cataña), pero conforme avanzó en esta actividad modificó su estrategia, esto se muestra en sus conjeturas y formulaciones que hacen referencia a los colores de los caminos (Actividad 1, Parte 4, Imagen 7). Posteriormente se observó que el estudiante identificó los elementos de los colores iguales y las áreas de color igual (tarea seis) (Actividad 1, Parte 6, Imagen 7). Este referente, le permitió resolver la siguiente actividad y determinar la trayectoria que conducía al siguiente castillo (Barza) (Actividad 2, Partes 1 y 2, Imagen 7). Seguidamente escribió de manera simbólica los elementos (colores iguales generan área de un color determinado) de las reglas de los signos (Actividad 2, Partes 3, 4 y 5, Imagen 7), y contestó correctamente las actividades de construcción de las reglas de los signos (Actividad 3, Parte 1, Imagen 7). Finalmente en la situación didáctica de institucionalización, el estudiante en diálogo y reflexión con el profesor rescatan los aspectos geométricos, el producto, los símbolos − y + para institucionalizar las reglas de los signos.

De esta forma se ha descrito el proceso de conjeturación e institucionalización de unas reglas para operar entidades simbólicas, que son análogas a las reglas de los signos para la multiplicación, a partir de la representación geométrica y simbólica del producto de factores.

Como comentario adicional, los estudiantes externaron que la presentación de las actividades resultó ser atractiva ya que interactuaron con conceptos matemáticos de una forma diferente a la que están acostumbrados en el aula de clase.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo de investigación se presentó una propuesta didáctica, que orienta al estudiante a conjeturar las reglas de los signos mediante una situación problema. En esta situación las reglas de los signos se construyen por medio de la representación geométrica del producto, considerando al producto como el área de una figura geométrica (rectángulo).

Se concluye que el diseño de la propuesta didáctica presentada, puede ser una alternativa a considerarse por los docentes de educación básica al abordar la temática de la regla de los signos. Las actividades diseñadas en el software, en vinculación con la hoja de trabajo pueden conducir a los estudiantes a la construcción simbólica de las reglas de los signos sin intervención del docente, pero será él quien posteriormente deberá esclarecer y puntualizar aquellas actividades realizadas por los estudiantes, sus propiedades emitidas, para otorgarles un estatuto cultural.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (7-23). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (33-60). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1979-1990* (Trad. por Nicolas Balacheff, et al). Great Britain: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (Trad. por Dilma Fregona). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE/Horsori.

Gómez, P. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En P. Gómez y L. Rico (Eds), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (257-276). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Hernández, A., Gallardo, A. (2008). La numerología y el álgebra chinas en la enseñanza actual de las ecuaciones lineales. *En Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007* (181-188). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico visión histórica. *Revista IRICE" del "Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación, 13*(1),1-27.

Martínez, M., Struck, F. (2001). *Matemáticas 2.* México: Santillana.

Maz, A., Rico, L. (2009). Números negativos en los siglos XVIII Y XIX: fenomenología y representaciones. España. Editorial EOS. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 573-554.

Sadovsky, P. (2005): La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Alagia, H., Versan, A. y Sadovsky, P. (Eds.). *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (13-65). Buenos Aires: Editorial Libros del Zorzal.

Subsecretaría de Educación Básica y Normal SEByN. (2002). Reforma Integral de la Educación Secundaria. Documento Base. México: Secretaría de Educación Pública.

DATOS DE LOS AUTORES

José Benjamín Chan Domínguez
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
benjac100@hotmail.com

Genny Rocío Uicab Ballote
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
uballote@uady.mx